Manual de texto

Fundamentos y aplicaciones de Mecánica Teórica

Álvaro Perea Covarrubias

Obra registrada en Registro Propiedad Intelectual. Comunidad de Madrid.
Reserva de derechos/licencia: Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0

Octubre 2025

Índice general

Bibliografía utilizada 3
- Libros de texto . . . 3
- Libros de problemas . . . 3

Plan de Trabajo 7

I - Formalismo Hamiltoniano de la Mecánica 7
- Formalismo Hamiltoniano . . . 7
  - Teoría . . . 7
  - Ejercicios prácticos . . . 7
  - Cuestionarios en línea . . . 8
  - Resultados de aprendizaje . . . 8
  - Lectura adicional recomendada . . . 9
- Transformaciones canónicas y Corchetes de Poisson . . . 9
  - Teoría . . . 9
  - Ejercicios prácticos . . . 9
  - Cuestionarios en línea . . . 10
  - Resultados de aprendizaje . . . 10
  - Lectura adicional recomendada . . . 11
- Ecuación de Hamilton−Jacobi . . . 12
  - Teoría . . . 12
  - Ejercicios prácticos . . . 12
  - Cuestionarios en línea . . . 12
  - Resultados de aprendizaje . . . 13
  - Lectura adicional recomendada . . . 14

II - Teorema de Liouville. Invariantes integrales y adiabáticos 15
- Teorema de Liouville . . . 15
  - Teoría . . . 15
  - Ejercicios prácticos . . . 15
  - Cuestionarios en línea . . . 15
  - Resultados de aprendizaje . . . 16
  - Lectura adicional recomendada . . . 17
- Invariantes integrales . . . 17
  - Teoría . . . 17
  - Ejercicios prácticos . . . 17
  - Cuestionarios en línea . . . 17
  - Resultados de aprendizaje . . . 17
  - Lectura adicional recomendada . . . 18
- Invariantes adiabáticos . . . 18
  - Teoría . . . 18
  - Ejercicios prácticos . . . 18
  - Cuestionarios en línea . . . 18
  - Resultados de aprendizaje . . . 18

Lectura adicional recomendada 19

III - Medios continuos **21**
• Formulación Lagrangiana de los medios continuos 21
Teoría 21
Ejercicios prácticos 21
Cuestionarios en línea 21
Resultados de aprendizaje 22
Lectura adicional recomendada 23

0 - Formalismo Lagrangiano de la Mecánica **27**

1. Principio de D'Alembert **27**
1.1. Principio estático del trabajo virtual 27
1.1.1. Estado de equilibrio en la Mecánica Newtoniana 27
1.1.2. Trabajo virtual 27
1.2. Principio dinámico de D'Alembert 29
1.2.1. Definición 29
1.2.2. Propiedades 29
1.2.3. Notas finales 30
1.3. Ejercicios resueltos 30
1.3.1. Máquina de Atwood con aceleración de subida 30
1.3.2. Caida vertical de masa ligada a polea 32
1.3.3. Rodadura de cilindro sobre plano inclinado 33
1.4. Ejercicio de Autoevaluación 34
1.4.1. Masa sobre plano inclinado en movimiento 34
1.5. Apéndice A. Conservación de la energía 35
1.6. Apéndice B. Derivación de las ecuaciones de Euler−Lagrange 36
1.7. Apéndice C. Formulación covariante de la Mecánica Newtoniana 40
1.7.1. Introducción 40
1.7.2. Formulación covariante de la teoría Newtoniana 41
1.8. Referencias 43
1.9. Videoclases 43

2. Principio de Hamilton **45**
2.1. Principio de Hamilton 45
2.1.1. Ecuaciones de Euler−Lagrange 45
2.1.2. Formulación invariante de la Mecánica 46
2.2. Teorema de Noether. Cantidades conservadas 47
2.2.1. Teorema de Noether 47
2.2.2. Cantidades conservadas 48
2.3. Otras cantidades conservadas 49
2.3.1. Integrales primeras 49
2.3.2. Coordenadas cíclicas o ignorables 50
2.4. Otros aspectos útiles 50
2.4.1. Transformación de coordenadas 50
2.4.2. Relación energía−Hamiltoniano 52
2.4.3. Estudio de los puntos de equilibrio (M) 54
2.4.4. Principio de relatividad de Galileo 57
2.5. Sistemas con ligaduras 59
2.5.1. Tipos de ligaduras 59
2.5.2. Tratamiento de las ligaduras 60
2.5.3. Sistemas holónomos 60
2.5.4. Sistemas no holónomos 60
2.6. Ejercicios resueltos 62

2.6.1. Péndulo con punto de suspensión libre . . . 62
2.6.2. Movimiento del tacómetro o regulador . . . 65
2.6.3. Oscilador con frecuencia dependiente de condición inicial . . . 68
2.6.4. Descripción Lagrangiana del oscilador amortiguado . . . 70
2.6.5. Partícula cargada en campo electromagnético . . . 73
2.6.6. Transformaciones de escala (M) . . . 74
2.6.7. Leyes de escala para movimientos Newtonianos . . . 76
2.6.8. Lagrangiano de la partícula libre (M) . . . 78
2.7. Ejercicios de Autoevaluación . . . 80
2.7.1. Movimiento en un tunel terrestre . . . 80
2.7.2. Sistema dinámico con dos grados de libertad . . . 81
2.8. Apéndice A. Cálculo simbólico y numérico . . . 82
2.8.1. Cálculo simbólico con Maxima . . . 82
2.8.2. Esquemas de integración numérica . . . 82
2.9. Apéndice B. Resolución ligadura dependiente del tiempo . . . 84
2.10. Apéndice C. Sistemas dinámicos . . . 86
2.10.1. Caso práctico. Lagrangiano generalizado $L(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$ . . . 87
2.11. Videoclases . . . 89

I - Formalismo Hamiltoniano de la Mecánica 93

3. Formalismo Hamiltoniano 93
3.1. Introducción . . . 93
3.1.1. Relevancia del Principio de Acción estacionaria . . . 93
3.1.2. Formalismo Lagrangiano y formalismo Hamiltoniano . . . 94
3.1.3. Fundamentos de la parametrización temporal . . . 96
3.2. Definición de Hamiltoniano . . . 97
3.2.1. Espacio de fases . . . 97
3.2.2. Desde el formalismo Lagrangiano . . . 97
3.2.3. Esquema para la construcción del Hamiltoniano . . . 99
3.2.4. Definición propia. Variables canónicas . . . 101
3.2.5. Uso de la notación tensorial . . . 101
3.3. Ecuaciones de Hamilton. Formulación geométrica . . . 102
3.3.1. Ecuaciones de Hamilton . . . 102
3.3.2. Consideraciones geométricas. Generadores . . . 105
3.3.3. Relación del Hamiltoniano con la energía . . . 106
3.3.4. Ejemplo. Movimiento de arrastre entre dos masas . . . 108
3.4. Principio generalizado de Hamilton . . . 109
3.4.1. Cálculo variacional . . . 109
3.4.2. Principio de Acción estacionaria . . . 111
3.4.3. Otros Principios variacionales relacionados . . . 113
3.4.4. Acción para la partícula libre . . . 114
3.5. Coordenadas cíclicas y Teoremas de conservación . . . 115
3.5.1. Método de Routh . . . 117
3.5.2. Ejemplos . . . 118
3.6. Ejercicios resueltos . . . 121
3.6.1. Pendulo ligado a un volante (M) . . . 121
3.6.2. Hamiltoniano dependiente del tiempo (M) . . . 124
3.6.3. Masas puntuales unidas por una cuerda (M) . . . 126
3.6.4. Formulación de Hamilton para función $G(\dot{q}, \dot{p}, t)$ (M) . . . 128
3.6.5. Partícula puntual bajo la acción de la gravedad (M) . . . 129
3.6.6. Deslizamiento de una masa a lo largo de un alambre (M) . . . 130
3.6.7. Sistema en rotación uniforme . . . 132
3.6.8. Teorema de Larmor . . . 134
3.6.9. Péndulo con punto de suspensión libre . . . 136

3.7. Ejercicios resueltos adicionales . . . 139
3.7.1. Hamiltoniano a partir de la ley de movimiento . . . 139
3.7.2. Hamiltoniano del movimiento periódico . . . 140
3.7.3. Partícula en caída libre . . . 141
3.7.4. Partícula libre con variable temporal . . . 142
3.8. Autoevaluación . . . 143
Ejercicios . . . 143
3.8.1. Lagrangiano dependiente del tiempo (R) . . . 143
3.8.2. Hamiltoniano con fuerza de rozamiento dependiente de la velocidad (R) . . . 143
Cuestionarios en línea . . . 143
3.8.3. Solución a las ecuaciones de Hamilton . . . 143
3.8.4. Constantes de movimiento . . . 143
3.8.5. Apéndice. Soluciones por cuadratura . . . 144
3.9. Apéndice A. Transformada de Legendre . . . 145
3.9.1. Propiedades de una curva convexa . . . 145
3.9.2. Transformación geométrica de Legendre . . . 147
3.9.3. Definición geométrica del Hamiltoniano . . . 150
3.10. Apéndice B. Notas matemáticas adicionales . . . 152
3.10.1. Notación matricial . . . 152
3.10.2. Resolución por cuadraturas . . . 154
3.11. Apéndice C. Geometría simpléctica . . . 155
3.11.1. Geometría en el espacio de fases . . . 155
3.11.2. Forma simpléctica ω. Evolución Hamiltoniana . . . 157
3.11.3. Ecuaciones de Hamilton . . . 158
3.11.4. Invariancia de la forma simpléctica . . . 160
3.11.5. Ejemplo. Billar circular . . . 160
3.12. Apéndice D. Hamiltonianos singulares . . . 162
3.12.1. Lagrangiano no singular . . . 163
3.12.2. Lagrangiano singular . . . 164
3.12.3. Hamiltoniano general con ligaduras . . . 170
3.13. Apéndice E. Cálculo simbólico y numérico . . . 173
3.13.1. Cálculo simbólico con Maxima . . . 173
3.13.2. Esquemas de integración numérica . . . 173
3.14. Videoclases . . . 175

4. Transformaciones canónicas y Corchetes de Poisson **177**
4.1. Definición de transformación canónica . . . 177
4.1.1. Transformaciones admisibles en el espacio de fases . . . 177
4.1.2. Transformación canónica . . . 178
4.2. Ecuaciones de la transformación canónica . . . 181
4.3. Tipos de transformaciones canónicas . . . 183
4.3.1. Tipo 1, $F_1 \equiv F(q, Q, t)$ . . . 184
4.3.2. Tipo 2, $F_2 \equiv F(q, P, t)$ . . . 185
4.3.3. Tipo 3, $F_3 \equiv F(p, Q, t)$ . . . 186
4.3.4. Tipo 4, $F_4 \equiv F(p, P, t)$ . . . 187
4.3.5. Ejemplos . . . 187
4.3.6. Ejemplos adicionales . . . 190
4.4. Transformaciones canónicas infinitesimales . . . 192
4.4.1. Propiedades de grupo de las transformaciones canónicas . . . 192
4.4.2. Transformaciones infinitesimales. Generadores . . . 192
4.5. Ejercicios resueltos . . . 194
4.5.1. Transformación canónica asociada al cambio de Lagrangiano (M) . . . 194
4.5.2. Transformación canónica con propiedad de simetría . . . 195
4.5.3. Transformación canónica independiente del tiempo . . . 199
4.5.4. Transformación canónica para Hamiltoniano dependiente del tiempo . . . 201
4.5.5. Transformación canónica para sistema disipativo . . . 203

4.5.6. Transformación canónica para sistema bidimensional . . . 204
4.5.7. Transformación canónica en términos de la diferencial exacta dF . . . 207
4.5.8. Partícula en campo gravitatorio uniforme . . . 209
4.5.9. Transformación canónica paramétrica bidimensional . . . 210
4.5.10. Transformación canónica paramétrica para oscilador armónico . . . 211
4.6. Corchetes de Poisson . . . 214
4.6.1. Definición y propiedades . . . 214
4.6.2. Ecuaciones de movimiento y Leyes de conservación . . . 216
4.6.3. Aplicación. Integración directa de la ecuación del movimiento . . . 217
4.6.4. Transformaciones infinitesimales . . . 218
4.6.5. Ejemplos . . . 219
4.6.6. Propiedades de simetría . . . 221
4.7. Ejercicios resueltos . . . 222
4.7.1. Invariancia frente a transformaciones canónicas . . . 222
4.7.2. Cantidades conservadas para Hamiltoniano bidimensional (M) . . . 226
4.7.3. Transformación canónica de distintos tipos (M) . . . 231
4.7.4. Propiedad cíclica del corchete de Poisson (M) . . . 233
4.7.5. Ejemplos de corchetes de Poisson (M) . . . 234
4.7.6. Partícula puntual con momento magnético . . . 236
4.7.7. Hamiltoniano con simetría de escala . . . 238
4.7.8. Cantidades conservadas para el oscilador armónico . . . 241
4.7.9. Ley de movimiento en función de corchetes de Poisson . . . 243
4.7.10. Corchetes de Poisson para partícula en campo magnético . . . 245
4.8. Ejercicios adicionales resumidos . . . 246
Transformaciones canónicas . . . 246
4.8.1. Aplicación sucesiva de dos transformaciones canónicas . . . 246
4.8.2. Invariante bajo transformación canónica . . . 247
4.8.3. Transformación canónica para movimiento en caída libre . . . 247
Corchetes de Poisson . . . 248
4.8.4. Corchetes de Poisson para Lagrangiano bidimensional . . . 248
4.8.5. Partícula cargada en presencia de campo magnético . . . 249
4.9. Autoevaluación . . . 251
Ejercicios . . . 251
4.9.1. Transformación infinitesimal en serie de potencias (R) . . . 251
4.9.2. Transformación canónica dependiente del tiempo (R) . . . 251
4.9.3. Corchete de Poisson de función f con L_z (R) . . . 252
4.9.4. Hamiltoniano del oscilador armónico en variables a, a^* (R) . . . 252
4.9.5. Transformaciones infinitesimales más usuales (R) . . . 252
4.9.6. Constante del movimiento dependiente del momento angular (R) . . . 253
Cuestionarios en línea . . . 253
4.9.7. Transformaciones canónicas . . . 253
4.9.8. Corchetes de Poisson . . . 253
4.10. Aplicaciones. Sistemas integrables . . . 254
4.10.1. Introducción . . . 254
4.10.2. Teorema de Liouville sobre integrabilidad . . . 254
4.10.3. Teorema de Bertrand-Darboux . . . 255
4.11. Ejercicios resueltos . . . 256
4.11.1. Peonza de Euler . . . 256
4.11.2. Peonza pesada de Lagrange . . . 258
4.11.3. Sistema bidimensional con potencial $A\left(x^2+4y^2\right)$ . . . 261
4.11.4. El problema de Kepler y el vector de Laplace-Runge-Lenz . . . 262
4.11.5. El oscilador armónico y el tensor de Fradkin . . . 264
4.11.6. Teorema de Bertrand-Darboux para sistemas superintegrables . . . 267
4.12. Apéndice A. Condiciones que aseguran la transformación canónica . . . 271
4.12.1. Condiciones cruzadas . . . 271
4.12.2. Método simpléctico . . . 272

4.13. Apéndice B. Generadores de simetría . . . 274
4.13.1. Corchetes de Poisson del momento angular. Álgebra de Lie . . . 274
4.13.2. Corchetes de Poisson del Hamiltoniano y el momento angular . . . 275
4.14. Videoclases . . . 276

5. Ecuación de Hamilton−Jacobi **277**
5.1. Ecuación de Hamilton−Jacobi. Función principal . . . 277
5.1.1. Transformación canónica fundamental . . . 277
5.1.2. Ecuación de Hamilton−Jacobi . . . 278
5.1.3. Función principal S . . . 279
5.1.4. Significado físico de S . . . 280
5.1.5. Función característica W . . . 281
5.2. Ejemplo detallado. Oscilador armónico . . . 282
5.3. Separación de variables . . . 284
5.3.1. Criterio de separabilidad de Levi-Civita (V) . . . 284
5.3.2. Ejemplos detallados . . . 284
5.4. Ejercicios resueltos . . . 288
5.4.1. Función principal S para partícula libre . . . 288
5.4.2. Función principal S para sistema Hamiltoniano unidimensional . . . 293
5.4.3. Función principal S para partícula en campo gravitatorio . . . 298
5.4.4. Ecuación de Hamilton−Jacobi para partícula en campo gravitatorio . . . 299
5.4.5. Expresión de la energía en función de las coordenadas y el tiempo . . . 301
5.4.6. Función principal para oscilador armónico simple . . . 303
5.4.7. Ecuación de Hamilton−Jacobi para oscilador isótropo tridimensional . . . 304
5.4.8. Función principal S para partícula libre relativista . . . 308
5.4.9. Función principal S para partícula en potencial unidimensional . . . 310
5.4.10. Ecuación de Hamilton−Jacobi en coordenadas cilíndricas . . . 311
5.4.11. Partícula en curva bidimensional paramétrica . . . 312
5.5. Ejercicios adicionales de sistemas separables . . . 314
5.5.1. Separabilidad para la partícula libre en el plano . . . 314
5.5.2. Hamiltoniano para sistema bidimensional . . . 317
5.5.3. Separabilidad en dos dimensiones . . . 319
5.5.4. Separabilidad en coordenadas cartesianas . . . 320
5.5.5. Ecuación de Hamilton−Jacobi separable en coordenadas cartesianas . . . 321
5.5.6. Separabilidad en coordenadas parabólicas . . . 322
5.5.7. Separabilidad en coordenadas elípticas . . . 323
5.5.8. Ecuación separable de Hamilton−Jacobi en presencia de campo magnético constante − coordenadas cartesianas . . . 325
5.5.9. Ecuación separable de Hamilton−Jacobi en presencia de campo magnético constante − coordenadas cilíndricas . . . 326
5.6. Variables acción-ángulo . . . 328
5.6.1. Introducción. Definiciones . . . 328
5.6.2. Sistema unidimensional . . . 329
5.6.3. Sistemas multiperiódicos . . . 333
5.7. Ejercicios resueltos . . . 334
5.7.1. Partícula en pozo de potencial . . . 334
5.7.2. Oscilador anisótropo bidimensional . . . 337
5.7.3. Pozo infinito bidimensional . . . 339
5.7.4. Oscilador isótropo tridimensional en coordenadas cartesianas . . . 341
5.7.5. Oscilador isótropo tridimensional en coordenadas cilíndricas . . . 342
5.7.6. Oscilador isótropo tridimensional en coordenadas esféricas . . . 344
5.7.7. Partícula en potencial central en coordenadas esféricas . . . 347
5.7.8. Oscilador armónico de frecuencia variable . . . 349
5.7.9. Péndulo doble con masa móvil . . . 352
5.7.10. Curva bidimensional para período mínimo de oscilación . . . 353
5.8. Autoevaluación . . . 356

Ejercicios . . . 356
5.8.1. Proyectil cerca de la superficie terrestre (R) . . . 356
5.8.2. Oscilador isótropo tridimensional (R) . . . 356
5.8.3. Problema relativista de Kepler (R) . . . 357
5.8.4. Corrección relativista al periodo del oscilador (R) . . . 357
5.8.5. Hamiltoniano en coordenadas cilíndricas (R) . . . 357
Cuestionarios en línea . . . 357
5.8.6. Hamiltoniano del sistema a partir de la función principal S . . . 357
5.8.7. Ecuación de movimiento a partir de la función principal S . . . 357
5.8.8. Apéndice. Soluciones separables . . . 357
5.9. Ejercicios de Autoevaluación adicionales . . . 358
5.9.1. Separabilidad de Hamiltoniano bidimensional (R) . . . 358
5.9.2. Partícula cargada en presencia de campos eléctrico y magnético (R) . . . 358
5.9.3. Partícula puntual en potencial no central-pendiente (R) . . . 358
5.9.4. Separabilidad con condiciones de Levi-Civita (R) . . . 359
5.10. Apéndice A. Apéndice matemático . . . 360
5.10.1. Demostración del criterio de separabilidad de Levi-Civita, (5.3.1). . . . 360
5.11. Apéndice B. Separabilidad y superintegrabilidad . . . 361
5.11.1. Superintegrabilidad . . . 362
5.11.2. Importancia de la superintegrabilidad . . . 364
5.12. Apéndice C. Acción en Mecánica Cuántica . . . 364
5.12.1. Introducción . . . 364
5.12.2. Acción en Mecánica Clásica . . . 364
5.12.3. Principio de acción estacionaria . . . 366
5.12.4. Acción en Mecánica Cuántica . . . 367
5.12.5. Ecuación de Hamilton−Jacobi y ecuación de Schrödinger . . . 369
5.12.6. Principio de superposición y colapso de la función de onda . . . 372
5.12.7. Modelos actuales para el colapso de la función de onda . . . 374
5.13. Videoclases . . . 378

II - Teorema de Liouville. Invariantes integrales y adiabáticos 381

6. Teorema de Liouville 381
6.1. Espacio de fases. Tipos de descripción . . . 381
6.2. Colectividad estadística . . . 383
6.3. Conservación de la probabilidad. Ecuación de continuidad . . . 384
6.4. Teorema de Liouville . . . 385
6.5. Conceptos adicionales . . . 386
6.5.1. Colectividad microcanónica . . . 386
6.5.2. Ergodicidad . . . 387
6.6. Flujo Hamiltoniano en el espacio de fases . . . 387
6.6.1. Parametrización temporal . . . 387
6.6.2. Reversibilidad de la dinámica Hamiltoniana . . . 388
6.6.3. Ejemplos detallados . . . 391
6.6.4. Dinámica temporal en el espacio de fases . . . 392
6.6.5. Notas adicionales con un ejemplo detallado . . . 393
6.7. Ejercicios resueltos . . . 395
6.7.1. Espacio de fases del péndulo simple . . . 395
6.7.2. Sistema de partículas libres en una dimensión . . . 396
6.7.3. Sistema de partículas en campo gravitatorio . . . 397
6.7.4. Densidad de estados en el instante t . . . 399
6.7.5. Factor de normalización en la densidad de estados . . . 400
6.7.6. Dinámica de partículas en espacio de fases . . . 402
6.7.7. Dinámica en el espacio de fases en presencia de una fuerza externa no conservativa . . . 404

6.8. Teoría del campo medio . . . 406
6.8.1. Introducción . . . 406
6.8.2. Densidades reducidas de probabilidad . . . 407
6.8.3. Ecuación de Liouville . . . 409
6.8.4. Campo medio . . . 410
6.9. Ejercicios resueltos . . . 414
6.9.1. Distribución canónica en el espacio de fases . . . 414
6.9.2. Densidad reducida para gas molecular . . . 416
6.9.3. Teorema H para la ecuación de Boltzmann . . . 418
6.9.4. Densidad de estados para un plasma eléctricamente neutro . . . 420
6.9.5. Hamiltoniano de dos cuerpos y su aproximación de campo medio . . . 422
6.9.6. Teorema H y transiciones de fase para la ecuación de Kramers . . . 423
6.10. Autoevaluación . . . 428
Ejercicios . . . 428
6.10.1. Partículas en movimiento vertical en campo gravitatorio (R) . . . 428
6.10.2. Dinámica disipativa en el espacio de fases (R) . . . 429
6.10.3. Evolución de la densidad de estados en el espacio de fases (R) . . . 429
Cuestionarios en línea . . . 429
6.10.4. Teorema de Liouville . . . 429
6.10.5. Teoría del campo medio . . . 429
6.11. Apendice A. Billares mecánicos . . . 430
6.11.1. Introducción . . . 430
6.11.2. Billares en 2D . . . 430
6.11.3. Ejemplo. Billar circular . . . 431
6.11.4. Billar circular con radio variable . . . 434
6.11.5. Gas ideal (ejemplo de billar en 3D) . . . 434
6.12. Videoclases . . . 436

7. Invariantes integrales **437**
7.1. Introducción . . . 437
7.2. Definición de invariante integral . . . 438
7.2.1. Ejemplos . . . 439
7.3. Invariante de acción . . . 440
7.4. Otros invariantes . . . 441
7.5. Ejercicios resueltos . . . 441
7.5.1. Integral de Poincaré−Cartan . . . 441
7.6. Autoevaluación . . . 443
Ejercicios . . . 443
7.6.1. Teorema de Lee Hwa-Chung (R) . . . 443
Cuestionarios en línea . . . 443
7.6.2. Invariantes integrales . . . 443
7.7. Videoclases . . . 444

8. Invariantes adiabáticos **445**
8.1. Definición de invariante adiabático . . . 445
8.2. Condición de invariancia adiabática . . . 446
8.3. Invariantes adiabáticos y el teorema de Liouville . . . 447
8.4. Ejemplo detallado. Oscilador armónico . . . 447
8.4.1. Primera demostración . . . 447
8.4.2. Segunda demostración . . . 449
8.4.3. Aclaración adicional. Ejemplo de frecuencia variable . . . 450
8.5. Ejercicios resueltos . . . 451
8.5.1. Partícula en colisión con paredes móviles . . . 451
8.5.2. Invariante adiabático para oscilador armónico unidimensional . . . 453
8.5.3. Invariante exacto para el oscilador armónico unidimensional-pendiente . . . 456
8.5.4. Partícula con rebotes sucesivos sobre el suelo . . . 457

8.5.5. Péndulo doble con masa móvil . . . 460
8.5.6. Partícula entre paredes impenetrables bajo acción externa . . . 461
8.5.7. Partícula cargada en campo magnético uniforme . . . 463
8.5.8. Partícula en el interior de cavidades especulares . . . 464
8.5.9. Movimiento adiabático en cavidad especular . . . 468
8.6. Ejercicios resueltos adicionales-pendiente . . . 470
8.6.1. Partícula perturbada en colisión con paredes fijas. Masa variable . . . 470
8.6.2. Partícula perturbada en colisión con paredes fijas. Efecto cinético . . . 471
8.6.3. Partícula perturbada en colisión con paredes fijas. Efecto potencial . . . 471
8.6.4. Partícula en el interior de un pozo de potencial unidimensional perturbado 472
8.7. Autoevaluación . . . 473
Ejercicios . . . 473
8.7.1. Invariante adiabático para la colisión elástica de dos masas (R) . . . 473
8.7.2. Péndulo simple con longitud de variación lenta (R) . . . 473
8.7.3. Partícula con variación lenta de masa (R) . . . 473
8.7.4. Partícula en campo magnético (R) . . . 474
Cuestionarios en línea . . . 474
8.7.5. Invariantes adiabáticos . . . 474
8.8. Apéndice A. Integración numérica en cavidad especular . . . 475
8.9. Apéndice B. Integración numérica en el regimen adiabático . . . 476
8.10. Videoclases . . . 478

III - Medios continuos y Teoría clásica de campos 481

9. Formulación Lagrangiana de los medios continuos 481
9.1. Límite al continuo . . . 481
9.1.1. Sistema de masas puntuales . . . 481
9.1.2. Oscilaciones longitudinales . . . 482
9.2. Densidad Lagrangiana . . . 483
9.2.1. El Lagrangiano de un medio continuo . . . 483
9.2.2. Ecuaciones de Euler−Lagrange de un medio continuo . . . 485
9.2.3. El Hamiltoniano de un medio continuo . . . 487
9.3. Teorema de Noether. Cantidades conservadas . . . 487
9.3.1. El teorema de Noether (sistema discreto, recordatorio) . . . 487
9.3.2. Ejemplos . . . 489
9.3.3. Teorema de Noether para el medio continuo . . . 490
9.3.4. Ejemplo. Cuerda con masa . . . 492
9.4. Ejercicios resueltos . . . 493
9.4.1. Cuerda elástica masiva con tensión . . . 493
9.4.2. Conservación del momento lineal para el medio continuo . . . 495
9.4.3. Perturbación del medio elástico en forma de onda viajera . . . 496
9.4.4. Medio elástico con tensión y densidad dependientes de la coordenada . . . 499
9.4.5. Cuerda vertical pesada . . . 500
9.4.6. Medio elástico no lineal . . . 502
9.4.7. Densidad Lagrangiana dependiente de derivadas superiores . . . 506
9.4.8. Perturbación del medio continuo en forma de campo escalar . . . 511
9.4.9. Deflexión lateral de una viga unidimensional . . . 512
9.4.10. Sistema mecánico cerrado . . . 515
9.4.11. Soluciones de onda viajera . . . 517
9.4.12. Relaciones de dispersión para medios lineales . . . 519
9.5. Autoevaluación . . . 521
Ejercicios . . . 521
9.5.1. Teorema de Noether (R) . . . 521
9.5.2. Modelo elástico con términos adicionales (R) . . . 521
9.5.3. Coordenada cíclica para perturbación en cuerda uniforme (R) . . . 521

9.5.4. Medios lineales con disipación (R) . . . 522
Cuestionarios en línea . . . 522
9.5.5. Límite del continuo . . . 522
9.5.6. Densidad Lagrangiana . . . 522
9.5.7. Relaciones de dispersión . . . 522
9.5.8. Densidad Hamiltoniana . . . 522
9.5.9. Cantidades conservadas . . . 522
9.6. Modelos no lineales. Solitones . . . 522
9.6.1. Introducción . . . 522
9.6.2. Costrucción de $N = 1$ soliton. Ecuación KdV . . . 524
9.6.3. Construcción de $N = 1$ soliton. Ecuación de seno-Gordon . . . 526
9.6.4. Cantidades conservadas. Ecuación KdV . . . 529
9.7. Ejercicios resueltos . . . 531
9.7.1. Familia paramétrica de soluciones para ecuación KdV . . . 531
9.7.2. Soluciones tipo onda viajera para condiciones frontera seleccionadas . . . 533
9.7.3. Cotas de energía para ondas viajeras. I . . . 538
9.7.4. Cotas de energía para ondas viajeras. II . . . 541
9.7.5. Cantidades conservadas para ecuación KdV . . . 543
9.8. Otros ejemplos . . . 548
9.8.1. Modelo no lineal complejo. Soluciones de onda y cantidades conservadas . . . 548
9.9. Autoevaluación . . . 550
Ejercicios . . . 550
Cuestionarios en línea . . . 550
9.9.1. Ecuaciones del movimiento . . . 550
9.9.2. Cantidades conservadas . . . 550
9.9.3. Teoría de campo . . . 550
9.10. Videoclases . . . 551

10. Teoría clásica de campos **553**
10.1. Introducción . . . 553
10.1.1. Noción de campo . . . 553
10.1.2. Espacio-tiempo relativista . . . 554
10.2. Campo relativista . . . 556
10.3. Características del campo escalar . . . 557
10.3.1. Densidad Lagrangiana . . . 557
10.3.2. Ecuaciones de Euler−Lagrange . . . 558
10.3.3. Ecuación de Klein-Gordon . . . 558
10.4. Teorema de Noether . . . 559
10.4.1. Simetría de Noether . . . 559
10.4.2. Variación del campo y de la densidad Lagrangiana . . . 559
10.4.3. Variación de la acción . . . 560
10.4.4. Teorema de Noether. Corriente conservada . . . 560
10.5. Simetrías y leyes de conservación . . . 561
10.5.1. Leyes de conservación. Carga Q . . . 561
10.5.2. Tensor de energía-momento . . . 561
10.5.3. Ley de conservación de $T^{\alpha\beta}$ . . . 562
10.6. Ejercicios resueltos . . . 564
10.6.1. Acción relativista para una partícula libre . . . 564
10.6.2. Tensor de energía-momento para una partícula aislada. Caso no relativista 565
10.6.3. Tensor de energía-momento para una partícula aislada. Caso relativista . . . 567
10.6.4. Tensor de energía-momento para el campo escalar . . . 569
10.6.5. Campo escalar con interacción . . . 570
10.6.6. Ruptura espontánea de la simetría . . . 572
10.6.7. Teoría para una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético 573
10.7. Ejercicios de Autoevaluación . . . 575
10.7.1. Dinámica relativista de la partícula libre (R) . . . 575

10.7.2. Partícula relativista en presencia de campo electromagnético (R) 575
10.7.3. Tensor de energía-tensiones para el campo de Klein-Gordon (R) 575
10.8. Apéndice. Geodésicas 575
10.8.1. Principio de Acción estacionaria 575
10.8.2. Curva geodésica 577
10.8.3. 4−vector momento de la particula 577
10.9. Videoclases 579

Apéndices - Complementos Matemáticos 583

11. Análisis tensorial 583
11.1. Escalares y Vectores 583
11.1.1. Producto escalar y vectorial 583
11.1.2. Magnitud escalar y vectorial 583
11.2. Tensores 585
11.2.1. Representación vectorial de tensores 585
11.2.2. Componentes de un tensor. Representación matricial 585
11.2.3. Algunas propiedades tensoriales 586
11.2.4. Manejo de índices en operaciones tensoriales 588
11.2.5. Otros tensores importantes 589
11.3. Mecánica de medios continuos 589
11.3.1. Medio continuo 589
11.3.2. Fuerzas en el medio continuo 590
11.3.3. Ecuaciones del movimiento 590
11.3.4. Tensor de tensiones 591
11.4. Independencia de las coordenadas 592
11.5. Ejercicios resueltos 593
11.5.1. Tensor δ^i_j 593
11.5.2. Independencia de las coordenadas. Vector 593
11.5.3. Independencia de las coordenadas. Escalar 594
11.5.4. Independencia de las coordenadas. Diferencial de una función 595
11.5.5. Tensor isótropo 595
11.5.6. Ejemplos identidades no tensoriales 596
11.5.7. Comprobación identidades tensoriales 596
11.5.8. Derivada parcial de un escalar 597
11.5.9. Demostración identidades tensoriales 597
11.5.10. Desarrollo espectral de tensor de orden 2 599
11.5.11. Propiedades de simetría de un tensor 599
11.5.12. Desarrollo espectral del tensor de rotación 600
11.5.13. Solución tensorial de las ecuaciones de Stokes 600
11.5.14. Gradiente de una función escalar 602
11.5.15. Gradiente de un tensor 603
11.5.16. Tensor de inercia 603
11.6. Ejercicios de Autoevaluación 604
11.6.1. Derivada segunda de un escalar 604
11.6.2. Demostración identidades vectoriales 604
11.6.3. Demostración identidades tensoriales 604
11.6.4. Desarrollo espectral de la potencia n-ésima de un tensor 604
11.6.5. Tensor de tensiones 605
11.6.6. Tensor gradiente de velocidad 605
11.6.7. Transformación ortogonal de coordenadas 605
11.7. Apéndice. Tensores en la Geometría diferencial 605
11.7.1. Componentes covariantes y contravariantes 605
11.7.2. Tensor métrico 607
11.7.3. Cambio de coordenadas. Transformaciones ortogonales 609

11.7.4. Independencia de las coordenadas . . . 610
11.7.5. Cambio de coordenadas. Transformaciones arbitrarias . . . 611
11.7.6. Álgebra de tensores . . . 613
11.7.7. Tensores relativos . . . 614
11.7.8. Símbolos de Christoffel . . . 615
11.7.9. Derivada absoluta de un tensor . . . 616
11.8. Referencias . . . 618

12. Cálculo variacional **619**
12.1. Cálculo variacional . . . 619
12.1.1. Introducción . . . 619
12.1.2. Ejemplo de cálculo variacional directo . . . 619
12.1.3. Ecuación de Euler−Lagrange . . . 621
12.2. Integrales primeras . . . 622
12.2.1. Simetría bajo la traslación en y . . . 622
12.2.2. Simetría bajo la traslación en x . . . 623
12.3. Coordenadas ignorables . . . 623
12.4. Principios variacionales . . . 624
12.4.1. Energía potencial mínima . . . 624
12.4.2. Sistema con ligaduras . . . 627
12.4.3. Condición frontera natural . . . 629
12.4.4. Principio de Jacobi de acción mínima . . . 631
12.4.5. Sistemas disipativos . . . 634
12.5. Ejercicios resueltos . . . 636
12.5.1. Curva braquistocrona . . . 636
12.5.2. Superficie mínima . . . 638
12.5.3. Área de figura plana . . . 639
12.5.4. Trayectoria de un proyectil . . . 642
12.6. Ejercicios de Autoevaluación . . . 643
12.6.1. Ecuación de Euler−Lagrange . . . 643
12.6.2. Método variacional frente a método directo . . . 644
12.6.3. Catenaria simétrica . . . 644
12.7. Referencias . . . 645

13. Simetrías y ecuaciones diferenciales ordinarias **647**
13.1. Introducción . . . 647
13.2. Transformaciones puntuales de Lie y sus generadores . . . 647
13.2.1. Transformaciones puntuales . . . 647
13.2.2. Generadores de la transformación continua . . . 648
13.3. Simetrías puntuales para ecuaciones diferenciales ordinarias . . . 652
13.3.1. Extensión de los generadores $\boldsymbol{X}$ . . . 652
13.3.2. Definición de simetría de una EDO . . . 653
13.4. Aplicaciones . . . 655
13.4.1. Introducción . . . 655
13.4.2. Ecuaciones diferenciales de primer orden . . . 656
13.4.3. Ecuación diferencial de segundo orden . . . 658
13.4.4. Procedimiento de integración de las soluciones . . . 659
13.5. Álgebras de Lie . . . 663
13.5.1. Propiedades generales . . . 663
13.5.2. Ejemplos de álgebras de Lie . . . 664
13.6. Simetrías dinámicas . . . 665
13.6.1. Transformaciones dinámicas . . . 665
13.6.2. Significado de las simetrías dinámicas . . . 666
13.7. Referencias . . . 667

14.Método de Lagrange en Mecánica y Ondas **669**
14.1. Lagrangiano . . . 669
14.2. Integral de acción S . . . 669
14.3. Principio de Mínima acción . . . 669
14.4. Ecuaciones del movimiento . . . 669
14.5. Evaluación de la energía cinética . . . 670
14.6. Evaluación de la energía potencial . . . 671
14.7. Fuerzas de ligadura . . . 671
14.8. Metodología . . . 671
14.9. Apéndice. Formulación Hamiltoniana . . . 672
14.10Ejercicios resueltos . . . 672
14.10.1Varilla rígida en rotación uniforme . . . 672
14.10.2Superficie libre de un líquido . . . 674
14.10.3Masa puntual ligada a volante en rotación . . . 675
14.10.4Dos masas ligadas a cuerda inextensible . . . 676
14.10.5Fuerza de ligadura masas ligadas a cuerda inextensible . . . 677
14.10.6Máquina de Atwood . . . 678
14.10.7Masa puntual sobre superficie esférica . . . 679
14.10.8Partícula en superficie interior de un cilindro . . . 680
14.11Ejercicios de Autoevaluación . . . 681
14.11.1Dos péndulos de varilla (M) . . . 681
14.11.2Péndulo con punto de suspensión libre (M) . . . 682

Apéndices - Complementos matemáticos avanzados **687**

15.Formalismo Hamiltoniano **687**
15.1. Simetrías dinámicas y leyes de conservación . . . 687
15.1.1. Simetrías de Cartan . . . 687
15.1.2. Ejemplo detallado . . . 688
15.2. Caso práctico: Simetrías en el problema de Kepler . . . 690
15.2.1. Condición de simetría puntual para EDO de segundo orden . . . 690
15.2.2. Definición del problema de Kepler . . . 690
15.2.3. Resolución de las simetrías puntuales . . . 691
15.2.4. Generador de las simetrías puntuales . . . 693
15.2.5. Simetrías de Noether . . . 694
15.2.6. Simetrías dinámicas . . . 696
15.3. Cálculo geométrico. Geodésicas. Vectores de Killing . . . 698
15.3.1. Vectores de Killing para las ecuaciones geodésicas . . . 700
15.3.2. Integrales primeras. Simetrías dinámicas . . . 701
15.3.3. Vectores y tensores de Killing . . . 701

Soluciones a los ejercicios de Autoevaluación **705**

16.Formalismo Hamiltoniano **705**

17.Transformaciones canónicas y corchetes de Poisson **709**

18.Ecuación de Hamilton−Jacobi **719**

19.Teorema de Liouville. Invariantes integrales y adiabáticos **733**

20.Medios continuos **745**

21.Teoría clásica de campos **753**

Programas de Maxima **761**

22. Formulación Lagrangiana **761**
Ejercicio 14.11.1 . . . 761
Ejercicio 14.11.2 . . . 763
Ejercicio 14.11.2 . . . 766
Ejercicio 2.4.3 . . . 768
Ejercicio 2.6.3 . . . 771
Ejercicio 2.6.4 . . . 774
Ejercicio 2.6.5 . . . 777
Ejercicios 2.6.6, 2.6.7 . . . 779
Ejercicio 2.6.8 . . . 781

23. Formulación Hamiltoniana **783**
Ejercicio 3.6.1 . . . 783
Ejercicio 3.6.2 . . . 787
Ejercicio 3.6.3 . . . 789
Ejercicio 3.6.3 . . . 792
Ejercicio 3.6.3 . . . 793
Ejercicio 3.6.6 . . . 796
Ejercicio 3.8.1 . . . 798

24. Transformaciones canónicas **801**

25. Corchetes de Poisson **803**
Ejercicio 4.7.1 . . . 803
Ejercicio 4.7.2 . . . 806
Ejercicio 4.7.3 . . . 809
Ejercicio 4.7.3 . . . 813
Ejercicio 4.7.5 . . . 814

Bibliografia utilizada

Libros de texto

- *Classical Mechanics*, Goldstein, Pole y Safko.
- *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*, M.G. Calkin
- *Classical Dynamics. A contemporary approach*, Jose y Saletan
- *Classical Mechanics. Hamiltonian and Lagrangian formalism*, Deriglazov

Libros de problemas

- Homer Reid ha publicado en abierto un solucionario de problemas seleccionados del libro de Goldstein.
- Jose y Saletan también disponen de un solucionario publicado de los problemas de su libro.
- Otra colección de problemas se encuentra en *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics: Solutions to the exercises*, de MG Calkin, que corresponden al desarrollo teórico del texto del mismo título.
- Además, *Exploring Classical Mechanics: A Collection of 350+ Solved Problems for Students,Lecturers, and Researchers*, Gleb L. Kotkin,Valeriy G. Serbo (reedicion de un libro anterior)
- Pueden consultar también los problemas resueltos de cursos de Mecánica de distintas universidades, publicados en abierto en la red.

Plan de Trabajo

I - Formalismo Hamiltoniano de la Mecánica

Formalismo Hamiltoniano (capítulo 3)

Teoría

- Introducción 3.1
- Definición del Hamiltoniano 3.2
- Ecuaciones de Hamilton. Formulacion geometrica 3.3
- Principio generalizado de Hamilton 3.4, excepto 3.4.3, 3.4.4
- Coordenadas cíclicas y Teoremas de conservación 3.5, excepto 3.5.1
- Transformada de Legendre 3.9, excepto 3.9.2
- Notas matemáticas 3.10
- Geometría simpléctica 3.11.1

Ejercicios prácticos

- 3.6.3: Masas puntuales unidas por una cuerda
- 3.6.6: Deslizamiento de una masa a lo largo de un alambre
- 3.6.9: Péndulo con punto de suspensión libre (formalismo Hamiltoniano)
- 3.7.3: Partícula en caída libre
- Autoevaluación 3.8.2: Hamiltoniano con fuerza de rozamiento dependiente de la velocidad
- 3.6.5: Partícula puntual bajo la acción de la gravedad
- 3.6.2: Hamiltoniano dependiente del tiempo
- 3.7.1: Hamiltoniano a partir de la ley de movimiento
- 3.7.2: Hamiltoniano del movimiento periódico
- Autoevaluación 3.8.1: Lagrangiano dependiente del tiempo
- 3.6.8: Teorema de Larmor
- 3.6.1: Pendulo ligado a un volante
- 3.6.4: Formulación de Hamilton para función G

Cuestionarios en línea

- 3.8.3: Solución a las ecuaciones de Hamilton
- 3.8.4: Constantes de movimiento
- 3.8.5: Apéndice. Soluciones por cuadratura

Resultados de aprendizaje

Conocimientos

- Conocer las definiciones de parámetro temporal, coordenadas generalizadas y grados de libertad (3.1.3, 3.2.2)
- Conocer las definiciones de momento generalizado, velocidad generalizada, Lagragiano y Hamiltoniano (3.1.2, 3.2.2)
- Saber establecer las ligaduras de un sistema (3.1.2, 3.2.2)
- Conocer el significado de espacio de configuración y de espacio de fases (3.1.2)
- Conocer el significado de variables canónicas (3.2.4)
- Conocer las definiciones de coordenada cíclica, integral primera y cantidad conservada (3.5)
- Conocer la aplicación de la notación matricial y tensorial (3.10.1)
- Conocer las propiedades matemáticas básicas de la transformación de Legendre (3.9)
- Conocer los aspectos básicos de la geometría simpléctica (3.11.1)

Aplicación teórica

- Saber relacionar las ecuaciones de Euler-Lagrange con las ecuaciones de Hamilton (3.3.1)
- Saber aplicar la formulación de Hamilton para el Hamiltoniano $H(q,p,t)$ y para la función $G(\dot{q},\dot{p},t)$ (3.3.1, 3.6.4)
- Saber determinar el Hamiltoniano $H(x,p)$ a partir de la ley de movimiento, o en su caso de la ecuación de movimiento (3.6.6, 3.7.1)
- Saber determinar el nuevo Lagrangiano y el nuevo Hamiltoniano bajo una transformación de coordenadas (3.8.1)
- Saber interpretar el movimiento periódico dentro del formalismo Hamiltoniano (3.7.2)
- Saber obtener constantes del movimiento sin conocer previamente la solución al movimiento (3.7.3)

Aplicación práctica

- Obtener los momentos en función de las velocidades generalizadas, y viceversa (3.8.2, 3.6.1)
- Aplicar la transformación de Legendre entre el Hamiltoniano y el Lagragiano (3.6.1, 3.6.2, 3.6.3)
- Obtener la ley de movimiento integrando las ecuaciones de Hamilton (3.8.2)
- Determinar si un Hamiltoniano es constante del movimiento, y si coincide con la energía (mecánica) (3.6.3, 2.6.1)
- Expresar la ley de movimiento en función del conjunto de constantes del movimiento independientes del sistema (3.6.5, 3.7.3)
- Obtener el Hamiltoniano de una partícula en un campo electromagnético a partir del Lagrangiano (3.6.8)

Habilidades matemáticas

- Obtener a partir de un Lagragiano dado un Lagrangiano equivalente (3.6.2)
- Obtener por cuadratura la solución de una ecuacion diferencial de primer orden (3.6.3, 3.7.2)
- Obtener las constantes de movimiento independientes de un sistema (3.6.5)

Lectura adicional recomendada

- 3.5.1: Metodo de Routh, 3.5.2: ejemplos del método de Routh
- 3.6.7: Sistema en rotación uniforme
- 3.7.4: Partícula libre con variable temporal
- 3.9.2: Transformación geométrica de Legendre
- Apéndice 3.11: Geometría simpléctica
- Apéndice 3.12: Hamiltonianos singulares
- Apéndice 3.13: Cálculo numérico y simbólico

Transformaciones canónicas y Corchetes de Poisson (capítulo 4)

Teoría

- Definición de transformación canónica 4.1
- Ecuaciones de la transformación canónica 4.2
- Tipos de transformaciones canónicas 4.3
- Transformaciones canónicas infinitesimales. Generadores 4.4
- Corchetes de Poisson, 4.6
- Aplicaciones. Sistemas integrables 4.10
- Apéndice A. Condiciones que aseguran la transformación canónica 4.12

Ejercicios prácticos

Transformaciones canónicas

- 4.5.1: Transformación canónica asociada al cambio de Lagrangiano
- 4.5.2: Transformación canónica con propiedad de simetría
- Autoevaluación 4.9.2: Transformación canónica dependiente del tiempo
- 4.5.3: Transformación canónica independiente del tiempo
- 4.5.5: Transformación canónica para sistema disipativo
- 4.5.7: Transformación canónica en términos de la diferencial exacta
- 4.5.8: Partícula en campo gravitatorio uniforme
- Autoevaluación 4.8.3: Transformación canónica para movimiento en caída libre

Corchetes de Poisson

- 4.7.2: Cantidades conservadas para Hamiltoniano bidimensional
- 4.7.9: Ley de movimiento en función de corchetes de Poisson
- 4.7.7: Hamiltoniano con simetría de escala
- Autoevaluación 4.9.1: Transformación infinitesimal en serie de potencias
- Autoevaluación 4.9.4: Hamiltoniano del oscilador armónico en variables a, a^*
- 4.7.10: Corchetes de Poisson para partícula en campo magnético

Miscelánea

- 4.7.3: Transformación canónica de distintos tipos
- 4.7.1: Invariancia del corchete de Poisson frente a transformaciones canónicas
- 4.5.10: Transformación canónica paramétrica para oscilador armónico

Cuestionarios en línea

- 4.9.7: Transformaciones canónicas
- 4.9.8: Corchetes de Poisson

Resultados de aprendizaje

Conocimientos

- Conocer el concepto de transformación admisible en el espacio de configuración y en el espacio de fases (4.1.1)
- Conocer la definición de transformación canónica en el espacio de fases (4.1.2)
- Conocer el significado de transformación canónica infinitesimal, y de su generador (4.4)
- Conocer la definición del corchete de Poisson y sus propiedades elementales (4.6.1)
- Conocer la definición de cantidad dinámica (4.6.2)
- Conocer el significado de la transformación canónica infinitesimal para la traslación temporal (4.6.5)
- Conocer el significado de invariante bajo una transformación canónica (4.8.2, 4.7.1)
- Conocer el teorema de Liouville sobre integrabilidad (4.10.1, 4.10.2)
- Conocer el teorema de Bertrand-Darboux sobre superintegrabilidad (4.10.3)

Aplicación teórica

- Obtener las ecuaciones de transformación de una transformación canónica arbitraria (4.2)
- Saber elegir el tipo correcto de transformación canónica en función de las ecuaciones de transformación de las variables canónicas (4.3.5)
- Obtener la ecuación de transformación para una transformación canónica infinitesimal en términos de su generador (4.4.2)
- Saber aplicar las condiciones apropiadas que aseguran que una transformación arbitraria en el espacio de fases es una transformación canónica (4.12, 4.5.7, 4.5.9)

- Saber demostrar que el corchete de Poisson es un invariante bajo la transformaciones canónicas, utilizando el método más apropiado en cada caso (4.7.1)
- Obtener las leyes del movimiento de un sistema en términos de los corchetes de Poisson (4.6.3)
- Obtener la ecuación evolución de una cantidad dinámica en términos de los corchetes de Poisson (4.6.2)
- Identificar las constantes de movimiento independientes del tiempo en términos de los corchetes de Poisson (4.6.2)
- Obtener la ecuación de la transformación canónica infinitesimal de una cantidad dinámica en términos de los corchetes de Poisson (4.6.4)
- Relacionar las propiedades de simetría de un sistema bajo una transformación canónica infinitesimal con las cantidades conservadas (4.6.6)
- Obtener la ley de transformación del Hamiltoniano para una transformación canónica infinitesimal (4.6.5)

Aplicación práctica

- Obtener las ecuaciones de transformación de las transformaciones canónicas de los cuatro tipos (4.3)
- Obtener las leyes de conservación del momento lineal y del momento angular aplicando la simetría bajo una transformación canónica infinitesimal (4.6.6)
- Obtener la expresión de la transformación canónica identidad, y de la transformación canónica asociada a una transformación puntual (4.3.5)
- Aplicar una transformación canónica al oscilador armónico para su descripción dinámica en variables acción-ángulo (4.3.6)
- Obtener la transformación canónica asociada a un cambio de Lagrangiano (4.5.1)
- Utilizar propiedades generales para definir la transformación canónica más apropiada que simplifica el análisis del problema (4.5.2, 4.5.4, 4.5.10, 4.7.3, 4.8.3)
- Aplicar las propiedades de los corchetes de Poisson para evaluar la conservación en el tiempo de cantidades dinámicas (4.7.2, 4.7.6, 4.7.7)
- Aplicar las propiedades de los corchetes de Poisson y la notación tensorial para evaluar ejemplos típicos de corchetes de Poisson (4.7, 4.7.10)
- Aplicar los teoremas de Liouville y de Bertrand-Darboux para analizar la integrabilidad de sistemas sencillos (4.11.3)

Habilidades matemáticas

- Saber aplicar la transformación de Legendre para relacionar entre sí los distintos tipos de transformaciones canónicas (4.1.2, 4.3)
- Saber aplicar la notación tensorial para evaluar ejemplos típicos de corchetes de Poisson (4.7)

Lectura adicional recomendada

- 4.5.6: Transformación canónica para sistema bidimensional. Invariantes
- 4.7.4: Propiedad cíclica del corchete de Poisson
- Apéndice 4.13: Generadores de simetría
- 6.7: Ejercicios resueltos de sistemas integrables y superintegrables

Ecuación de Hamilton−Jacobi (capítulo 5)

Teoría

- Ecuación de Hamilton−Jacobi. Función principal 5.1
- Ejemplo detallado. Oscilador armónico 5.2
- Separación de variables 5.3
- Variables de acción−ángulo 5.6

Ejercicios prácticos

Ecuación de Hamilton−Jacobi

- 5.4.1: Función principal para la partícula libre
- 5.4.4: Ecuación de Hamilton−Jacobi para partícula en campo gravitatorio
- 5.4.8: Función principal S para partícula libre relativista
- 5.4.9: Función principal S para partícula en potencial unidimensional
- Autoevaluación 5.8.1: Proyectil cerca de la superficie terrestre
- 5.4.5: Expresión de la energía en función de las coordenadas y el tiempo
- 5.4.11: Partícula en curva bidimesional paramétrica
- Autoevaluación 5.8.4: Corrección relativista al período del oscilador

Separabilidad de la ecuación de Hamilton−Jacobi

- 5.4.10: Ecuación de Hamilton−Jacobi en coordenadas cilíndricas
- 5.5.1: Separabilidad para la partícula libre en el plano
- Autoevaluación 5.8.3: Problema relativista de Kepler
- 5.5.2: Hamiltoniano para sistema bidimensional

Variables acción−ángulo

- 5.7.3: Pozo infinito bidimensional
- 5.7.4: Oscilador isótropo tridimensional en coordenadas cartesianas
- 5.7.9: Péndulo doble con masa móvil

Cuestionarios en línea

- 5.8.6: Hamiltoniano del sistema a partir de la función principal S
- 5.8.7: Ecuación de movimiento a partir de la función principal S
- 5.8.8: Apéndice. Soluciones separables

Resultados de aprendizaje

Conocimientos

- Conocer el significado de la transformación canónica fundamental (5.1.1)
- Conocer los fundamentos de la teoría de Hamilton−Jacobi (5.1.1)
- Conocer el significado matemático de la función principal y de la función característica de Hamilton (5.1.3, 5.1.5)
- Conocer el significado físico de la función principal (5.1.4)
- Conocer los fundamentos de la separabilidad de la ecuación de Hamilton−Jacobi (5.2, 5.3)
- Conocer el significado de las variables acción−ángulo (5.6.1)
- Conocer los fundamentos básicos de la aplicación del método de las variables acción−ángulo a sistemas multiperiódicos arbitrarios (5.6.3)

Aplicación teórica

- Saber aplicar de forma general el método de separación de variables para la resolución de la ecuación de Hamilton−Jacobi (5.3)
- Obtener la ley de movimiento de un sistema con la resolución de la ecuación de Hamilton−Jacobi correspondiente (5.1.3)
- Saber aplicar el criterio de separabilidad de Levi−Civita (5.10.1)
- Saber aplicar el método de las variables acción−ángulo a un movimiento unidimensional periódico arbitrario (5.6.2)

Aplicación práctica

- Obtener la ley de movimiento de un sistema con la resolución de la ecuación de Hamilton−Jacobi correspondiente (5.2, 5.4.1, 5.4.2, 5.4.4, 5.4.8, 5.4.11, 5.8.1, 5.8.3)
- Aplicar el método de separación de variables para resolver la ecuación de Hamilton−Jacobi (5.2, 5.4.1, 5.4.2, 5.4.4, 5.4.8, 5.4.9, 5.4.10,5.5.1, 5.8.3, 5.5.2)
- Identificar correctamente el significado físico de las constantes de separación de la ecuación de Hamilton−Jacobi (5.2, 5.4.1, 5.4.2, 5.4.4, 5.4.8, 5.4.9, 5.4.10,5.5.1)
- Analizar el oscilador armónico unidimensional por el método de las variables acción−ángulo (5.6.2)
- Analizar un movimiento multiperiódico particular por el método de las variables acción−ángulo (5.7.2, 5.7.3, 5.7.4)

Habilidades matemáticas

- Saber aplicar el método de separación de variables para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales (5.3)

Lectura adicional recomendada

- 5.4.7: Ecuación de Hamilton−Jacobi para oscilador isótropo tridimensional
- 5.5: Ejercicios adicionales de sistemas separables
- 5.7.8: Oscilador armónico de frecuencia variable
- 5.9: Ejercicios adicionales de autoevaluación
- Apéndice 5.11: Separabilidad y superintegrabilidad
- Apéndice 5.12: Acción en Mecánica Cuántica

II - Teorema de Liouville. Invariantes integrales y adiabáticos

Teorema de Liouville (capítulo 6)

Teoría

- Espacio de fases. Tipos de descripción 6.1
- Colectividad estadística 6.2
- Conservación de la probabilidad. Ecuación de continuidad 6.3
- Teorema de Liouville 6.4
- Flujo Hamiltoniano en el espacio de fases 6.6
- Teoría del campo medio 6.8

Ejercicios prácticos

- 6.7.1: Espacio de fases del péndulo simple
- 6.7.2: Sistema de partículas libres en una dimensión
- 6.7.3: Sistema de partículas en campo gravitatorio
- Autoevaluación 6.10.1: Partículas en movimiento vertical en campo gravitatorio
- 6.7.4: Densidad de estados en función del tiempo
- 6.7.6: Dinámica de partículas en espacio de fases
- 6.7.7: Dinámica en el espacio de fases en presencia de una fuerza externa no conservativa
- 6.10.2: Dinámica disipativa en el espacio de fases
- 6.9.3: Teorema H para la ecuación de Boltzmann
- 6.9.5: Hamiltoniano de dos cuerpos y su aproximación de campo medio
- Autoevaluación 6.9.6: Teorema H para la ecuación de Kramers (sólo apartados a y b)

Cuestionarios en línea

- 6.10.4: Teorema de Liouville
- 6.10.5: Teoría del campo medio

Resultados de aprendizaje

Conocimientos

- Conocer los distintos tipos de descripción dinámica en el espacio de fases (6.1)
- Conocer el significado de colectividad estadística y densidad de probabilidad en el espacio de fases (6.2)
- Conocer los fundamentos de la conservación de la probabilidad en el espacio de fases (6.3)
- Conocer el significado del teorema de Liouville y su efecto sobre la dinámica en el espacio de fases (6.4)
- Conocer el significado de densidad de estados, y su valor en el equilibrio (6.4)
- Conocer los conceptos de colectividad microcanónica y ergodicidad (6.5)
- Conocer las principales características del flujo Hamiltoniano en el espacio de fases (6.6)
- Conocer los fundamentos de la teoría del campo medio en el espacio de fases (6.8)
- Conocer el significado de espacio de fases extendido (6.6.4)

Aplicación teórica

- Saber obtener la ecuación de continuidad para la densidad de probabilidad en el espacio de fases (6.3)
- Saber deducir el teorema de Liouville en un espacio de fases arbitrario (6.4)
- Saber deducir la densidad de estados en un instante dado a partir de la densidad en el instante inicial (6.4)
- Saber deducir el valor de la densidad de estados en el equilibrio (6.4)
- Saber analizar el efecto de una reparametrización temporal en el espacio de fases (6.6)
- Saber justificar la reversibilidad de la dinámica Hamiltoniana en el espacio de fases para un sistema arbitrario (6.6)
- Saber analizar la dinámica en el espacio de fases utilizando el espacio de fases extendido (6.6.4)
- Saber definir la densidad de la partícula en un campo medio (6.8)
- Saber enunciar e interpretar el teorema H para una ecuación de campo medio (6.8.4)
- Saber enunciar e interpretar la condición de consistencia para una ecuación de campo medio (6.8.4)

Aplicación práctica

- Describir el espacio de fases de un péndulo simple (6.7.1)
- Analizar la dinámica de un sistema de partículas en el espacio de fases (6.7.2, 6.7.3, 6.7.6, 6.10.1)
- Comprobar el teorema de Liouville en el espacio de fases (6.7.2, 6.7.3, 6.7.6, 6.7.7), 6.10.2)
- Obtener la densidad de estados en el espacio de fases en función del tiempo (6.7.6, 6.7.7), 6.7.4, 6.10.2)
- Comprobar el teorema H para una ecuación de campo medio particular (6.9.3, 6.9.6)

- Deducir a partir del teorema H la densidad de la partícula en el equilibrio en un campo medio, e interpretar su significado físico (6.9.3, 6.9.6)
- Deducir la expresión analítica del potencial promedio de interacción aplicando la condición de consistencia del campo medio (6.9.5)

Habilidades matemáticas

- Cálculo estadístico y geométrico en el espacio de fases (6.1, 6.2, 6.5, 6.8, 6.7.6, 6.10.1)

Lectura adicional recomendada

- Apéndice 6.11: Billares mecánicos

Invariantes integrales (capítulo 7)

Teoría

- Introducción 7.1
- Definición de invariante integral 7.2
- Invariante de acción 7.3
- Otros invariantes 7.4

Ejercicios prácticos

- 7.5.1: Integral de Poincaré−Cartan
- Autoevaluación 7.6.1: Teorema de Lee Hwa-Chung

Cuestionarios en línea

- 7.6.2: Invariantes integrales

Resultados de aprendizaje

Conocimientos

- Conocer el significado de tubo de trayectorias en el espacio de fases extendido y conocer su parametrización (7.1)
- Conocer los fundamentos de la variación de la acción sobre contornos en el espacio de fases extendido (7.1)
- Conocer los tipos de invariantes integrales, su significado y su interrelación (7.5.1)
- Conocer el invariante de Poincaré−Cartan y su significado (7.5.1)

Aplicación teórica

- Saber analizar el invariante de Poincaré−Cartan en los casos generales (7.2.1)
- Saber deducir el teorema de Liouville del invariante de Poincaré−Cartan (7.3)

Aplicación práctica

- Obtener las trayectorias reales en el espacio de fases utilizando el invariante de Poincaré−Cartan en el espacio de fases extendido (7.5.1)
- Relacionar el invariante universal de primer orden con la variable de acción (Teorema de Lee Hwa-Chung, 7.6.1)

Habilidades matemáticas

- Integración sobre contornos en el espacio de fases extendido (7.1)

Lectura adicional recomendada

- Pendiente.

Invariantes adiabáticos (capítulo 8)

Teoría

- Definición de invariante adiabático 8.1
- Condición de invariancia adiabática 8.2
- Invariantes adiabáticos y el teorema de Liouville 8.3
- Ejemplo detallado. Oscilador armónico 8.4

Ejercicios prácticos

- 8.5.1: Partícula en colisión con paredes móviles
- 8.5.4: Partícula con rebotes sucesivos sobre el suelo
- Autoevaluación 8.7.1: Invariante adiabático para la colisión elástica de dos masas
- Autoevaluación 8.7.3: Partícula con variación lenta de masa
- 8.5.2: Invariante adiabático para oscilador armónico unidimensional
- 8.5.3: Invariante exacto para el oscilador armónico unidimensional
- 8.5.5: Péndulo doble con masa móvil
- 8.5.7: Partícula cargada en campo magnético uniforme
- Autoevaluación 8.7.2: Péndulo simple con longitud de variación lenta

Cuestionarios en línea

- 8.7.5: Invariantes adiabáticos

Resultados de aprendizaje

Conocimientos

- Conocer el significado de parámetro del sistema de variación lenta (8.1)
- Conocer el concepto de invariante adiabático y su significado físico (8.1)
- Conocer la relación entre el invariante adiabático y el teorema de Liouville (8.3)

Aplicación teórica

- Saber establecer la condición de invariancia adiabatica para un sistema arbitrario (8.2)
- Saber analizar la dinámica general del movimiento aplicando la conservación del invariante adiabático (8.2, 8.3)

Aplicación práctica

- Establecer la condición de invariancia adiabatica para el oscilador armónico (8.4)
- Aplicar la aproximación adiabática a un sistema arbitrario seleccionando correctamente el intervalo temporal de integración (8.4, 8.5.1, 8.5.2, 8.5.3)
- Deducir la dinámica particular del movimiento a partir de la expresión del invariante adiabático (8.5.1, 8.5.4, 8.5.7)
- Deducir la ley de movimiento de un sistema aplicando la aproximación adiabática (8.7.1, 8.7.2)

Habilidades matemáticas

- Desarrollo de promedios temporales y cálculos aproximados (8.4, 8.4.3, 8.5.2, 8.5.3, 8.5.4)
- Aplicación del teorema del virial (8.4)

Lectura adicional recomendada

- 8.5.8: Partícula en el interior de cavidades especulares
- 8.5.9: Movimiento adiabático en cavidad especular
- **??**: Tiempo mínimo de escape en cavidad especular. Pendiente
- Apéndice 8.8: Integración numérica en cavidad especular
- Apéndice **??**: Pozos de potencial. Pendiente
- Apéndice **??**: Teoría de la dispersión. Pendiente
- Apéndice 8.9: Integración numérica en el regimen adiabático
- Apéndice **??**: Dinámica Hamiltoniana ultrarrápida. Pendiente

III - Medios continuos

Formulación Lagrangiana de los medios continuos (capítulo 9)

Teoría

- Límite al continuo 9.1
- Densidad Lagrangiana 9.2
- Teorema de Noether. Cantidades conservadas 9.3
- Modelos no lineales. Solitones 9.6

Ejercicios prácticos

- 9.4.1: Cuerda elástica masiva con tensión
- 9.4.2: Conservación del momento lineal para el medio continuo
- 9.4.3: Perturbación del medio elástico en forma de onda viajera
- Autoevaluación 9.5.3: Coordenada cíclica para perturbación en cuerda uniforme
- 9.4.11: Soluciones de onda viajera
- 9.4.4: Medio elástico con tensión dependiente de la coordenada
- Autoevaluación 9.4.5: Cuerda vertical pesada
- Autoevaluación 9.4.10: Sistema mecánico cerrado
- 9.4.6: Medio elastico no lineal
- 9.7.1: Familia paramétrica de soluciones para ecuación KdV.
- 9.7.5: Cantidades conservadas para ecuación KdV (sólo apartado a)
- Autoevaluación 9.7.2: Soluciones tipo onda viajera para condiciones frontera seleccionadas (sólo apartados a y b).

Cuestionarios en línea

Medios continuos

- 9.5.5: Límite del continuo
- 9.5.6: Densidad Lagrangiana
- 9.5.7: Relaciones de dispersión
- 9.5.8: Densidad Hamiltoniana
- 9.9.2: Cantidades conservadas del medio continuo

Medios no lineales

- 9.9.1: Ecuaciones del movimiento
- 9.9.2: Cantidades conservadas
- 9.9.3: Teoría de campo

Resultados de aprendizaje

Conocimientos

- Conocer los fundamentos de la aplicación del límite al continuo de un sistema mecánico discreto (9.1)
- Conocer las diferencias y similitudes de las oscilaciones transversales y longitudinales en un medio continuo (9.1)
- Conocer los fundamentos del formalismo Lagrangiano de un medio continuo (9.2.1)
- Conocer el concepto de densidad de momento y densidad Hamiltoniana de un medio continuo, y su significado físico (9.2.3)
- Conocer la relación entre las propiedades de simetria de un medio continuo y las leyes de conservación del movimiento (teorema de Noether, 9.3.3)
- Conocer el significado y contenido de una ley de conservación en un medio continuo (9.3.4)
- Conocer las distintas velocidades características de propagación en un medio continuo (9.4.3, 9.6.1)
- Conocer las principales características de las ondas solitarias en medios no lineales (9.6.1)
- Conocer las principales propiedades de la ecuación KdV en medios no lineales, y sus cantidades conservadas (9.6.1, 9.7.5)
- Conocer los fundamentos matemáticos generales para obtener soluciones de onda de $1-$soliton en medios no lineales (9.6.2
- Conocer el modelo mecánico que subyace en la ecuación de seno$-$Gordon (9.6.3) , 9.6.3)
- Conocer el concepto de $1-$soliton y $1-$kink(antikink) y sus principales características (9.6.2, 9.6.3)

Aplicación teórica

- Saber deducir la expresión general de las ecuaciones de Euler-Lagrange del movimiento en un medio continuo (9.2.2)
- Saber aplicar el teorema de Noether para el medio continuo general para obtener las leyes de conservación del movimiento (9.3.3)
- Saber obtener las soluciones generales de onda viajera para la ecuación KdV (9.6.2)
- Saber obtener las soluciones generales de onda viajera para la ecuación de seno$-$Gordon (9.6.3)

Aplicación práctica

- Aplicar el teorema de Noether a un cuerda homogénea con masa (9.3.4)
- Analizar el principio de conservación de la energía y del momento en un medio continuo particular (9.4.1, 9.4.2, 9.4.3, 9.4.4)
- Analizar la existencia de soluciones de onda viajera en un medio continuo (9.4.1, 9.4.3, 9.4.5, 9.4.11, 9.7.1, 9.7.2)
- Analizar la conservación de cantidades dinámicas adicionales para un medio continuo particular (9.4.2, 9.4.6, 9.4.10, 9.5.3, 9.7.5)
- Analizar las principales características físicas de las soluciones de $1-$soliton y $1-$kink(antikink) a partir de sus expresiones matemáticas (9.6.2, 9.6.3)
- Comprobar matemáticamente la conservación de la distintas cantidades dinámicas asociadas a la ecuación KdV (9.7.5)
- Analizar la conservación del volumen, el momento y la energía de la solución general de la ecuación KdV (9.7.5)

Habilidades matemáticas

- Aplicación general del teorema de Noether para obtener las leyes de conservación del movimiento de un sistema dinámico relacionadas con sus propiedades de simetría (9.3.3, 9.3.4, 9.4.1, 9.4.4)
- Análisis de las distintas configuraciones frontera posibles para ecuaciones de onda en medios no lineales (9.6.1, 9.6.2, 9.6.3)

Lectura adicional recomendada

- 9.4.7: Densidad Lagrangiana dependiente de derivadas superiores
- 9.4.9: Deflexión lateral de una viga unidimensional
- 9.4.8: Perturbación del medio continuo en forma de campo escalar
- 9.7.3, 9.7.4: Cotas de energía para ondas viajeras
- Apéndice **??**: Formulación Hamiltoniana de los medios continuos
- capítulo 10: Teoría clásica de campos

0 - Formalismo Lagrangiano de la Mecánica

Capítulo 1

Principio de D'Alembert

1.1. Principio estático del trabajo virtual

1.1.1. Estado de equilibrio en la Mecánica Newtoniana

La Mecánica Newtoniana centra su estudio en la partícula material aislada que se encuentra sometida a un conjunto de fuerzas dadas. En su análisis substituye las ligaduras que limitan el movimiento de la partícula por un conjunto de fuerzas de ligadura, e introduce el *estado de equilibrio* de la partícula cuando la fuerza neta que actúa sobre ella es nula.
Este formalismo no resulta aplicable para los cuerpos continuos, dado que están formados por una infinidad de partículas, sometidas a una infinidad de fuerzas de ligadura y el cálculo completo se hace inabordable. En su lugar, se prescinde de las fuerzas de ligadura y se estudia únicamente el movimiento del cuerpo compatible con las condiciones de ligadura. Por ejemplo, en el caso del sólido rígido se considera que gira y se traslada como un todo respecto a su centro de masa. Desaparecen así las coordenadas de las partículas individuales, y nos quedamos con las coordenadas del centro de masas, y las coordenadas angulares de la rotación respecto al centro de masas.
Podemos decir así que el movimiento de las partículas individuales ha sido integrado de forma previa para poder analizar el movimiento del sólido. En este sentido el número de ecuaciones del movimiento necesarias es mucho menor que el numero de partículas del sistema, pero siempre será igual al número de grados de libertad que caracterizan macroscópicamente al sistema. En todo caso, son las *Leyes de Newton* las que determinan las ecuaciones de movimiento tanto de la partícula material como del sólido rígido, tomando como estado de referencia su estado de equilibrio.

1.1.2. Trabajo virtual

Para profundizar en la fundamentación mecánica general del movimiento debemos salirnos del formalismo puramente Newtoniano. Consideremos un sistema con n particulas, que en el tiempo inicial se encuentra en su estado de equilibrio. El denominado *Principio del trabajo virtual* establece que:

> en el estado de equilibrio del sistema, en cada punto material el trabajo realizado por las fuerzas externas (esto es, fuerzas que no derivan de ninguna ligadura) durante un *desplazamiento virtual* es nulo (al ser nulas las fuerzas externas en el equilibrio). La denominación *virtual* se refiere a cada desplazamiento arbitrario del sistema que sea compatible con las ligaduras y que sea *estático*, esto es, bajo el cual no cambian las fuerzas (como si fijaramos un instante de tiempo dado).

Aplicando este Principio a nuestro sistema de partículas en equilibrio, se satisface

$$\delta W \equiv \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1.1.1}$$

donde $\boldsymbol{F}_i$ es el conjunto de las fuerzas externas aplicadas a la partícula material puntual $i-$ésima.

Sistema sin ligaduras Comprobamos directamente el resultado esperado en este caso: cuando el sistema no tiene ninguna ligadura todos sus desplazamientos virtuales $\delta \boldsymbol{r}_i$ son totalmente arbitrarios, y la única solución de la condición anterior $\delta W = 0$ es $\boldsymbol{F}_i = 0$ para todo i. Es decir, en el estado de equilibrio de un sistema sin ligaduras la fuerza externa neta es nula sobre todos los puntos materiales del sistema.

Sistema con ligaduras Por otro lado, en el caso de que el sistema de las n partículas tenga, digamos m ligaduras, y por tanto se mueva en el espacio de configuración de las coordenadas sobre una superficie $(n-m)-$dimensional, la condición $\delta W = 0$ no da lugar a que todas las fuerzas externas sean nulas, ya que existe ahora una dependencia explícita entre un subconjunto de desplazamientos virtuales, limitados por las ligaduras. En su lugar, la condición que se obtiene es sean nulas las fuerzas externas en la dirección tangente a la superficie del movimiento. Y a cambio no se obtiene ninguna ecuación que determine la fuerza de ligadura puesto que éstas no están formalmente introducidas en el problema. Lo comprobamos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo bidimensional Consideremos un sistema bidimensional en coordenadas cartesianas (x, y) y con la ligadura $x^2 + y^2 = \ell^2$, que realiza su movimiento sobre la circunferencia de radio ℓ. La condición de trabajo virtual nulo en el equilibrio sobre la circunferencia nos permite obtener las condiciones aplicables sobre las fuerzas externas en ese estado del sistema. En este caso, tenemos

$$\delta W = F_x \delta x + F_y \delta_y = 0 \tag{1.1.2}$$

Los dos desplazamientos virtuales $(\delta x, \delta y)$ no pueden ser arbitrarios ya que deben ser son compatibles con la ligadura, y por tanto se satisface la siguiente relación entre ellos

$$\delta\left(x^2 + y^2\right) = \delta \ell^2 = 0 \Rightarrow 2x\delta x + 2y\delta y = 0 \;\rightarrow\; \delta y = -\frac{x}{y}\delta x \tag{1.1.3}$$

La condición de equilibrio se escribe ahora

$$\delta W = \left(yF_x - xF_y\right)\delta x = 0 \tag{1.1.4}$$

y dado que al menos uno de los desplazamientos, digamos δx, sí es completamente arbitrario, se deduce la condición para la fuerza externa neta $\boldsymbol{F} \equiv (F_x, F_y)$ en el equilibrio

$$yF_x - xF_y = 0 \rightarrow \frac{F_y}{F_x} = \frac{y}{x} \tag{1.1.5}$$

que en forma vectorial equivale a

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t} = 0 \tag{1.1.6}$$

siendo $\boldsymbol{t} = \frac{1}{\ell}(-y, x)$ el vector unitario ($\boldsymbol{t}^2 = 1$) en la dirección tangente a la circunferencia. Por tanto, la condición de equilibrio del sistema exige que la fuerza neta sobre la circunferencia sea nula. Nada se dice sobre la fuerza de ligadura, que será perpendicular a la misma. Pero podemos calcularla de forma explícita tomando la fuerza externa en la dirección perpendicular a la superficie, que será por definición

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{\ell}\left(xF_x + yF_y\right) \tag{1.1.7}$$

siendo $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\ell}(x, y)$ el vector unitario en la dirección perpendicular a la circunferencia. Utilizando de nuevo la condición de equilibrio, podemos obtener el valor F_n de forma explícita

$$F_n \equiv \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{\ell}\left(xF_x + \frac{y^2}{x}F_x\right) = \frac{\ell}{x}F_x \neq 0 \tag{1.1.8}$$

Dado que el sistema material se mantiene sobre la circunferencia, y la componente normal de la fuerza externa es distinta de cero, necesariamente debe existir una fuerza de ligadura, digamos λ en dirección perpendicular a la circunferencia que se equilibre con F_n en la forma

$$\lambda + F_n = 0 \rightarrow \lambda = -F_n \tag{1.1.9}$$

Fuerzas de ligadura Quedaría por comprobar que la introducción de las fuerza de ligadura en el trabajo virtual no modifica la conclusión obtenida anteriormente para el estado de equilibrio del sistema. La demostración es directa, ya que en presencia de una ligadura $\boldsymbol{\lambda}_i$ en cada punto material, la condición de equilibrio se reescribiría $\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{\lambda}_i = 0$, y con ello al ser nulo el trabajo virtual de las fuerzas externas, también lo será el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura

$$0 = \delta W = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{\lambda}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1.1.10}$$

Esta condición se satisface idénticamente al estar aplicadas las fuerzas de ligaduras siempre perpendicularmente a la superficie que delimitan las ligaduras (la circunferencia en el ejemplo anterior), y siendo los desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras paralelos a la superficie.

Energía potencial mínima Adicionalmente, en el caso de que las fuerzas externas sean derivables de un potencial V, esto es, para $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$, el principio del trabajo virtual se expresa como un principio de energía potencial estacionaria

$$0 = \delta W \equiv \boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r} = -\boldsymbol{\nabla} V \cdot \delta \boldsymbol{r} \equiv -\delta V \;\Rightarrow\; \delta V = 0 \tag{1.1.11}$$

1.2. Principio dinámico de D'Alembert

1.2.1. Definición

Hasta ahora hemos analizado el principio del trabajo virtual en su versión estática, relacionado con la condición de equilibrio de un sistema. D'Alembert supo trasladar la aplicabilidad de este Principio al ámbito de la Dinámica, dando una interpretación a la denominada fuerza de inercia, resultado clave para el posterior desarrollo de los métodos variacionales en la Mecánica. A partir de la ley de Newton $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, D'Alembert escribe la igualdad

$$\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a} = 0 \tag{1.2.1}$$

y define $\boldsymbol{I} \equiv -m\boldsymbol{a}$ como la fuerza creada por el movimiento, de forma que la ley de Newton se escribe

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{I} = 0 \tag{1.2.2}$$

De esta forma, el llamado principio del trabajo virtual en su versión dinámica, o simplemente *Principio de D'Alembert*, establece que

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{I}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1.2.3}$$

1.2.2. Propiedades

La trascendencia que adquiere el avance de D'Alembert para la Mecánica no se debe sólo a que su enfoque sea una extensión de la ley de Newton, ya que establece un principio sobre el que fundamentar la dinámica: al añadir la fuerza de inercia a las fuerzas externas, la dinámica del sistema se reduce a su estática de equilibrio, y en particular los principios variacionales aplicados en la estática (p.e. principio de energía potencial mínima) tienen una extensión natural en su aplicación a la dinámica. Esto es posible por tres características dinámicas fundamentales:

- En general cualquier movimiento es relativo, ya que siempre puede elegirse un sistema de coordenadas móvil respecto al cual el sistema está en reposo, luego movimiento y equilibrio no son conceptos tan diferentes entre sí.

- El Principio de D'Alembert se centra únicamente en las fuerzas, no en el propio movimiento, y además su concepto de equilibrio de fuerzas es independiente del estado del movimiento del sistema.
- Finalmente, su objeto es el trabajo virtual, por lo que quedan implicados los desplazamientos virtuales definidos en un tiempo concreto, y no a los desplazamientos reales. Por definición, en este tiempo dado el movimiento del sistema es irrelevante, y por tanto el principio es igualmente aplicable tanto a cuerpos en movimiento como en reposo.

En general, si tenemos un conjunto de fuerzas externas aplicadas a un sistema material, no tendremos un sistema en equilibrio ya que el trabajo virtual de este conjunto de fuerzas no tiene por qué ser nulo. Pero sí será el *movimiento* del sistema el que produzca la transición al estado de equilibrio, ya que generan en el cuerpo las fuerzas de inercia que equilibran las fuerzas externas. De esta forma, el principio de D'Alembert es aplicable a cualquier sistema mećanico arbitrario, de forma tal que las ecuaciones de equilibrio se transforman en verdaderas *ecuaciones de movimiento*.

1.2.3. Notas finales

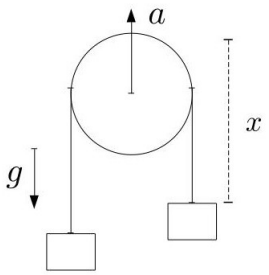
El Principio de D'Alembert permite obtener las ecuaciones de movimiento de cualquier sistema mecánico, y de esta forma cualquier principio de la Mecánica será una mera reformulación matemática del mismo. Su versión más completa, el denominado *Principio de Hamilton*, se deduce del Principio de D'Alembert aplicando una transformación matemática, por lo que su uso de hecho está restringido a sistemas con las denominadas *ligaduras integrables* (sistemas holonómicos). A diferencia de éste, el Principio de D'Alembert al ser más básico conceptualmente no tiene esta limitación, y puede utilizarse en los sistemas no holonómicos también. No obstante, su mayor desventaja es que las fuerzas de inercia en general no son derivables de una función escalar, como lo son las fuerzas conservativas, y en consecuencia el trabajo virtual no puede expresarse como la variación de una función escalar, como se produciría en el caso del equilibrio estático $\delta W = -\delta V$. Se hace especialmente inadecuado cuando se utilizan coordenadas curvilineas dado que en estos sistemas los gradientes (a través del operador $\boldsymbol{\nabla}$) tienen factores dependientes de las coordenadas que multiplican las derivadas respecto a las coordenadas.
No obstante, su aplicación es particularmente útil en los siguientes casos:

- Cuando se utilicen coordenadas cartesianas para la descripción del sistema, o pueda utilizarse una descripción vectorial del movimiento independiente de las coordenadas como en el caso de la conservación de la energía que veremos como uno de los ejemplos a continuación.
- Cuando se utilicen *variables cinemáticas*, esto es, variables que describen el movimiento pero no son directamente derivables de las coordenadas del movimiento. El ejemplo más típico es la velocidad angular de giro en el movimiento general de un sólido rígido, ya que, por ser móvil el eje de giro, no puede definirse un único ángulo cuya derivada respecto al tiempo represente esta velocidad angular. En este caso además puede utilizarse una representación vectorial del movimiento lo que facilita el uso del Principio de D'Alembert como indica el punto anterior.
- No menos importante, el Principio de D'Alembert establece de forma indirecta la relatividad del movimiento explicando la existencia de las denominadas *fuerzas aparentes*, de naturaleza Newtoniana, que surgen cuando se estudia el movimiento del sistema considerando un sistema de referencia móvil.

1.3. Ejercicios resueltos

1.3.1. Máquina de Atwood con aceleración de subida

Determinar, usando el Principio de D'Alembert, la aceleración de las dos masas de una máquina de Atwood sabiendo que la polea, sin masa, sufre una aceleración vertical hacia arriba de valor a.



Los desplazamientos virtuales $\delta x_1, \delta x_2$ de las dos masas no son arbitrarios, ya que existe una ligadura que los une (la presencia de la cuerda entre las dos masas)

$$x_1 + x_2 = \ell \rightarrow \delta x_1 = -\delta x_2 \tag{1.3.1}$$

de forma que eligiendo $\delta x_1 = \delta x = -\delta x_2$ el sistema tiene una única coordenada independiente, x, y podemos prescindir de la fuerza de ligadura (tensión de la cuerda).

Para este sistema unidimensional sin ligaduras, el principio de D'Alembert establece que el trabajo virtual de las fuerzas externas (en este caso, el peso de las masas), es igual al trabajo virtual, cambiado de signo, de las fuerzas de inercia (derivadas del movimiento acelerado de la polea). Para la fuerza externa tenemos

$$\delta W_f = m_1 g \delta x - m_2 g \delta x \tag{1.3.2}$$

dado que para δx positivo, la masa m_1 desciende a favor de la gravedad (el trabajo es positivo), mientras que la masa m_2 asciende en contra de la gravedad (el trabajo es negativo).

El trabajo virtual de las fuerzas de inercia es directamente

$$\delta W_i = \sum_i \left(-m_i \boldsymbol{a}_i\right) \cdot \delta \boldsymbol{x}_i = -m_1 a_1 \delta x + m_2 a_2 \delta x \tag{1.3.3}$$

siendo a_1, a_2 las aceleraciones de las masas respecto al sistema de referencia en reposo, en este caso, el suelo. La masa m_1 se ve arrastrada por el movimiento acelerado de la polea, en dirección vertical hacia arriba, y respecto a la cual tiene una aceleración relativa $\ddot{x}$. Por tanto, su aceleración respecto a suelo está dada por

$$a_1 = \ddot{x} - a \tag{1.3.4}$$

y es positiva. De forma análoga, vemos que para m_2 la aceleración es negativa con el valor

$$a_2 = -\left(a + \ddot{x}\right) \tag{1.3.5}$$

Reagrupando todos los términos, del principio de D'Alembert en su versión dinámica

$$\delta W_f + \delta W_i = 0 \tag{1.3.6}$$

deducimos al ser δx arbitrario, que

$$\left(m_1 - m_2\right) g - m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0 \tag{1.3.7}$$

y por tanto que

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \left(g + a\right) \tag{1.3.8}$$

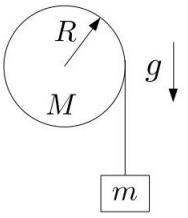
que equivale al movimiento de la máquina de Atwood en presencia de una gravedad efectiva

$$g_{\text{ef}} = g + a \tag{1.3.9}$$

Comprobamos que si la máquina se encuentra en caida libre $a = -g$, obtenemos el resultado esperado: las masas no sufren ninguna aceleración relativa al ser $\ddot{x} = 0$.

1.3.2. Caida vertical de masa ligada a polea

Determinar, usando el Principio de D'Alembert, la aceleración de caida de la masa ligada a una polea fija, de radio R, masa M, y momento de inercia $I = \int r^2 dM$.



Los desplazamientos virtuales $\delta x, \delta\alpha$ de la masa puntual m y de la polea de masa M no son independientes, ya que existe una ligadura que los une (la presencia de la cuerda inextensible entre el punto de tangencia de la polea y la masa m)

$$x = R\alpha \rightarrow \delta x = R\delta\alpha \tag{1.3.10}$$

de forma que eligiendo δx el sistema tiene una única coordenada independiente, x, y podemos prescindir de la fuerza de ligadura (tensión de la cuerda).

Para este sistema unidimensional sin ligaduras, el principio de D'Alembert establece que el trabajo virtual de las fuerzas externas (en este caso, el peso de la masa puntual), es igual al trabajo virtual, cambiado de signo, de las fuerzas de inercia (derivadas del movimiento acelerado de la masa puntual). Para la fuerza externa tenemos

$$\delta W_f = mg\delta x \tag{1.3.11}$$

dado que para δx positivo, la masa m desciende a favor de la gravedad (el trabajo es positivo). No existe trabajo de las fuerzas externas sobre la polea, existe un trabajo de la tensión (la fuerza de ligadura) que ha quedado descartado al asumir una única coordenada independiente.

El trabajo virtual de las fuerzas de inercia es directamente

$$\delta W_i = \sum_i (-m_i \boldsymbol{a}_i) \cdot \delta \boldsymbol{x}_i = -m\ddot{x}\delta x + \delta W_2 \tag{1.3.12}$$

siendo $a = \ddot{x}$ la aceleración de la masa m respecto al sistema de referencia en reposo, en este caso, el suelo. Dado que la polea es un cuerpo rígido para obtener la expresión de δW_2 debemos sumar (integrar) las contribuciones de las masas infinitesimales que la forman. Sea dM' un elemento de masa a una distancia r del centro de la polea. Por efecto de la rotación de la polea, dicho elemento sufre la aceleración en la dirección del movimiento de m

$$a' = \frac{r}{R}\ddot{x} \tag{1.3.13}$$

y sufre un desplazamiento virtual

$$\delta x' = \frac{r}{R}\delta x \tag{1.3.14}$$

con lo que el trabajo de la fuerza de inercia para este elemento se escribe (al ser un diferencial de segundo orden)

$$\delta^2 W' = -dM' \frac{r^2}{R^2}\ddot{x}\delta x \tag{1.3.15}$$

Sólo nos queda integrar sobre todos los elementos de masa de la polea, e introducir la definición del momento de inercia, para obtener

$$\delta W_2 = \int \delta^2 W' = -\frac{\int r^2 dM'}{R^2}\ddot{x}\delta x = -\frac{I}{R^2}\ddot{x}\delta x \tag{1.3.16}$$

Reagrupando todos los términos, del principio de D'Alembert en su versión dinámica

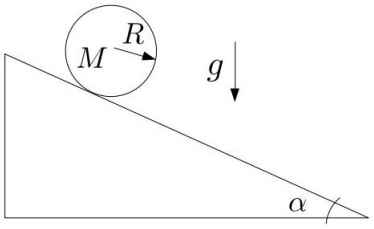
$$\delta W_f + \delta W_i = 0 \tag{1.3.17}$$

deducimos al ser δx arbitrario, que

$$mg - m\ddot{x} - \frac{I}{R^2}\ddot{x} = 0 \rightarrow \ddot{x} = \frac{1}{1 + \frac{I}{mR^2}} g \tag{1.3.18}$$

1.3.3. Rodadura de cilindro sobre plano inclinado

Un cilindro de masa M, radio R y momento de inercia $I = \int r^2 dM$ rueda sin deslizar a lo largo de un plano inclinado de ángulo α. Determinar, usando el Principio de D'Alembert, la aceleración del cilindro en su caida.



Los desplazamientos virtuales $\delta x, \delta\theta$ del cilindro (de su centro de masas a lo largo del plano inclinado, y de la orientación angular respecto a los ejes ligados al centro de masas) no son independientes, ya que existe una ligadura que los une (la condición de rodamiento sin deslizamiento sobre el plano)

$$v = \omega R \quad , \quad x = \theta R \rightarrow \delta x = R\delta\theta \tag{1.3.19}$$

de forma que eligiendo el desplazamiento del centro de masas δx el sistema tiene una única coordenada independiente, x, y podemos prescindir de la fuerza de ligadura (fuerza de rozamiento necesaria en el punto de contacto).

Para este sistema unidimensional sin ligaduras, el principio de D'Alembert establece que el trabajo virtual de las fuerzas externas (en este caso, el peso del cilindro), es igual al trabajo virtual, cambiado de signo, de las fuerzas de inercia (derivadas del movimiento acelerado del cilindro). Para la componente de la fuerza externa en la dirección x tenemos

$$\delta W_f = Mg \operatorname{sen}\alpha \delta x \tag{1.3.20}$$

dado que para δx positivo, el cilindro desciende a favor de la gravedad (el trabajo es positivo). No existe trabajo sobre el desplazamiento angular, ya que éste se debe a la fuerza de ligadura que ha quedado descartada al asumir una única coordenada independiente.

Dado que el cilindro es un cuerpo rígido para obtener el trabajo virtual de las fuerzas de inercia debemos sumar (integrar) las contribuciones a dicho trabajo de las masas infinitesimales que lo forman. Sea dM' un elemento de masa a una distancia r del centro del cilindro. Por efecto de la rotación, dicho elemento sufre la aceleración en la dirección del movimiento

$$a'_x = \frac{d^2}{dt^2}\left(x - r \operatorname{sen}\theta\right) \tag{1.3.21}$$

y la aceleración en dirección perpendicular al movimiento

$$a'_y = \frac{d^2}{dt^2}\left(R - r\cos\theta\right) \tag{1.3.22}$$

al ser $(x - r\,\mathrm{sen}\,\theta, R - r\cos\theta)$ la posición del elemento de masa al girar el cilindro un ángulo θ, medida respecto al sistema de referencia ligado al plano en reposo. Con esto, el trabajo virtual de la fuerza de inercia tiene, por definición, la expresión

$$\delta W_i \equiv \delta W_{ix} + \delta W_{iy} = \int -dM' \frac{d^2\left(x - r\,\mathrm{sen}\,\theta\right)}{dt^2}\delta x' + \int -dM' \frac{d^2\left(R - r\cos\theta\right)}{dt^2}\delta y' \quad (1.3.23)$$

Analizamos primero la expresión de δW_{ix}. Sabiendo que $\delta x = R\delta\theta$, podemos escribir su expresión en la forma

$$\delta W_{ix} = -\delta x \int dM' \left(1 - \frac{r}{R}\cos\theta\right)\left(\ddot{x} - r\cos\theta\ddot{\theta} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\dot{\theta}^2\right) \quad (1.3.24)$$

y aplicando finalmente la ligadura $x = R\theta$, obtenemos la integral

$$\delta W_{ix} = -\delta x \int dM' \left(1 - \frac{r}{R}\cos\theta\right)\left(\ddot{x} - \frac{r}{R}\cos\theta\ddot{x} + \frac{r}{R^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\dot{x}^2\right) \quad (1.3.25)$$

La integración se realiza sobre todos los ángulos θ en $[0, 2\pi)$, y por simetría todos los términos en el integrando que tengan naturaleza impar en θ dan una contribución nula, y la integral se reduce a

$$\delta W_{ix} = -\ddot{x}\delta x \int dM' \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\cos^2\theta\right) \quad (1.3.26)$$

Realizando los mismos pasos con la expresión para δW_{iy}, el resultado análogo es

$$\delta W_{iy} = -\ddot{x}\delta x \int dM' \left(\frac{r^2}{R^2}\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right) \quad (1.3.27)$$

de forma que el trabajo total de la fuerza de inercia es, introduciendo el momento de inercia $I \equiv \int r^2 dM'$ y al ser $\int dM' = M$,

$$\delta W_i = \delta W_{ix} + \delta W_{iy} = -\ddot{x}\delta x \int dM' \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) \equiv -M\delta x\ddot{x}\left(1 + \frac{I}{R^2}\right) \quad (1.3.28)$$

Por tanto, del principio de D'Alembert en su versión dinámica

$$\delta W_f + \delta W_i = 0 \quad (1.3.29)$$

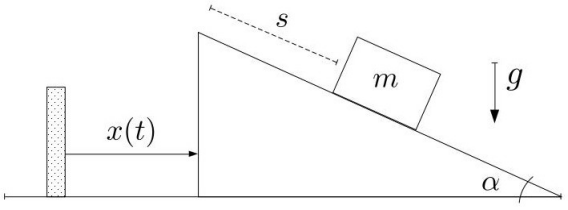
deducimos al ser δx arbitrario, que

$$Mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - M\ddot{x}\left(1 + \frac{I}{R^2}\right) = 0 \to \ddot{x} = \frac{1}{1 + \frac{I}{MR^2}}g\,\mathrm{sen}\,\alpha \quad (1.3.30)$$

1.4. Ejercicio de Autoevaluación

1.4.1. Masa sobre plano inclinado en movimiento

Un bloque de masa m desliza sin rozamiento a lo largo de un plano inclinado sin masa que realiza en el tiempo un movimiento horizontal dado por la función conocida $x(t)$. Obtener, usando el Principio de D'Alembert, la ecuación de movimiento del bloque tomando como coordenada la distancia s medida a lo largo del plano.



Sol:

(a) $mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\delta s - m\left(\ddot{s} + \ddot{x}\cos\alpha\right)\delta s = 0 \quad , \quad \ddot{s} = g\,\mathrm{sen}\,\alpha - \ddot{x}\cos\alpha$

1.5. Apéndice A. Conservación de la energía

Como hemos visto, en general el Principio de D'Alembert no es un principio integrable, reducible a una expresión escalar, por no ser las fuerzas de inercia derivables de un gradiente. Sin embargo, existe un caso sencillo en el que sí lo es, y que da lugar a la conocida *ley de conservación de la energía*.
Cuando las fuerzas externas son conservativas, derivables de la energía potencial V, el Principio de D'Alembert se escribe

$$\delta W = -\delta V - \sum_i m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1.5.1}$$

siendo $\boldsymbol{I}_i = -m\boldsymbol{a}_i$ la fuerza generada sobre la partícula material $i-$ésima por el movimiento del sistema completo, y $\boldsymbol{a}_i$ su aceleración resultante, que será la derivada segunda en el tiempo de su vector de posición $\boldsymbol{r}_i$.
Los desplazamientos virtuales $\delta\boldsymbol{r}_i$ deben ser compatibles con las ligaduras, pero por lo demás son completamente arbitrarios. El aspecto fundamental aquí es que siempre podemos elegirlos de forma que coincidan con el *desplazamiento real* del sistema en el instante dado, esto es,

$$\delta \boldsymbol{r}_i = d\boldsymbol{r}_i \tag{1.5.2}$$

siendo $d\boldsymbol{r}_i$ el desplazamiento real de la partícula $i-$ésima durante el tiempo dt. Además para este tipo de desplazamiento, por derivación, la variación virtual de la velocidad será igual a la variación real de la velocidad. Matemáticamente queda expresado en virtud de la ecuación anterior, en la forma

$$\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{r}_i = \frac{d}{dt}d\boldsymbol{r}_i \;\Rightarrow \delta\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = d\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \;\rightarrow\; \delta\boldsymbol{v}_i = d\boldsymbol{v}_i \tag{1.5.3}$$

dado que el operador de variación δ, al estar aplicado en un instante de tiempo fijo, conmuta con la derivación total respecto al tiempo. Con esto, el término de las fuerzas de inercia adquiere la forma

$$\sum_i m_i\boldsymbol{a}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = \sum_i m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}\cdot d\boldsymbol{r}_i = \sum_i \frac{d\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2\right)}{dt}dt \equiv \frac{dT}{dt}dt \tag{1.5.4}$$

donde hemos hecho uso de la definición de la *energía cinética* del sistema

$$T \equiv \sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \tag{1.5.5}$$

Lo mismo sucederá con la energía potencial: al ser función dependiente de las coordenadas, su variación satisface

$$\delta V = dV \tag{1.5.6}$$

donde dV es el cambio producido en V por el movimiento de las partículas del sistema durante el intervalo de tiempo dt.
Con todo ello, el Principio de D'Alembert cuando el desplazamiento virtual elegido corresponde al desplazamiento real tiene la expresión final

$$0 = \delta W = -dV - \frac{dT}{dt}dt = -d(T+V) \tag{1.5.7}$$

condición que da lugar a la ley de conservación de la energía mecánica del sistema

$$d(T+V) = 0 \Rightarrow T + V = \text{cte} \tag{1.5.8}$$

1.6. Apéndice B. Derivación de las ecuaciones de Euler−Lagrange

El Principio de D'Alembert guarda analogías con un Principio variacional. Por un lado, hablamos de desplazamientos virtuales, que serían equivalentes a considerar variaciones arbitrarias de la trayectoria real. Y por otro, el Principio establece que el trabajo neto es nulo, que sería equivalente a una condición de extremo. No obstante, existe una diferencia fundamental. El Principio de D'Alembert es dinámico, se define en función de las fuerzas aplicadas al sistema en el instante dado, mientras que el Principio variacional (p.e., el Principio de Jacobi) no es dinámico, y sólo caracteriza geométricamente las trayectorias reales del sistema.
Podemos aunar las dos visiones, y obtener un Principio variacional dinámico. Para ello el procedimiento es directo: partimos del Principio de D'Alembert, definimos los desplazamientos virtuales sobre todas las variables del sistema (no sólo aquellos desplazamientos compatibles con las ligaduras), definimos la condición de extremo en función de cantidades escalares que substituyen a las cantidades vectoriales (como fuerza o aceleración), y comprobamos qué tipo de Principio variacional debe definirse para que del cálculo de su extremo se deriven las ecuaciones del equilibrio dinámico del sistema (sus ecuaciones de movimiento).

Sistemas con un grado de libertad Antes de analizar el caso general, nos fijamos en un sistema unidimensional sin ligadura, como es la masa puntual ligada a un muelle de constante k. El Principio de D'Alembert establece que la ecuación del equilibrio dinámico del sistema está dada por

$$(-kx - m\ddot{x})\,\delta x = 0 \tag{1.6.1}$$

El desplazamiento δx es completamente arbitrario. En este caso el sistema sólo posee un grado de libertad ó *variable de configuración* x, y no tiene ligaduras asociadas a x. En este caso hemos eliminado los otros grados de libertad que sí quedan fijados por las condiciones de ligadura. Por ejemplo, el sistema masa-muelle podría estar apoyado en la superficie horizontal $y = 0$ y moverse sin rozamiento. Con ello la fuerza normal sobre la superficie (fuerza de ligadura) sería igual al peso de la masa en movimiento. El primer paso por tanto ha sido eliminar los grados de libertad dependientes, y fijados por las ligaduras del sistema.
El siguiente paso es substuir las cantidades vectoriales (fuerza, aceleración), por cantidades escalares. En el caso de la fuerza, introducimos el concepto ya conocido de energía potencial, o simplemente *potencial*, la cantidad escalar V, tal que

$$F = -\frac{dV}{dx} \quad , \quad F = -kx \Rightarrow V = \frac{1}{2}kx^2 \tag{1.6.2}$$

En el caso de la aceleración, tenemos

$$m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}}\right) \tag{1.6.3}$$

donde hemos introducido la otra cantidad escalar importante, la energía cinética

$$T \equiv \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{1.6.4}$$

Con estas definiciones, la expresión escalar del Principio de D'Alembert para este sistema se escribe

$$\left(-\frac{dV}{dx} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}}\right)\right)\delta x = 0 \tag{1.6.5}$$

Como hemos indicado el desplazamiento virtual δx es totalmente arbitrario, por lo que de la anterior ecuación se deduce directamente que el equilibrio dinámico del sistema está gobernada por la ecuación

$$-\frac{dV}{dx} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}}\right) = -\frac{dV}{dx} \tag{1.6.6}$$

Podemos comparar en este punto este resultado con el resultado variacional que se obtendría para un sistema cuya configuración dinámica está dada en cada instante de tiempo por su posición x y velocidad $\dot{x}$. Para el funcional del tipo $S[x] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \dot{x})dt$, la condición de extremo $S' = 0$ nos lleva a la ecuación correspondiente de Euler−Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} \tag{1.6.7}$$

que tiene una gran analogía con el resultado anterior. Para que la identificación sea completa, necesitamos incluir en una única función de $(x, \dot{x})$ las funciones del sistema T y V. La identificación es sencilla ya que V no depende de $\dot{x}$ y T no depende de x, por lo que la función

$$L(x, \dot{x}) \equiv T(\dot{x}) - V(x) \tag{1.6.8}$$

satisface directamente el requisito anterior

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}}\right) = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{1.6.9}$$

Con este resultado concluímos entonces que el equilibrio dinámico del sistema, esto es, su ecuación de movimiento es la ecuación de Euler−Lagrange para el funcional

$$S[x] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x})dt \quad , \quad L = T - V \tag{1.6.10}$$

La función L recibe el nombre de *Lagrangiano* y el funcional S recibe el nombre de *acción*, en analogía con el nombre recibido por el funcional correspondiente en el Principio de Jacobi.

Sistema con un grado de libertad con ligadura Analizamos de nuevo el sistema masa-muelle considerando ahora la ligadura $y = 0$ sobre la superficie horizontal. Sea N la fuerza de ligadura (la letra N se refiere a la fuerza normal de la superficie sobre la masa m). Según el Principio de D'Alembert el equilibrio dinámico está dado por la ecuación

$$(\boldsymbol{F}_{ext} - m\boldsymbol{a}) \cdot \delta\boldsymbol{r} = 0 \tag{1.6.11}$$

dada la fuerza, la aceleración y el desplazamiento virtual con las componentes

$$\boldsymbol{F}_{ext} = -k\boldsymbol{r} = (-kx, -ky) \quad , \quad \boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}) \quad , \quad \delta\boldsymbol{r} = (\delta x, \delta y) \tag{1.6.12}$$

Tenemos además la condición de trabajo nulo de las fuerzas de ligadura, que se escribe en este caso

$$\boldsymbol{N} \cdot \delta\boldsymbol{r} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{N} = (0, N) \Rightarrow N\delta y = 0 \tag{1.6.13}$$

de donde deducimos que el desplazamiento virtual del sistema compatible con la ligadura es tal que $\delta y = 0$. Con este resultado, junto con la condición de ligadura $y = \text{cte} = 0$, podemos eliminar el grado de libertad y, y el Principio de D'Alembert se reduce al sistema unidimensional anterior

$$(-kx - m\ddot{x})\,\delta x = 0 \tag{1.6.14}$$

que equivale, como hemos visto, al Principio variacional

$$S = \int_{t_1}^{t_2} Ldt \quad , \quad L = T - V \quad , \quad S' = 0 \tag{1.6.15}$$

Comprobamos por tanto que es posible obtener el Principio variacional una vez eliminados los grados de libertad fijados por las ligaduras.

Cálculo de la fuerza de ligadura Para poder completar la analogía con el Principio de D'Alembert debemos obtener también mediante el Principio variacional el valor de la fuerza de ligadura N. Para ello definimos $\boldsymbol{N}$ como una fuerza externa, y la coordenada y como una variable de configuración del sistema. Al ser entonces $\delta\boldsymbol{r}$ un desplazamiento virtual totalmente arbitrario, del Principio de D'Alembert

$$(\boldsymbol{F}_{ext} - m\boldsymbol{a}) \cdot \delta\boldsymbol{r} = 0 \tag{1.6.16}$$

deducimos las dos ecuaciones del equilibrio dinámico del sistema, en la forma

$$-kx + N_x + m\ddot{x} = 0 \quad , \quad -ky - mg + N_y + m\ddot{y} = 0 \tag{1.6.17}$$

siendo $\boldsymbol{N} = (N_x, N_y)$ las componentes de la fuerza normal, sabiendo que $N_x = 0$, y donde incluimos como fuerza externa la gravedad.
Realizamos ahora los mismos pasos que para el sistema unidimensional sin ligadura, teniendo en cuenta que al desconocer la naturaleza de la fuerza de ligadura, no podemos asociarla a ninguna cantidad escalar. Introduciendo la energía potencial (elástica y gravitatoria), y la energía cinética, en la forma usual

$$V = \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right) + mgy \tag{1.6.18}$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \tag{1.6.19}$$

tal que la fuerza externa (salvo la ligadura) esté dada por

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}V \equiv \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}\right) = (-kx, -kx - mg) \tag{1.6.20}$$

y definiendo el Lagrangiano del sistema

$$L = T(\dot{x}, \dot{y}) - V(x, y) \tag{1.6.21}$$

las dos ecuaciones del equilibrio dinámico se escriben

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{1.6.22}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} + N_y \tag{1.6.23}$$

La fuerza $\boldsymbol{N}$ no aparece en la expresión del Lagrangiano, y por tanto aparece como un término independiente en la ecuación de equilibrio dinámico. Recibe por ello el nombre genérico de fuerza *generalizada*. Para poder obtener el valor de N_y tenemos que introducir la ligadura $y = 0$ al sistema de dos variables (x, y). La resolución de las dos ecuaciones de equilibrio para $y = 0$ tiene el resultado esperado

$$m\ddot{x} = -kx \quad , \quad y = 0 \quad , \quad N_y = mg \tag{1.6.24}$$

de forma que la normal es igual al peso de la masa en movimiento.

Lagrangiano modificado Si nos fijamos en el caso anterior, en su ecuación de equilibrio dinámico en la dirección del eje y,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} + N_y \tag{1.6.25}$$

desde el punto de vista operacional, dado que la condición de ligadura establece un valor constante de este grado de libertad ($y = 0$), N_y será un valor independiente de y y la expresión del lado derecho puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial L}{\partial y} + N_y = \frac{\partial\left(L + yN_y\right)}{\partial y} \tag{1.6.26}$$

Con esto, podemos definir el *Lagrangiano modificado* L'

$$L' \equiv L + yN_y \tag{1.6.27}$$

que actúe, al incluir la fuerza o fuerzas de ligadura, como el Lagrangiano *completo* del sistema con ligaduras.

Sistema general Los pasos que hemos dado hasta ahora presuponían que la energía cinética no dependía de la posición, y la energía potencial no dependía de la velocidad. Con ello podía introducirse una función Lagrangiano que englobara a las dos en la forma $L = T - V$, tal que el extremo del funcional acción $S = \int Ldt$ determinase las ecuaciones de movimiento.
En general, los sistemas mecánicos no cumplen estos requisitos. Vemos ahora cómo el sistema general también acepta la descripción Lagrangiana del movimiento. Sin entrar en un detalle excesivo, la argumentación sigue los siguientes pasos:

(1) Partiendo de la definición de la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 \tag{1.6.28}$$

T será independiente de la posición si $\boldsymbol{r}$ forma el conjunto completo de variables de configuración. En caso contrario, si por ejemplo tenemos un conjunto distinto de variables de configuración independientes, digamos q, y

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q, t) \tag{1.6.29}$$

son las ecuaciones de transformación para las coordenadas, vemos directamente que para las velocidades la transformación será

$$\boldsymbol{v} \equiv \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \tag{1.6.30}$$

de forma que la energía cinética $T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$, expresada en términos de las variables de configuración, dependerá tanto de q, como de $\dot{q}$ y de t.

(2) Cuando escribimos el término dependiente de la aceleración en el Principio de D'Alembert

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \delta\boldsymbol{r} \tag{1.6.31}$$

respecto a las variables de configuración q, obtenemos el resultado

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}\right)\delta q \tag{1.6.32}$$

teniendo en cuenta que los desplazamientos virtuales $\delta\boldsymbol{r}$ no dependen del tiempo, y por tanto se relacionan con los desplazamientos virtuales δq, aplicando la transformación $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q, t)$ a tiempo constante,

$$\delta\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q}\delta q \tag{1.6.33}$$

(3) Respecto al término dependiente de la fuerza externa en el Principio de D'Alembert basta introducir el concepto de *fuerza generalizada* Q en la dirección de q, en la forma

$$\boldsymbol{F} \cdot \delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q}\delta q \equiv Q\delta q \quad , \quad Q \equiv \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q} \tag{1.6.34}$$

(4) Por definición, el conjunto de variables de configuración es independiente (no está sometido a ligaduras), y por tanto sus desplazamientos virtuales δq son totalmente arbitrarios.

Reuniendo estos pasos, verificamos que para cualquier sistema mecánico, una vez definidas sus variables de configuración, el Principio de D'Alembert es equivalente al conjunto de ecuaciones

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \tag{1.6.35}$$

Para pasar finalmente a la descripción Lagrangiana del sistema, con $L = T - V$ basta redefinir las fuerzas generalizadas Q en la forma

$$Q \equiv -\frac{\partial V}{\partial q} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}}\right) + \lambda \tag{1.6.36}$$

para un cierto potencial V dependiente de $(q, \dot{q})$ y posiblemente del tiempo, y siendo λ las fuerzas generalizadas restantes que quedan fuera de esta descripción, como son las fuerzas de ligadura. En este caso, las ecuaciones de equilibrio dinámico se reducen a las ecuaciones de Euler−Lagrange cuando $\lambda = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{1.6.37}$$

y a las ecuaciones de Euler−Lagrange para el Lagrangiano modificado para $\lambda \neq 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L'}{\partial q} \quad , \quad L' = L + \lambda \cdot \text{ligadura} \tag{1.6.38}$$

En este sentido, la existencia o no de ligaduras, y la definición o no del sistema en función de variables de configuración independientes, o de un conjunto dependiente más las ligaduras, es irrelevante, y la mayoría de los sistemas mecánicos admiten una representación Lagrangiana, al satisfacer el Principio de D'Alembert.
Fundamentalmente quedan fuera de esta descripción aquellos sistemas en los que las fuerzas de ligadura *sí* realizan trabajo. Ejemplo característico son los sistemas disipativos, que a través de las ligaduras establecidas con el medio exterior, ven modificada su dinámica interna. Que no exista para estos sistemas una descripción Lagrangiana se debe a que sería necesario conocer también la dinámica del medio que los rodea con el que interactúan. La excepción, como hemos visto, serían los sistemas disipativos sí caracterizados por un potencial dependiente de las coordenadas y/o velocidades en la forma exigida por el formalismo Lagrangiano.

1.7. Apéndice C. Formulación covariante de la Mecánica Newtoniana

Se resume en este apéndice la aplicación del Principio de Covariancia a la fisica Newtoniana que, por su sencillez, facilita un mayor grado de comprensión de la formulación covariante de cualquier teoría física.

1.7.1. Introducción

El Principio de Covariancia General establece que las ecuaciones de la Física deben poder enunciarse en una manera independiente de las coordenadas. O dicho de otra forma, que las leyes físicas son invariantes bajo las transformaciones admisibles de coordenadas (léase coordenadas y tiempo). La diferencia fundamental entre las distintas teorias es el tipo de transformación que se considera admisible: el más amplio posible (los difeomorfismos) para la Relatividad General, las transformaciones de Poincaré (que incluyen las transformaciones de Lorentz) para la Relatividad Especial y finalmente las transformaciones del grupo de Galileo (que incluyen las rotaciones espaciales, las traslaciones en el espacio y el tiempo, y la transformación de Galileo) para la Fisica Newtoniana.

1.7.2. Formulación covariante de la teoría Newtoniana

• Consideremos la expresión habitual más general de la formulación Lagrangiana de un sistema mecánico, que para la energía cinética tiene la expresión

$$T = \frac{1}{2} M_{ij}(q,t)\, \dot{q}_i \dot{q}_j + M_{0i}(q,t)\, \dot{q}_i + \frac{1}{2} M_{00}(q,t) \tag{1.7.1}$$

siendo M_{ij}, M_{0i}, M_{00} funciones dadas de las coordenadas y el tiempo, y donde se suma aplicando el convenio de Einstein sobre cada uno de los índices repetidos, i y j. Aquí $i, j = 1, .., n$, siendo n el número de grados de libertad del sistema. De forma análoga para las fuerzas generalizadas tenemos la definición

$$Q_k \equiv Q_{kij}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_j + 2Q_{ki0}(q)\, \dot{q}_i + Q_{k00}(q) \tag{1.7.2}$$

La conveniencia de introducir un índice adicional con valor único 0 se entenderá en lo que sigue. Las ecuaciones de movimiento están dadas por las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \tag{1.7.3}$$

para cada una de las coordenadas generalizadas (q_k), siendo $\dot{q}_k$ la velocidad generalizada correspondiente, con $k = 1, .., n$. Estas definiciones generales representan, con una adecuada elección de estos coeficientes para cada sistema de coordenadas, la mayor parte de los sistemas mecánicos de interés. Por ejemplo, en el caso de fuerzas independientes de la velocidad y derivables de un potencial V tendremos

$$Q_{kij} = 0 \quad , \quad Q_{ki0} = 0 \quad , \quad Q_{k00} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{1.7.4}$$

• Una vez introducidas las definiciones generales, el procedimiento para la formulación covariante de la teoria sería el siguiente

- Se añade el tiempo con el estatus de coordenada adicional, dejando de ser un parámetro del movimiento. Se pasa así del espacio de configuración $(q_k(t))$ en función del tiempo y de dimensión N, al espacio-tiempo de configuración (q_k, t) de dimensión $N+1$. Los índices del espacio-tiempo se representarán por el alfabético latino, $a, b, ..$ y tendrán el rango de valores $0, 1, 2, .., N$ estando el valor 0 asociado a la variable temporal.

- Se define una variable temporal τ que actúa como el tiempo coordenado, de carácter absoluto, y un covector asociado

$$t_a = \frac{\partial \tau}{\partial q^a} \equiv \partial_a \tau \tag{1.7.5}$$

  ortogonal a las superficies de simultaneidad $\tau = \text{cte}$ del espacio-tiempo. En función de t_a quedan caracterizados todos los vectores del espacio-tiempo Newtoniano. Los vectores X^a serán de tipo espacial si son ortogonales a la dirección temporal, esto es, $X^a t_a = 0$, y serán de tipo temporal si son paralelos a la dirección temporal, $X^a t_a \neq 0$, siendo V^a el vector temporal unitario que satisface $V^a t_a = 1$.

- Entre todas las posibles variables temporales, se elije frecuentemente la variable natural $q_0 = t$, de forma que

$$t_a = \partial_a t = \frac{\partial q^0}{\partial q^a} = \delta^0_a \tag{1.7.6}$$

  El movimiento del sistema está representado por su linea de mundo $q(t)$ en el espacio-tiempo, y su velocidad está dada por el vector tangente

$$\dot{q}^a \equiv \frac{dq^a}{dt} \tag{1.7.7}$$

Con este conjunto de definiciones la energía cinética admite la expresión

$$T = \frac{1}{2} M_{ab} \dot{q}^a \dot{q}^b \tag{1.7.8}$$

Aunque a simple vista pueda parecer que tenemos ya una expresión covariante, las cantidades M_{ab} no son las componentes de un tensor. Sí lo son las componentes puramente espaciales, M_{ij}, bajo las transformaciones admisibles de la física Newtoniana (transformaciones del grupo de Galileo). Las fuerzas generalizadas Q_k siguen siendo fuerzas generalizadas Q_k (esto es, no es necesario introducir en la teoria Newtoniana las componentes temporales Q_0 porque carecen de significado), con la expresion completa

$$Q_k \equiv Q_{kab} \dot{q}^a \dot{q}^b \tag{1.7.9}$$

Con ello las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Lagrange) se escriben en el espacio-tiempo de configuraciones en la forma

$$M_{ka} \ddot{q}^a + \frac{1}{2} \left(M_{ka,b} + M_{kb,a} - M_{ab,k} \right) \dot{q}^a \dot{q}^b = Q_{kab} \dot{q}^a \dot{q}^b \tag{1.7.10}$$

que muestra claramente un origen métrico similar a las ecuaciones geodésicas.

Conexión dinámica El siguiente punto de la teoría será obtener explícitamente la conexión (esto es, los símbolos de Christoffel) tal que las geodésicas anteriores puedan identificarse con las correspondientes leyes de movimiento Newtonianas, escritas en la forma covariante

$$\ddot{q}^a + \Gamma^a_{bc} \dot{q}^b \dot{q}^c = 0 \tag{1.7.11}$$

Para la construcción de dicha conexión resultan fundamentales las propiedades métricas del espacio-tiempo Newtoniano, que no muestra relación alguna entre la variable temporal y las variables espaciales, como sí sucede en la Relatividad Especial (que da lugar a la existencia del cono de luz, la división de vectores en nulos, espaciales, y temporales, etc.).
• El resultado que vemos es que el espacio-tiempo Newtoniano tiene dos estructuras geométricas independientes, un tensor métrico temporal degenerado $t_{ab} \equiv t_a t_b$, de signatura $(1, 0, 0, 0)$, que sirve para medir los vectores temporales, y un tensor métrico espacial, también degenerado, h^{ab}, de signatura $(0, 1, 1, 1)$, que sirve para medir los vectores espaciales. Ya que los dos conjuntos son independientes se debe satisfacer la condición de ortogonalidad

$$h^{ab} t_b = 0 \tag{1.7.12}$$

Es decir, la medición espacial de un vector temporal es cero (y viceversa).
Esta degeneración de la métrica implica que los tensores métricos no son invertibles, es decir, no pueden utilizarse para subir y bajar indices covariantes. En la práctica esto implica que no podria extraerse de forma directa la ecuación de la géodesica anterior a partir de la ecuación de Lagrange del movimiento anterior por este método de subida y bajada de índices.

Resolución La solución a este problema planteado la tiene la propia física Newtoniana, ya que establece la existencia de observadores que comparten la noción del tiempo absoluto, y la existencia de un observador privilegiado, en reposo absoluto. Introducir en la dinámica la dependencia con el observador permite resolver este problema de la covariancia.
En primer lugar, un observador arbitrario u se definirá por un vector temporal u^a unitario, esto es, $u^a t_a = 1$. Introduciendo esta definición en la dinámica Newtoniana, vemos que la variable temporal que describe el movimiento será el tiempo medido por el observador u, en lugar del tiempo coordenado t. Y la métrica espacial ya no será arbitraria, sino la métrica que resulte de la proyección espacial en dirección ortogonal a u. Esto es, existirá un tensor métrico espacial $h^{(u)}_{ab}$ adaptado a u que podrá utilizarse, junto con h^{ab}, para bajar y subir índices covariantes, solventando la naturaleza degenerada de la métrica en el espacio-tiempo newtoniano

$$h^{(u)}_{ab} u^b = 0 \quad , \quad h^{(u)}_{ab} h^{bc} = \delta^c_a - t_a u^c \tag{1.7.13}$$

Utilizando entonces, la expresión de la energía cinética en la forma

$$T = \frac{1}{2} M_{ab} \dot{q}^a \dot{q}^b \tag{1.7.14}$$

podemos definir, en analogía con lo visto anteriormente, M_{ab} como el tensor métrico espacial adaptado al observador u arbitrario del sistema mecánico, de forma que el tensor métrico espacial H^{ab} satisface

$$H^{ab} M_{bc} = \delta^a_c - t_c u^a \tag{1.7.15}$$

con al menos la solución formal, ya que el tensor métrico M_{ab} no es invertible,

$$H^{ab} = M^{ab} - u^a t^b \tag{1.7.16}$$

Aplicando entonces H^{ab} a la ecuación de movimiento en presencia de las fuerzas generalizadas

$$M_{ka} \ddot{q}^a + \frac{1}{2} \left(M_{ka,b} + M_{kb,a} - M_{ab,k} \right) \dot{q}^a \dot{q}^b = Q_{kab} \dot{q}^a \dot{q}^b \tag{1.7.17}$$

podemos deducir la expresión geodésica equivalente

$$\ddot{q}^a + \Gamma^a_{bc} \dot{q}^b \dot{q}^c = 0 \tag{1.7.18}$$

identificando en el camino la expresión completa de los simbolos de Christoffel

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} H^{ae} \left(M_{eb,c} + M_{ec,b} - M_{bc,e} \right) + u^a t_{,bc} - H^{ae} Q_{ebc} \tag{1.7.19}$$

1.8. Referencias

En este capítulo se explica la fundamentación de la Dinámica basada en los llamados Principios variacionales. Se recomienda la lectura detallada del libro *The Variational Principles of Mechanics* de C. Lanczos, una vez se comprenda la aplicación de los Principios variacionales, de forma general.

1.9. Videoclases

Tipo	**Duración**	**Contenidos**	**Enlace**	**Notas(pdf)**
Teoría	15+15 mn	Secciones 1.1, 1.2	S.1.1, S.1.2	S.1.1, S.1.2
Ejercicios	26 mn	Ejercicios 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3	Ejercicios	Ejercicios
Autoevaluación	6 mn	Ejercicio 1.4.1	Ejercicio	Ejercicio
Otros	20 mn	Apéndices 1.5, 1.6	Apéndices	Apéndices

Capítulo 2

Principio de Hamilton

2.1. Principio de Hamilton

El *principio de Hamilton* es el principio integral que describe el movimiento de los sistemas mecánicos para los cuales las fuerzas aplicadas (salvo las fuerzas de ligadura) pueden ser derivadas a partir de un potencial generalizado, función de las coordenadas, las velocidades y el tiempo (los denominados *sistemas monógenos*, esto es, con un solo generador). Tal relación generadora está dada por la definición de fuerza generalizada Q (ecuación 1.6.36)

$$Q \equiv -\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right) \tag{2.1.1}$$

en términos del denominado potencial generalizado V.
Para estos sistemas, el principio de Hamilton establece que el movimiento del sistema entre los tiempos t_1 y t_2 es tal que el funcional acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{2.1.2}$$

donde $L \equiv T - V$, tiene un valor estacionario para la trayectoria real seguida por el sistema. Es decir, entre todos las trayectorias posibles que unen el punto inicial y el punto final en los tiempos dados, el sistema recorrerá la trayectoria que hace estacionario el funcional acción. Dicho valor estacionario se expresa matemáticamente en la forma

$$\delta S \equiv \delta\left(\int L dt\right) = 0 \tag{2.1.3}$$

donde el operador δ indica la variación sobre las trayectorias vecinas que difieren de la trayectoria real por desplazamientos infinitesimales.

2.1.1. Ecuaciones de Euler−Lagrange

Estudiamos la variación de la acción S, correspondiente a una variación arbitraria de la trayectoria $x(t)$ del sistema. Ya que el tiempo no se trata como una variable independiente para cada trayectoria, la variación de la acción es directamente

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(x, \dot{x}, t) dt \tag{2.1.4}$$

Al variar la trayectoria, el Lagrangiano varía según

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} \tag{2.1.5}$$

y además, como t no actúa como variable independiente, la derivada temporal y la variación son operadores intercambiables, con lo cual

$$\delta\dot{x} = \delta\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\delta x \tag{2.1.6}$$

Con esto, la variación de la acción queda expresada en la forma

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}\delta x\right] dt \tag{2.1.7}$$

Integramos ahora el segundo término por partes

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}\delta x\, dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\, dt \tag{2.1.8}$$

con lo cual, la variación de la acción toma la forma definitiva

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x\, dt \tag{2.1.9}$$

El principio de Hamilton establece que dicha variación es cero para la trayectoria real, elegida entre todas las trayectorias compatibles con $x(t_1) = x_1$ y $x(t_2) = x_2$. Es decir, se exige que $\delta S = 0$ para $\delta x(t_1) = 0$ y $\delta x(t_2) = 0$, con la variación de la trayectoria, $\delta x(t)$, función arbitraria del tiempo por lo demás. Concluimos que el segundo sumando es nulo, y así la trayectoria real descrita por el sistema satisface las *ecuaciones de Euler−Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{2.1.10}$$

2.1.2. Formulación invariante de la Mecánica

Invariancia frente a la transformación de coordenadas Además de definir de forma compacta la dinámica de los sistemas monógenos, el principio de Hamilton tiene una característica fundamental, ya que sólo implica a cantidades escalares (energía cinética y energía potencial) que pueden definirse sin hacer referencia a un sistema de coordenadas particular. De esta forma, la formulación basada en este principio es *invariante respecto a la elección del sistema de coordenadas.*

Invariancia gauge Consideremos ahora el cambio del Lagrangiano en la forma

$$L(x, \dot{x}, t) \to L(x, \dot{x}, t) + \frac{d}{dt}\Lambda(x, t) \tag{2.1.11}$$

siendo Λ una función de las coordenadas y el tiempo. Para esta transformación denominada *gauge*, el término adicional satisface

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Lambda(x,t)}{dt}dt = \Lambda(x,t)\Big|_{x(t_1)}^{x(t_2)} \tag{2.1.12}$$

y por ello esta cantidad adicional tiene variación nula, dado que en los extremos de la trayectoria $\delta x(t_1) = 0 = \delta x(t_2)$. Así el principio de Hamilton queda invariante

$$\delta \int L dt \to \delta \int \left(L + \frac{d\Lambda}{dt}\right) dt = \delta \int L dt \tag{2.1.13}$$

y en consecuencia, las ecuaciones de Euler−Lagrange también muestran esta invariancia.
Como conclusión, podemos obtener Lagrangianos distintos, relacionados entre sí por una transformación gauge, que resulten completamente equivalentes ya que generan las mismas ecuaciones de movimiento.

Sistemas dinámicos. Teorías de campo En este sentido podremos extender la aplicación del principio de Hamilton a sistemas dinámicos en general con Lagrangianos arbitrarios, no necesariamente mecánicos en el sentido $L = T - V$ con la división energía cinética/energía potencial. Así mismo podremos aplicar el formalismo Lagrangiano a los medios continuos y las teorías de campo (p.e, el campo electromagnético), modificando la expresión de L en función de las nuevas variables de configuración e introduciendo los cambios necesarios para respetar las simetrías adicionales de la teoría (p.e, la invariancia bajo la transformación de Lorentz de la relatividad especial). En cualquier caso, sí quedan fuera de su aplicación, como hemos indicado en numerosas ocasiones, los sistemas disipativos ya que su descripción no puede realizarse sin conocer también la dinámica del medio con el que interaccionan.

2.2. Teorema de Noether. Cantidades conservadas

2.2.1. Teorema de Noether

Este teorema relaciona las cantidades conservadas del movimiento (energía, momento,..) con el tipo de simetría que se conserva en el sistema. Supongamos que bajo la transformación infinitesimal de las coordenadas y el tiempo

$$t \to t' = t + \delta t \quad , \quad x(t) \to x'(t') \tag{2.2.1}$$

no varía la integral de acción para una trayectoria dada. Veamos qué consecuencias podemos extraer de esta simetría.

La variación de la acción debido a esta transformación de coordenadas es

$$\delta S = \int L\left(x', \frac{dx'}{dt'}, t'\right) dt' - \int L\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) dt \tag{2.2.2}$$

Calculamos las variaciones de las coordenadas y el tiempo por separado. Respecto a la variable de tiempo, tenemos

$$dt' \equiv \left|\frac{dt'}{dt}\right| dt = \left(1 + \frac{d\delta t}{dt}\right) dt \tag{2.2.3}$$

Para la coordenada x, la variación tiene un origen doble, primero por variar la propia coordenada y segundo por variar la variable temporal de la que depende. De ello obtenemos

$$\delta x(t) \equiv x'(t') - x(t) = \overline{\delta x}(t) + \frac{dx}{dt}\delta t \tag{2.2.4}$$

siendo $\overline{\delta x}(t) \equiv x'(t) - x(t)$ la variación de la coordenada manteniendo fijo el tiempo.
De la misma forma, la variación del Lagrangiano se compone de dos partes que escribimos

$$\delta L = \overline{\delta L} + \frac{dL}{dt}\delta t \equiv \frac{\partial L}{\partial x}\overline{\delta x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta \dot{x}} + \frac{dL}{dt}\delta t \tag{2.2.5}$$

Con esto, la variación de la acción se escribe

$$\delta S = \int L\frac{d\delta t}{dt}dt + \int \left(\frac{\partial L}{\partial x}\overline{\delta x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta \dot{x}} + \frac{dL}{dt}\delta t\right) dt \tag{2.2.6}$$

que se reduce a

$$\delta S = \int \frac{d\left(L\delta t\right)}{dt}dt + \int \left(\frac{\partial L}{\partial x}\overline{\delta x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta \dot{x}}\right) dt \tag{2.2.7}$$

De la misma forma que en la obtención de las ecuaciones de Euler−Lagrange, el operador de derivación temporal puede intercambiarse con el operador de variación a tiempo constante, por lo que

$$\overline{\delta \dot{x}} = \frac{d}{dt}\overline{\delta x} \tag{2.2.8}$$

con lo cual, podemos escribir el último término en el integrando en la forma

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}\overline{\delta x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta x}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\overline{\delta x} \tag{2.2.9}$$

y así, la variación de la acción tiene la expresión final

$$\delta S = \int \frac{d}{dt}\left(L\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta x}\right)dt + \int \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right)\overline{\delta x}\, dt \tag{2.2.10}$$

Con la condición de que la variación de la acción sea nula y que el movimiento recorra la trayectoria real, esto es, que se satisfagan las ecuaciones de Euler−Lagrange, obtenemos el *teorema de E. Noether*: Si S es invariante bajo la transformación de las coordenadas $t \to t'$, $x \to x'$, entonces

$$\delta S = \int \frac{d}{dt}\left(L\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta x}\right)dt = 0 \tag{2.2.11}$$

ó lo que es lo mismo

$$L\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta x} \tag{2.2.12}$$

es una constante del movimiento. Por último, al ser $\overline{\delta x} = \delta x - \dot{x}\delta t$, dicha constante del movimiento se escribe en la forma

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x \tag{2.2.13}$$

2.2.2. Cantidades conservadas

Simetría frente a traslación temporal La transformación temporal es

$$\delta t = a \quad , \quad \delta x = 0 \tag{2.2.14}$$

y en consecuencia, según el teorema de Noether, existe una cantidad conservada en el movimiento en la forma

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L \tag{2.2.15}$$

Para encontrar el significado a esta constante, basta utilizar el Lagrangiano en su expresión más habitual

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \tag{2.2.16}$$

llegando a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L = m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \equiv E \tag{2.2.17}$$

que es la energía total del sistema. Por tanto, cuando la evolución de un sistema no dependa explícitamente del tiempo, su energía total se conserva.

Simetría frente a traslación espacial La traslación espacial es

$$\delta t = 0 \quad , \quad \delta x = a \tag{2.2.18}$$

y en consecuencia se conserva el denominado *momento conjugado* p_x definido por

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{cte} \tag{2.2.19}$$

Si la coordenada x mide una longitud, $p_x = m\dot{x}$ es constante. Es decir, se conserva el momento lineal en la dirección del eje que mantiene invariante al sistema. Si la coordenada x es un ángulo, $p_x = I\dot{\theta}$ es constante. Es decir, se conserva el momento angular de giro respecto al eje que mantiene invariante al sistema.

2.3. Otras cantidades conservadas

2.3.1. Integrales primeras

La solución a la ecuación de Euler−Lagrange puede ser obtenida de forma directa en casos especiales, en términos de las denominadas *integrales primeras*. Por integral primera se entiende una expresión que contiene a la función y sus derivadas en un orden inferior al presente en la ecuación original, y cuya derivada respecto a la coordenada independiente resultar ser nula.

En el caso particular del funcional de acción $S = \int L(x, \dot{x}, t)dt$ son dos las integrales primeras de interés: (1) cuando el Lagrangiano L no depende de la variable dependiente x, y (2) cuando no depende explícitamente de la variable independiente t. En ambos casos, la ausencia de la dependencia en alguna de las variables es indicativo de la existencia de una *simetría* en el sistema (como hemos visto en la sección anterior, la simetría bajo la traslación en la dirección del eje x), y recíprocamente cada simetría del sistema implica la existencia de una integral primera.

Simetría bajo la traslación en x Si el Lagrangiano es invariante bajo los cambios arbitrarios en x, se debe a que se satisface

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{2.3.1}$$

esto es,

$$L = L(\dot{x}, t) \tag{2.3.2}$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación de Euler−Lagrange, tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Rightarrow p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C \equiv \text{cte} \tag{2.3.3}$$

donde C es una constante cuyo valor depende en última instancia de las condiciones frontera para la función $x(t)$. Dado que la ecuación original es de segundo orden y esta ley de conservación depende de la derivada de primer orden, hemos obtenido una integral primera del sistema dinámico.

Simetría bajo la traslación en t Si el Lagrangiano es invariante bajo los cambios arbitrarios en t, se debe a que se satisface

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{2.3.4}$$

esto es,

$$L = L(x, \dot{x}) \tag{2.3.5}$$

de forma que su derivada total respecto al tiempo se reduce a

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ddot{x} \tag{2.3.6}$$

y según aparece en la ecuación Euler−Lagrange, tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \tag{2.3.7}$$

La unión de ambos resultados nos lleva a la expresión

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ddot{x} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right) \tag{2.3.8}$$

de forma que la cantidad

$$L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} = C \equiv \text{cte} \tag{2.3.9}$$

representa una integral primera del sistema, donde C es una constante cuyo valor depende de las condiciones iniciales para las funciones $x(t), \dot{x}(t)$. De nuevo dado que la ecuación original es de segundo orden y esta ley de conservación depende de la derivada de primer orden, podemos confirmar que se trata de una integral primera del sistema, relacionada como hemos visto anteriormente con la conservación de la energía del sistema.

2.3.2. Coordenadas cíclicas o ignorables

Podemos extender los resultados anteriores a sistemas en los que el Lagrangiano quede definido en función de un conjunto de funciones dependientes, digamos $x_1, x_2, ..$ y sus derivadas, $\dot{x}_1, \dot{x}_2, ..$
En este caso, siguiendo los mismos pasos anteriores, la condición de extremo del funcional acción S, definido por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(x_1, x_2, .., \dot{x}_1, \dot{x}_2, .., t\right) dt \tag{2.3.10}$$

para el conjunto de trayectorias vecinas de la trayectoria real $\{x_i^*(t)\}$

$$x_i(t) = x_i^*(t) + \epsilon\, \eta_i(t) \tag{2.3.11}$$

está dado por la condición

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\right) \eta_i(t) dt = 0 \tag{2.3.12}$$

que debe ser válida para cualquier variación arbitraria $\{\eta_i(t)\}$.
Eligiendo sucesivamente las variaciones como aquellas idénticamente nulas salvo una en particular, digamos $\eta_k(t)$, vemos que se satisface

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k}\right) \tag{2.3.13}$$

para todo k. Como conclusión, la resolución del extremo del funcional acción $S[x]$ da lugar a una ecuación de Euler−Lagrange por cada una de las variables dependientes $x_k(t)$.

Así mismo, el estudio de las integrales primeras del sistema se reduce al estudio de las integrales primeras en cada una de las variables dependientes. Por ejemplo, cuando L no depende explicitamente de x_k tenemos la integral primera

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = C_k \equiv \text{cte} \tag{2.3.14}$$

En este caso en particular, cuando

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0 \tag{2.3.15}$$

decimos que x_k es una *coordenada cíclica ó ignorable*, en el sentido que la descripción del sistema es la misma sea cual sea el valor de la coordenada x_k: como ejemplo, para estudiar la dinámica de una partícula libre no necesitamos conocer su localización (su posición es una coordenada ignorable).

2.4. Otros aspectos útiles

2.4.1. Transformación de coordenadas

El formalismo Lagrangiano es muy versatil ya que permite elegir las coordenadas que sean más convenientes para describir la dinámica del sistema. Esto se debe a que el Lagrangiano L es una cantidad escalar, por definición invariante bajo la transformación de coordenadas. Y por su naturaleza integral, el principio de acción estacionaria permite también la reparametrización arbitraria del tiempo. Lo vemos en detalle a continuación.

Transformaciones puntuales Las transformaciones de coordenadas en el espacio de configuración (q, t), esto es, las transformaciones del tipo

$$q \to Q \quad , \quad Q = Q(q, t) \tag{2.4.1}$$

reciben el nombre de *transformaciones puntuales*. Y bajo esta transformación se satisface

$$S = \int L(q, \dot{q}, t)dt = \int L\left(q(Q,t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) dt \equiv \int \tilde{L}(Q, \dot{Q}, t)dt \tag{2.4.2}$$

donde $\tilde{L}$ es el Lagrangiano definido para el espacio de configuración (Q, t). Al ser L un escalar se satisface $L = \tilde{L}$, es decir, su valor no cambia aunque cambie su expresión funcional. Con ello, al aplicar el cálculo variacional en ambos sistemas de coordenadas con la condición de extremo $\delta S = 0$, las ecuaciones de Euler−Lagrange resultan equivalentes

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}}\right) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q} \tag{2.4.3}$$

Comprobación Dada la ley de transformación $Q = Q(q, t)$, obtenemos la ley de transformación completa en la forma

$$t = t \quad , \quad Q = Q(q,t) \quad , \quad \dot{Q} = \frac{d}{dt}Q(q,t) = \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{q=\text{cte}} + \dot{q}\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)_{t=\text{cte}} \tag{2.4.4}$$

de donde deducimos la ley de transformación inversa

$$t = t \quad , \quad q = q(Q,t) \quad , \quad \dot{q} = \left(\dot{Q} - \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{q=\text{cte}}\right) \frac{1}{\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)_{t=\text{cte}}} \tag{2.4.5}$$

Una vez obtenidas estas fórmulas pasamos a analizar la ecuación de Euler−Lagrange para el espacio de configuración (Q, t). Esto es, consideramos válida la ecuación de partida

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}}\right) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q} \tag{2.4.6}$$

y calculando paso a paso las derivadas parciales, verificamos que obtenemos la ecuación de Euler−Lagrange para el espacio de configuración (q, t). Tenemos en primer lugar

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q} \equiv \frac{\partial L\left(q(Q,t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right)}{\partial Q} = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)_{t=\text{cte}} + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial Q}\right)_{t,\dot{Q}=\text{cte}} \tag{2.4.7}$$

y también

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} \equiv \frac{\partial L\left(q(Q,t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right)}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}}\right)_{t,Q=\text{cte}} \tag{2.4.8}$$

Introduciendo estos desarrollos en la ecuación de Euler−Lagrange vemos que se satisface

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}}\right)_{t,Q=\text{cte}}\right) = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)_{t=\text{cte}} + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial Q}\right)_{t,\dot{Q}=\text{cte}} \tag{2.4.9}$$

Para avanzar calculamos primero las derivadas parciales a partir de la ley de transformación de coordenadas

$$\dot{q} = \left(\dot{Q} - \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{q=\text{cte}}\right) \frac{1}{\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)_{t=\text{cte}}} \;\Rightarrow\; \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}}\right)_{t,Q=\text{cte}} = \frac{1}{\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)_{t=\text{cte}}} \equiv \left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)_{t=\text{cte}} \tag{2.4.10}$$

Al realizar ahora la derivada total respecto al tiempo podemos tener en cuenta que, para $t = \text{cte}$, esta derivada conmuta con la derivada parcial respecto a Q, esto es,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}}\right)_{t,Q=\text{cte}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)_{t=\text{cte}} = \left(\frac{\partial \frac{dq}{dt}}{\partial Q}\right)_{t,\dot{Q}=\text{cte}} = \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial Q}\right)_{t,\dot{Q}=\text{cte}} \tag{2.4.11}$$

Con ello, el desarrollo de la ecuación de Euler−Lagrange se reduce a

$$\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)_{t=\text{cte}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\right) + \cancel{\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial Q}\right)_{t,\dot{Q}=\text{cte}}} = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)_{t=\text{cte}} + \cancel{\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial Q}\right)_{t,\dot{Q}=\text{cte}}} \tag{2.4.12}$$

y dado que la transformación $Q = Q(q,t)$ es totalmente arbitraria, se deduce la ecuación de Euler−Lagrange para el espacio de configuración inicial (q,t)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q} \tag{2.4.13}$$

Con esto se demuestra que ambas ecuaciones son equivalentes, y que el principio de Acción estacionaria es invariante bajo las transformaciones puntuales.

Reparametrización del tiempo En este caso analizamos cómo se modifica el principio de Acción estacionaria bajo la reparametrización del tiempo, en la forma

$$t \to T \quad , \quad T = T(t) \quad \text{ó} \quad t = t(T) \tag{2.4.14}$$

en cuyo caso las coordenadas tienen la transformación

$$q \to q \quad , \quad \dot{q} = \frac{dq}{dT}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{t'(T)}\frac{dq}{dT} \tag{2.4.15}$$

Aplicando estas leyes de transformación en el funcional acción, de la equivalencia

$$S = \int L(q,\dot{q},t)dt = \int \tilde{L}(q, \frac{dq}{dT}, T)dT \tag{2.4.16}$$

deducimos que el nuevo Lagrangiano se debe definir en la forma

$$Ldt = \tilde{L}dT \Longrightarrow \tilde{L}\left(q, \frac{dq}{dT}, T\right) \equiv L\left(q, \frac{1}{t'(T)}\frac{dq}{dT}, T\right) \cdot t'(T) \tag{2.4.17}$$

y para el cual se satisface la consiguiente ecuación de Euler−Lagrange en el espacio de configuración (q,T)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial\left(dq/dT\right)}\right) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} \tag{2.4.18}$$

2.4.2. Relación energía−Hamiltoniano

Coordenadas y momentos generalizados Para describir el estado físico de un sistema no es necesario escoger las coordenadas rectangulares usuales. Es posible escoger cualquier conjunto de parámetros que especifiquen de forma completa el estado del sistema. Estas cantidades no tienen por qué tener dimensión de longitud, ya que dependiendo del problema puede ser más adecuado elegir algún parámetro sin dimensión, como puede ser un ángulo.
Por *coordenadas generalizadas* se entiende dicho conjunto de parámetros que describe completamente el estado del sistema. La finalidad que se busca al elegir uno u otro conjunto de coordenadas es obtener las ecuaciones de movimiento resultantes en la forma más simple posible,

y que permita una interpretación del movimiento lo más sencillamente posible.
Se definen a su vez los *momentos generalizados* según la fórmula

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \tag{2.4.19}$$

con lo cual, las ecuaciones de Euler−Lagrange pueden escribirse en la forma

$$\frac{d}{dt}p = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{2.4.20}$$

Una consecuencia directa es que si el Lagrangiano no depende de la coordenada generalizada x, su momento generalizado p, como ya hemos visto, se conserva constante en el tiempo.

Formulación Hamiltoniana. Hamiltoniano La descripción del movimiento utilizando las coordenadas generalizadas y sus momentos asociados de forma independiente se denomina *formulación Hamiltoniana*. De esta forma el estado del sistema queda descrito no sólo por su posición sino también por el conjunto de velocidades generalizadas que definen su movimiento. En esta formulación se define el denominado *Hamiltoniano* del sistema en la forma

$$H(x, p, t) \equiv \dot{x}p - L(x, \dot{x}, t) \tag{2.4.21}$$

donde debe entenderse que las velocidades generalizadas se introducen como funciones de x, p y t. Es decir, de la ecuación $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, se despejan las velocidades generalizadas respecto de las coordenadas y momentos generalizados.

Leyes de movimiento Calculando ahora la diferencial total del Hamiltoniano, obtenemos

$$dH = \dot{x}dp + pd\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial x}dx - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}d\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{2.4.22}$$

que en virtud de las ecuaciones de Euler−Lagrange y de la definición de momento generalizado, queda reducido a la expresión

$$dH = \dot{x}dp - \dot{p}dx - \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{2.4.23}$$

Mediante la identificación de términos, obtenemos de forma directa las *ecuaciones del movimiento* en la formulación Hamiltoniana

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad , \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{2.4.24}$$

La última ecuación expresa el hecho de que si el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, el Hamiltoniano se conserva constante en el tiempo.

Relación energía−Hamiltoniano Consideremos el caso general de un Lagrangiano

$$L(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) - V(x) \equiv T_2(x)\dot{x}^2 + T_1(x)\dot{x} + T_0(x) - V(x) \tag{2.4.25}$$

suma de un primer término cuadrático en las velocidades, un segundo término lineal en las velocidades y un último término independiente de las velocidades, siendo todos los términos independientes de forma explícita del tiempo. De esta independencia del tiempo, obtenemos la ley de conservación del Hamiltoniano

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow H = \text{cte} \tag{2.4.26}$$

La expresión del Hamiltoniano para este sistema general se obtiene aplicando su definición

$$H = \dot{x}p - L = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = T_2(x)\dot{x}^2 - T_0(x) + V(x) \tag{2.4.27}$$

y lo que nos interesa conocer es cuándo esta expresión resulta ser la energía *mecánica* del sistema, definida por

$$E = T + V = T_2(x)\dot{x}^2 + T_1(x)\dot{x} + T_0(x) + V(x) \tag{2.4.28}$$

Identificando ambas expresiones concluímos que el Hamiltoniano será igual a la energía, y será un valor conservado, si el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, y la energía cinética no tiene ni término lineal ni término constante en las velocidades. Deducimos ahora qué requisitos deben cumplirse para que en la energía cinética no aparezca esta dependencia.
Partimos de la expresión general de la energía cinética en coordenadas cartesianas

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 \tag{2.4.29}$$

cuadrática en las velocidades y para la cual el Hamiltoniano coincide con la energía mecánica del sistema

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(\boldsymbol{r}) \Rightarrow H = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + V(\boldsymbol{r}) \equiv E \tag{2.4.30}$$

Si ahora aplicamos la transformación puntual de coordenadas

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q,t) \tag{2.4.31}$$

siendo q un sistema de coordenadas arbitrario, vemos que la velocidad satisface

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q}\dot{q} \equiv A(q,t) + B(q,t)\dot{q} \tag{2.4.32}$$

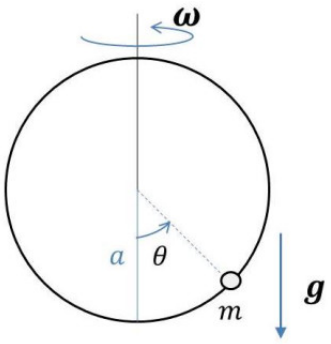
y que por tanto la energía cinética adquiere los términos adicionales

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \frac{1}{2}m\left(A^2 + 2AB\dot{q} + B^2\dot{q}^2\right) \equiv T_0(q,t) + T_1(q,t)\dot{q} + T_1(q,t)\dot{q}^2 \tag{2.4.33}$$

Analizamos la expresión obtenida término a término. Cuando la transformación puntual no depende explícitamente del tiempo, es decir el cambio de las coordenadas cartesianas $\boldsymbol{r}$ a las coordenadas q no depende explícitamente del tiempo, tenemos $A = 0$ y desaparecen los términos lineal e independiente en las velocidades T_0, T_1.
En conclusión, cuando el Lagrangiano no dependa explícitamente del tiempo y la transformación de las coordenadas cartesianas de referencia a las coordenadas del sistema no dependa explícitamente del tiempo podemos asegurar que el Hamiltoniano se conserva en el tiempo y es igual a la energía mecánica del sistema.
Y en el caso de que la transformación sí dependa explícitamente del tiempo, pero $\partial L/\partial t = 0$, el Hamiltoniano se conservará en el tiempo pero no será igual a la energía mecánica del sistema, y ésta última no se conservará. Ejemplos característicos de estos casos son los sistemas bajo rotación uniforme. No existe dependencia en el tiempo al ser la velocidad angular ω constante, pero la transformación de coordenadas al sistema en rotación sí dependen del tiempo al ser el ángulo de giro $\phi = \omega t$. La no conservación de la energía se debe a la necesidad de realizar un trabajo sobre el sistema para mantener la velocidad angular constante, equilibrando así cualquier torque generado en el sistema por la posible variación de la velocidad angular.

2.4.3. Estudio de los puntos de equilibrio (M)

Masa ensartada en un anillo circular en rotación Analizamos como ejemplo característico el movimiento de una cuenta de masa m que desliza sin rozamiento a lo largo de un alambre circular de radio a, como indica la figura. El alambre, situado verticalmente en un campo gravitatorio constante g, gira alrededor de su eje vertical con una velocidad angular constante ω.



Lagrangiano Dada la configuración geométrica del sistema, es conveniente trabajar en coordenadas esféricas. En las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), la velocidad instantánea de la masa puntual tiene la expresión

$$\boldsymbol{v} = v_\theta \boldsymbol{u}_\theta + v_\phi \boldsymbol{u}_\phi = a\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + a \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{u}_\phi \tag{2.4.34}$$

Dado que la velocidad angular de giro en torno al eje vertical es constante, $\dot{\phi} = \omega \equiv \text{cte}$, obtenemos el modulo al cuadrado de la velocidad directamente en la forma

$$v^2 = a^2 \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) \tag{2.4.35}$$

Con esto, la energía cinética de la cuenta resulta ser

$$T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2}ma^2 \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) \tag{2.4.36}$$

mientras que su energía potencial (gravitatoria) tiene la expresión usual

$$V = mgh = mga\,(1 - \cos\theta) \tag{2.4.37}$$

medida respecto de la posición más baja de la trayectoria ($\theta = 0$). Por tanto, el Lagrangiano del problema para la única coordenada generalizada θ tiene la expresión

$$L = T - V = \frac{1}{2}ma^2 \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) - mga\,(1 - \cos\theta) \tag{2.4.38}$$

De aquí, la ecuación del movimiento se obtiene a partir de la correspondiente ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \tag{2.4.39}$$

Esto es,

$$ma^2\ddot{\theta} = ma^2\omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - mga\operatorname{sen}\theta \tag{2.4.40}$$

El término de la izquierda es la inercia sobre el movimiento (circular), mientras que los términos de la derecha son las componentes sobre la tangente de la fuerza centrífuga debida al giro, y del peso. Expresada así, esta ecuación no es más que la segunda ley de Newton del movimiento.

Posición de equilibrio dinámico En el punto de equilibrio dinámico se debe satisfacer $\ddot{\theta} = 0$, y por tanto las posibles soluciones del sistema resultante

$$ma^2\omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - mga\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{2.4.41}$$

son

$$\theta = 0 \quad , \quad \cos\theta = \frac{g}{a\omega^2} \tag{2.4.42}$$

El equilibrio es dinámico y no estático puesto que la cuenta, a pesar de tener un valor fijo de θ, sigue girando con velocidad angular constante en torno al eje vertical. Es un equilibrio según una

dirección, pero en todas direcciones, de ahí el sobrenombre de *dinámico*.
Para analizar la naturaleza de las soluciones obtenidas es conveniente introducir un parámetro del sistema,

$$\omega_c \equiv \sqrt{\frac{g}{a}} \tag{2.4.43}$$

la velocidad angular *crítica*, justificando su nombre como veremos a continuación. Con esta notación, los puntos de equilibrio están dados por

$$\theta = 0 \quad , \quad \cos\theta = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \tag{2.4.44}$$

Comprobamos que cuando la frecuencia de rotación aplicada es menor que este valor crítico, esto es, cuando $\omega < \omega_c$, la segunda solución de equilibrio no existe, y sólo existe un punto de equilibrio, $\theta = 0$, y es estable. Cuando $\omega > \omega_c$ además del punto de equilibrio $\theta = 0$, que se vuelve inestable, aparece un segundo punto tal que

$$\cos\theta_0 = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \tag{2.4.45}$$

que es estable.
El carácter estable de la posición angular θ_0 puede verificarse de la siguiente manera. Si desde este valor el sistema aumenta el ángulo θ, se producirá en relación un aumento de la componente del peso y una disminución de la componente de la fuerza centrífuga, con el resultado neto de una fuerza en la dirección tangente a la circunferencia dirigida en sentido decreciente del ángulo, y por tanto hacia el punto de equilibrio. Es decir, el sistema tenderá a ir al punto de equilibrio. El resultado será el mismo si por el contrario, desde la posición θ_0 disminuye el ángulo θ. Entonces al aumentar la componente de la fuerza centrífuga y disminuir la componente del peso, la fuerza neta estará dirigida en sentido creciente del ángulo, de nuevo hacia el punto de equilibrio. Con esta explicación el punto de equilibrio es estable, y queda claro que el movimiento respecto al punto de equilibrio será oscilatorio, faltará comprobar bajo qué condiciones también será armónico (esto es, cuando la fuerza neta sea directamente proporcional al desplazamiento angular).

Movimiento oscilatorio El análisis en este caso es estándar. Realizamos en primer lugar un desplazamiento angular pequeño definido por la variable ε, respecto a la posición estable, siendo

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon \rightarrow \epsilon = \theta - \theta_0 \tag{2.4.46}$$

y comprobamos cómo queda la ecuación de movimiento resultante para ε, considerado pequeño. Obtenemos por tanto la ecuación de movimiento de la perturbación en la forma

$$ma^2\ddot{\varepsilon} = ma^2\omega^2 \operatorname{sen}(\theta_0 + \varepsilon)\cos(\theta_0 + \varepsilon) - mga\operatorname{sen}(\theta_0 + \varepsilon) \tag{2.4.47}$$

y analizamos su expresión para ε considerado pequeño. Desarrollando en serie las funciones trigonométricas en primer orden en ε,

$$\operatorname{sen}(\theta_0 + \varepsilon) \simeq \operatorname{sen}\theta_0 + \varepsilon\cos\theta_0 \tag{2.4.48}$$

$$\cos(\theta_0 + \varepsilon) \simeq \cos\theta_0 - \varepsilon\operatorname{sen}\theta_0 \tag{2.4.49}$$

llegamos, utilizando la condición de equilibrio estable, a

$$ma^2\ddot{\varepsilon} = \varepsilon ma^2\omega^2\left(\cos^2\theta_0 - \operatorname{sen}^2\theta_0\right) - \varepsilon mga\cos\theta_0 \tag{2.4.50}$$

Y de aquí, de nuevo con la condición de equilibrio estable, obtenemos finalmente la ecuación de movimiento en la forma

$$\ddot{\varepsilon} + \varepsilon\omega^2\operatorname{sen}^2\theta_0 = 0 \tag{2.4.51}$$

ecuación del movimiento armónico simple con la frecuencia de oscilación

$$\Omega = \omega\operatorname{sen}\theta_0 = \omega\sqrt{1 - \frac{g^2}{a^2\omega^4}} \tag{2.4.52}$$

Como conclusión, el movimiento oscilatorio en torno al punto de equilibrio será armónico si el desplazamiento angular respecto al mismo puede ser considerado pequeño. Para valorar cuán pequeño debe ser, lo suficiente para que los términos de orden mayor en ε en los desarrollos anteriores sean despreciables frente al primer orden.

2.4.4. Principio de relatividad de Galileo

El principio de relatividad de Galileo establece que las ecuaciones de movimiento de un sistema son invariantes bajo el cambio de sistema de coordenadas de dos observadores que se mueven entre sí a velocidad constante. La transformación del tiempo, las coordenadas y las velocidades medidas por los observadores se definen en la forma

$$t = t' \quad , \quad \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V} \quad , \quad \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t \tag{2.4.53}$$

siendo $\boldsymbol{V}$ su velocidad relativa.
Todo observador para el cual la ley dinámica de un sistema físico está dada por

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \tag{2.4.54}$$

siendo $\boldsymbol{F}$ la fuerza externa aplicada y $\boldsymbol{p}$ el momento lineal del sistema, se denomina *observador inercial*. A partir de esta definición, se deduce que un observador inercial se mueve con velocidad constante, ya que de otro modo generaría la presencia de fuerzas de inercia en la descripción dinámica de este sistema. Y en consecuencia, dos observadores inerciales estarán relacionados por la transformación de Galileo anterior, siendo $\boldsymbol{V}$ su velocidad relativa.

Invariancia frente a la transformación de Galileo Consideremos el caso de la partícula libre, por simplicidad en una dimensión, con el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{2.4.55}$$

y analicemos la invariancia del movimiento respecto a dos observadores inerciales, esto es, la invariancia frente a la transformación de Galileo

$$\dot{x}' = \dot{x} - V \tag{2.4.56}$$

Lo que vemos primero es que el funcional acción tiene la transformación

$$\begin{aligned} S' = \int L'dt = \int \frac{1}{2}m\left(\dot{x} - V\right)^2 dt &= \int \frac{1}{2}m\dot{x}^2 dt - mV\int \dot{x}dt + \text{cte} \\ &\equiv \int \frac{1}{2}m\dot{x}^2 dt + \int \frac{d}{dt}\left(-mVx\right)dt + \text{cte} \\ &\equiv \int Ldt + \int \frac{d}{dt}\left(-mVx\right)dt + \text{cte} \end{aligned} \tag{2.4.57}$$

Prescindiendo de la constante irrelevante podemos deducir que los dos Lagrangianos L, L' quedan relacionados en la forma *gauge*

$$L' = L + \frac{d}{dt}\left(-mVx\right) \equiv L + \frac{d\Lambda}{dt} \tag{2.4.58}$$

lo que demuestra que la transformación de Galileo es una transformación *gauge* para la dinámica del sistema, esto es, representa distinta elecciones para la misma descripción física del sistema.

Cantidad conservada Demostrada esta propiedad, nos interesa conocer la cantidad conservada asociada a esta simetría, y su significado físico. El método que utilizaremos es el teorema de Noether (V será una cantidad infinitesimal), teniendo en cuenta que, a diferencia de la metodología general presentada en el apartado 2.2, ahora el Lagrangiano no se comporta como una cantidad escalar bajo la transformación, ya que cambia su expresión como indica la fórmula anterior. Sea, por tanto,

$$\delta S = \int \left(L' - L\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Lambda(x,t)}{dt}dt = \Lambda(x,t)\Big|_{x(t_1)}^{x(t_2)} \tag{2.4.59}$$

la variación de la acción con el cambio de observador.
Esta variación proviene tanto del cambio variacional de la velocidad de la partícula a lo largo de su trayectoria, como de la aplicación de la transformación de Galileo para la velocidad. Dicho de otra forma, es el resultado de variar primero la velocidad para posteriormente ajustar su valor con el establecido por la transformación. Pero lo que nos interesa conocer es el proceso de variación *específico* de la transformación de Galileo, y para ello necesitaremos substraer de la δS general la parte dependiente de la variación genérica de la velocidad. Esto es, analizamos la variación *específica* de la acción, dada por

$$\overline{\delta S} \equiv \int \left(L' - L - \delta L\right) dt \tag{2.4.60}$$

siendo

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} = 0 + p\delta \dot{x} \tag{2.4.61}$$

Integrando el resultado por partes, y haciendo uso de la ecuación de movimiento del sistema, obtenemos

$$\overline{\delta S} = \left(\Lambda - p\delta x\right)\Big|_1^2 \tag{2.4.62}$$

Exigiendo que esta variación sea nula (invariancia de la física del sistema), y teniendo en cuenta los valores $\Lambda = -mVx$, $\delta x = -Vt$ para la transformación, obtenemos el valor de la constante

$$-mVx + pVt = \text{cte} \tag{2.4.63}$$

Dado que V es arbitrario, deducimos el valor de la cantidad conservada

$$mx - pt = \text{cte} \equiv mx_0 \tag{2.4.64}$$

que no es más que la ley de conservación del movimiento del centro de masas de la partícula (que al ser puntual coincidirá con su propia posición)

$$x = x_0 + \frac{p}{m}t \tag{2.4.65}$$

Con esta referencia al centro de masas, podemos identificar esta expresión como la ley de conservación de masa del sistema (que coincide con la ecuación de movimiento para una masa puntual).

Sistema de muchas partículas De forma resumida, podemos analizar un sistema con muchas partículas. La transformación de Galileo será una transformación de simetría del sistema siempre que la interacción entre las partículas sea de tipo *central*, esto es, dependa únicamente de su distancia relativa, dada por el conjunto de vectores $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Esta dependencia central hace que el potencial de interacción sea invariante bajo la transformación de Galileo al ser

$$\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j = (\mathbf{r}_i - \mathbf{V}t) - (\mathbf{r}_j - \mathbf{V}t) = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \tag{2.4.66}$$

y por tanto, obtenemos por extensión del caso libre unidimensional (eliminando la constante irrelevante)

$$\begin{aligned} \delta S = \int \left(L' - L\right) dt &= \int \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}\right)^2 dt - \int \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 dt \\ &= \int \frac{d}{dt}\left(-\sum_i m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{V}\right) dt \end{aligned} \tag{2.4.67}$$

Substraemos ahora de forma análoga la variación $\int \delta L dt$ para obtener la variación específica de la acción en la forma

$$\overline{\delta S} = \left(-\sum_i m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{V} - \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i\right)\Big|_1^2 \tag{2.4.68}$$

Exigiendo que esta variación sea nula, y teniendo en cuenta los valores $\delta\mathbf{r}_i = -\mathbf{V}t$ para la transformación, obtenemos el valor de la constante

$$-\sum_i m_i\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{V}+\sum_i \mathbf{p}_i\cdot\mathbf{V}t = \text{cte} \tag{2.4.69}$$

Dado que $\mathbf{V}$ es arbitrario, deducimos el valor de la cantidad conservada

$$\sum_i m_i\mathbf{r}_i - \sum_i \mathbf{p}_i t = \text{cte} \equiv \sum_i m_i\mathbf{r}_{i,0} \tag{2.4.70}$$

que no es más que la ley de conservación del movimiento libre del centro de masas del sistema de partículas

$$M\mathbf{r}_{cm} - \mathbf{P}t = M\mathbf{r}_{cm,0} \implies \mathbf{r}_{cm} = \mathbf{r}_{cm,0} + \frac{\mathbf{P}}{M}t \tag{2.4.71}$$

siendo $\mathbf{P}\equiv\sum_i \mathbf{p}_i$ el momento total (conservado) del sistema, y $M=\sum_i m_i$ la masa total del sistema.

Sistema unidimensional con interacción Revisando los desarrollos anteriores, parecería contradictorio aplicar la transformación de Galileo a un sistema unidimesional con interacción, por ejemplo

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \tag{2.4.72}$$

dado que el término potencial no satisface la propiedad requerida de invariancia Galileo. El error que cometemos aquí es considerar que x es una coordenada absoluta, cuando es una coordenada *relativa*, esto es, está medida respecto a unos ejes de referencia y por tanto es una distancia de separación, que sí resulta invariante bajo Galileo. Por tanto, este Lagrangiano está representando la parte *relativa* del movimiento, y existirá a priori un centro de masas (pe, el laboratorio) siguiendo un movimiento libre, como indicaría la cantidad conservada asociada, en ausencia de fuerzas externas.

2.5. Sistemas con ligaduras

Por *ligaduras*, ó restricciones, entendemos el conjunto de condiciones que limitan el movimiento del sistema, en el sentido que las coordenadas del sistema no toman todos los valores posibles, sino por ejemplo un subconjunto de ellos. Por ello, toda ligadura conlleva la existencia de una *fuerza de ligadura*, responsable de la restricción física del movimiento del sistema. Como ejemplo característico, en un sólido rígido el movimiento de las partículas está restringido por el hecho de que las distancias mutuas son invariables. Una partícula en movimiento sobre una superficie está restringida a moverse sobre dicha superficie.

2.5.1. Tipos de ligaduras

Existen tres tipos fundamentales de ligaduras:

- Ligaduras *holónomas*, que se describen en la forma

$$f(q,t) = 0 \tag{2.5.1}$$

  y que por tanto permiten reducir de forma directa los grados de libertad dependientes.

- Ligaduras *no holónomas*, que se describen en la forma

$$f(q,\dot{q},t) = 0 \tag{2.5.2}$$

  y que al contener las velocidades $\dot{q}$ no permiten reducir de forma directa los grados de libertad.

- Ligaduras no descritas por ecuaciones, por ejemplo, la desigualdad $f(q,t) < 0$. Este tipo de ligaduras por su naturaleza podrían quedar incluidas en el grupo de las ligaduras *no holónomas*.

2.5.2. Tratamiento de las ligaduras

En general el tratamiento Lagrangiano de las ligaduras tiene dos vías: 1) analizar si es posible reducir el número de grados de libertad, eliminando las coordenadas dependientes, y por tanto resolver la dinámica del sistema prescindiendo de las ligaduras y de las fuerzas de ligadura asociadas, y 2) mantener las ligaduras definiendo un Lagrangiano modificado que incluya las ligaduras, permita resolver la dinámica del sistema y a la vez obtener las fuerzas de ligadura.
Quedan fuera de este procedimiento las ligaduras que no permiten eliminar las coordenadas dependientes. En estos casos, debemos retornar al punto de origen, trabajar con el Principio de D'Alembert introduciendo las modificaciones necesarias, en función de la naturaleza de las ligaduras, para obtener la dinámica del sistema.

2.5.3. Sistemas holónomos

En la sección 14.10.5 podemos ver en detalle el cálculo de la fuerza de una ligadura holónoma dependiente de las coordenadas. Aquí describimos brevemente cómo es posible tal resultado. Podemos resumir el principio de acción estacionaria en la forma

$$\delta S = \delta\left(\int L dt\right) = \int \delta L dt = \int E[L]\delta x dt = 0 \Rightarrow E[L] \equiv \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{2.5.3}$$

ya que las variaciones δx son totalmente arbitrarias, siendo $E[L]$ las ecuaciones de Euler−Lagrange para el Lagrangiano dado. Si aplicamos el mismo procedimiento para el Lagrangiano modificado

$$L' = L + \lambda \cdot \text{ligadura} \tag{2.5.4}$$

obtenemos en primer lugar

$$\delta S = \delta\left(\int L' dt\right) = \int \delta L' dt = \int E[L]\delta x dt + \int \delta\left(\lambda \cdot \text{ligadura}\right) dt = 0 \tag{2.5.5}$$

Desarrollando la variación del segundo término tenemos conjuntamente

$$\delta\left(\lambda \cdot \text{ligadura}\right) = \delta\lambda \cdot \text{ligadura} + \lambda \cdot \delta\left(\text{ligadura}\right)$$
$$\delta\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x}\delta x \quad , \quad \delta\left(\text{ligadura}\right) = \frac{\partial\, \text{ligadura}}{\partial x}\delta x$$

Con todo ello, el principio variacional daría lugar al resultado final

$$\delta S = \int \left(E[L] + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \cdot \text{ligadura} + \frac{\partial\, \text{ligadura}}{\partial x}\right)\delta x dt = 0 \tag{2.5.6}$$

y de nuevo, ya que las variaciones δx son totalmente arbitrarias, obtenemos las ecuaciones de Euler−Lagrange correspondientes, en la forma

$$E[L] + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \cdot \cancelto{0}{\text{ligadura}} + \lambda \frac{\partial\, \text{ligadura}}{\partial x} = 0 \tag{2.5.7}$$

Vemos que con la condición ligadura $= 0$, el término proporcional a $\partial\lambda/\partial x$ desaparece y podemos integrar la dinámica del sistema sin tener que resolver explícitamente la dependencia de la fuerza de ligadura λ en las coordenadas (ejemplo 14.10.5). Decimos por tanto que el sistema con una ligadura holónoma (dependiente de las coordenadas) es integrable mediante el formalismo Lagrangiano introduciendo un Lagrangiano modificado.

2.5.4. Sistemas no holónomos

La principal característica de los sistemas no holónomos es que no permiten definir un Lagrangiano modificado para resolver el problema. Lo comprobamos en detalle para caso general de una ligadura dependiente de coordenadas y velocidades, y posiblemente del tiempo. Del mismo modo debemos

considerar que en principio la *fuerza de ligadura* asociada λ tiene la misma dependencia. Siguiendo el mismo procedimiento que para el caso holónomo, definiendo el Lagrangiano modificado

$$L' = L + \lambda \cdot \text{ligadura} \tag{2.5.8}$$

el principio variacional daría lugar a la ecuaciones de Euler−Lagrange

$$E[L] + \lambda \cdot E[\text{ligadura}] - \frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial\, \text{ligadura}}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{2.5.9}$$

donde hemos eliminado por simplicidad los términos directamente proporcionales a la ligadura, ya que se anulan idénticamente al tomar la condición ligadura $= 0$.
En esta ecuación, es la aparición del último término, proporcional a $d\lambda/dt$, el que impide la integración directa para obtener la solución al movimiento y la fuerza de ligadura. La dependencia en las velocidades implica que estos términos contengan términos proporcionales a las aceleraciones, por lo que se necesitaría una condicion adicional. Y dicha condición adicional, por ejemplo sobre la variación de la velocidad $\delta\dot{x}$ en los extremos, es desconocida si no se conoce antes la solución al problema. La resolución de este tipo de problemas tiene que ir por otra vía.

Ejemplo. Curvas de persecución Consideremos como primer ejemplo el sistema en el plano xy formado por un punto inmaterial Q que se mueve a lo largo del eje x de una forma conocida, digamos $x(Q) = f(t)$, y un punto P de masa m y coordenadas (x, y) que describe la denominada *trayectoria de persecución* de Q, esto es, la velocidad de P en cada instante está dirigida directamente hacia Q. El sistema tiene el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \tag{2.5.10}$$

La ligadura es no holónoma y tiene la expresión

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \equiv \tan\theta = \frac{y}{x - f(t)} \tag{2.5.11}$$

siendo θ el ángulo que forma la tangente a la trayectoria de P con el eje x.

La ligadura del sistema depende explícitamente del tiempo y no permite eliminar de forma directa ninguno de los grados de libertad x, y mediante la introducción de un Lagrangiano modificado. La razón de ello estriba en que esta forma funcional exige que la variable dependiente y tenga una dependencia explícita en el tiempo, esto es, $y(t) \equiv y(x, t)$ diferente a la expresión implícita $y(t) \equiv y(x(t))$, que sí daría lugar a la eliminación del grado de libertad en el eje y. O en otras palabras, sería necesario fijar una condición adicional de ligadura, por ejemplo, la ya indicada $\partial y/\partial t = 0$, para que el problema sea resoluble mediante el Lagrangiano para el grado de libertad x.

Resolución independiente del tiempo En este caso la función $f(t) =$ cte, y la resolución del problema es trivial, y corresponde a la trayectoria rectilínea hacia un punto fijo del eje x. Al tener la dependencia $y = y(x(t))$ obtenemos

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = y'(x) \tag{2.5.12}$$

La ligadura se reduce entonces a una integral directa, función de las coordenadas exclusivamente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - f} \Rightarrow y = C(x - f) \tag{2.5.13}$$

y el problema puede resolverse. Para ello, una vez eliminada la variable y, el Lagrangiano para la coordenada x se escribe

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 + C^2\right)\dot{x}^2 \tag{2.5.14}$$

y corresponde a una partícula libre que se mueve con velocidad $\dot{x}$ constante. Al ser $\dot{y} = C\dot{x}$ la velocidad en la direccion y también es constante. Luego nos encontramos con el movimiento de una partícula libre en dirección rectilínea hacia el punto fijo del eje x, de coordenadas $(f, 0)$.

Resolución dependiente del tiempo El problema en este caso no es resoluble. Lo comprobamos de forma directa. Para determinar las ecuaciones de movimiento podriamos aplicar el procedimiento general. En primer lugar escribimos el Lagrangiano, aplicando la ligadura, en términos de las variables $(x, \dot{x}, t)$ definiendo $y = y(x, t)$. El Lagrangiano resultante es

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}(x,t)^2 \right) = \frac{1}{2} m \alpha^2(x,t) \dot{x}^2 \tag{2.5.15}$$

donde hemos definido

$$\alpha^2(x,t) \equiv 1 + \frac{y(x,t)^2}{(x - f(t))^2} \tag{2.5.16}$$

Las ecuaciones del movimiento son para este Lagrangiano

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\alpha^2 \dot{x}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha^2}{\partial x}\dot{x}^2 \tag{2.5.17}$$

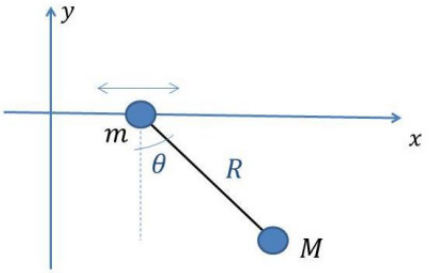
Sin entrar en los detalles matemáticos, vemos que al desarrollar esta ecuación de movimiento, en relación a la variable $y(x,t)$, en el lado izquierdo vamos a obtener términos dependientes de su derivada total $\dot{y}$, y en el lado derecho términos dependientes de su derivada parcial $\partial y/\partial x$. La cuestión clave es que ahora dichas cantidades son independientes entre sí, por lo que necesitaríamos una condición adicional que la relacionara para resolver el problema aplicando la ligadura. En el caso anterior, independiente del tiempo, vimos que tal relación era simplemente $\partial y/\partial t = 0$, de forma que $\dot{y} = y' = dy/dx$, y el problema era resoluble.

Resolución general. Extensión a espacios de dimensión superior Cuando el problema no sea resoluble mediante el formalismo Lagrangiano podemos resolverlo aplicando otra metodología, en particular, la extensión de este formalismo a espacios de dimensión superior (véase como ejemplo la resolución detallada del Apéndice 2.9).

2.6. Ejercicios resueltos

2.6.1. Péndulo con punto de suspensión libre

Sea el péndulo plano de la figura, de masa M, cuyo punto de suspensión, de masa m, puede desplazarse libremente en el mismo plano, y sin rozamiento, en dirección horizontal.



Sabiendo que el Lagrangiano del sistema está dado por la expresión

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right) + MgR\cos\theta$$

donde x es la coordenada del punto de suspensión, y θ el ángulo que forma el péndulo con la vertical,

(a) Estudiar la existencia de cantidades conservadas, y su interpretación física. Recordar que en el método Lagrangiano la existencia de cantidades conservadas se puede deducir a partir las propias ecuaciones de Euler−Lagrange.

(b) Deducir de forma matemática la conservación del Hamiltoniano del sistema, calcular su valor para el sistema dado, estudiando su relación con la energía.

De forma general, cuando el Lagrangiano no depende de una coordenada, por ejemplo x, de su ecuación de Euler−Lagrange del movimiento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{2.6.1}$$

se deduce que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{2.6.2}$$

y por tanto que

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \tag{2.6.3}$$

no depende del tiempo, esto es, es una cantidad conservada. Recibe el nombre de momento conjugado asociado a la coordenada x.

(a) En nuestro caso particular, el momento conjugado está dado por

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m+M)\dot{x} + MR\dot{\theta}\cos\theta = \text{cte} \tag{2.6.4}$$

Esta conservación se refiere a la conocida ley de conservación del momento lineal cuando la fuerza neta sobre el sistema en dirección horizontal es nula. Esto no quiere decir que no existan fuerzas en la dirección horizontal, como puede ser la componente horizontal de la tensión de la cuerda, pero en este caso dicha componente se equilibra con la inercia en el punto de suspensión, dado que este punto es móvil y no está sometido a ninguna otra ligadura. Dicho equilibrio resulta en la conservación del momento lineal en la dirección horizontal. Como el Lagrangiano sí depende de la coordenada θ, no hay ley de conservación asociada al momento conjugado de θ.

Para obtener una segunda cantidad conservada independiente (sólo habrá dos ya que el sistema es bidimensional), observamos que las fuerzas son conservativas y las ligaduras no dependen del tiempo. Bajo estas condiciones se conserva la energía del sistema, siendo igual, por definición, a

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}_m^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_m^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{x}_m\cos\theta\right) - MgR\cos\theta = \text{cte} \tag{2.6.5}$$

(b) Según el método Lagrangiano, el Hamiltoniano h está definido, para este sistema de dos grados de libertad (x_m, θ), por

$$h = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L \tag{2.6.6}$$

siendo $p = \partial L/\partial\dot{x}$ y $p_\theta = \partial L/\partial\dot{\theta}$ los momentos conjugados respectivos.
Para estudiar la conservación en el tiempo de esta cantidad, en primer lugar reescribimos las

ecuaciones de Euler−Lagrange, multiplicándolas por las velocidades generalizadas, en la forma

$$\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} \quad , \quad \dot{\theta}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \theta} \tag{2.6.7}$$

El lado izquierdo de cada ecuación proviene del operador temporal

$$\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \ddot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \tag{2.6.8}$$

y por tanto, se satisface

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} + \ddot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \tag{2.6.9}$$

con la ecuación análoga para la coordenada θ.
Sumando ahora las dos ecuaciones resultantes, vemos que

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} + \ddot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \theta} + \ddot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \tag{2.6.10}$$

Dada la dependencia del Lagrangiano en las coordenadas del sistema (x, θ), las velocidades generalizadas $(\dot{x}, \dot{\theta})$ y el tiempo t, la variación temporal del Lagrangiano tiene el desarrollo, aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} + \ddot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \theta} + \ddot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \tag{2.6.11}$$

y por tanto, deducimos de las dos ecuaciones anteriores que

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} \tag{2.6.12}$$

que puede resescribirse en la forma de una ley de conservación para el Hamiltoniano h

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{2.6.13}$$

Esta ecuación nos indica que si el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo (incluyendo las posibles ligaduras en el Lagrangiano modificado), la cantidad entre paréntesis, el Hamiltoniano h del sistema, se conserva

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow h = \text{cte} \tag{2.6.14}$$

La cantidad h coincide con la energía mecánica del sistema, definida en la forma usual como la suma $E = T+V$, cuando las fuerzas son conservativas, esto es derivan de un potencial dependiente de las coordenadas. Veámoslo en este caso particular. Como la energía potencial V no depende de las velocidades tenemos

$$\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dot{x}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{x}} + \dot{\theta}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{\theta}} = \dot{x}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \dot{\theta}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \tag{2.6.15}$$

Dado que además, por su expresión, T es función homogénea de grado $n = 2$ en las velocidades generalizadas (aparecen únicamente factores de orden 2, $\dot{x}^2, \dot{\theta}^2, \dot{x}\dot{\theta}$), aplicando el teorema de Euler de las funciones homogéneas, tenemos

$$\dot{x}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \dot{\theta}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = nT = 2T \tag{2.6.16}$$

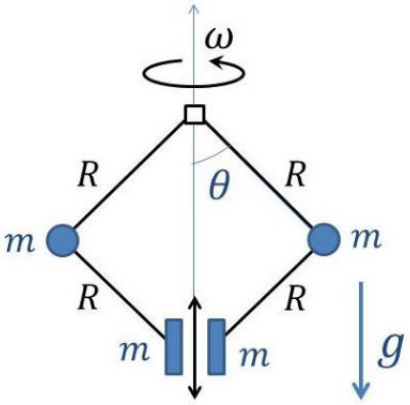
que también puede comprobarse con un cálculo detallado. Por tanto, para nuestro sistema que tiene fuerzas conservativas y ligaduras independientes del tiempo, concluimos que

$$h = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V = E \tag{2.6.17}$$

como habíamos indicado.

2.6.2. Movimiento del tacómetro o regulador

Considere el regulador o tacómetro de la figura. Los cuatro brazos rígidos que forman la articulación tienen longitud R, el punto superior sobre el eje está fijo, mientras que sobre el punto inferior del eje deslizan dos masas m sin rozamiento. El sistema se encuentra sometido a una rotación respecto al eje vertical con velocidad angular constante ω, y a la acción de la gravedad verticalmente hacia abajo. Las otras dos masas están unidas al punto inferior y superior por sendos brazos rígidos.



(a) Determine las coordenadas generalizadas y las ligaduras del sistema, el Lagrangiano y las ecuaciones del movimiento.

(b) Utilizando la relación entre la propiedad de simetría de un sistema y la existencia de una cantidad conservada, interprete físicamente cada una de las ecuaciones de conservación.

(c) Reduzca el problema del movimiento a la resolución de una única cuadratura, utilizando las cantidades conservadas.

(a) Las coordenadas generalizadas que describen el sistema son el ángulo θ que forman los brazos con el eje vertical, y el ángulo φ de la rotación del sistema en su conjunto en torno al eje vertical, de forma que $\dot{\varphi} = \omega$. De esta forma tenemos la ligadura dependiente del tiempo

$$\dot{\varphi} = \omega \quad \longrightarrow \quad \varphi = \omega t \tag{2.6.18}$$

Para obtener el Lagrangiano, en primer lugar fijamos el cero de energía potencial en el punto superior fijo en el eje, de tal forma que la energía potencial del conjunto de masas está dada por la suma de las contribuciones individuales

$$V = -2mgR\cos\theta - 2mg2R\cos\theta = -6mgR\cos\theta \tag{2.6.19}$$

Para obtener la energía cinética, observamos lo siguiente. El movimiento de las dos masas situadas alejadas del eje de giro es la combinación de rotaciones según dos ejes perpendiculares entre sí:

- una rotación en torno al eje vertical con velocidad angular ω, y a una distancia del eje de giro $d = R\,\mathrm{sen}\theta$.
- una rotación alrededor del eje horizontal que pasa por el punto superior en el eje, con velocidad angular $\dot{\theta}$, y a una distancia R del mismo.

Por tanto, su energía cinética será la suma

$$T = 2 \cdot \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\theta}^2 + \omega^2 d^2 \right) = mR^2 \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \text{sen}^2 \theta \right) \tag{2.6.20}$$

Por otro lado, el movimiento de cada una de las masa que desliza sobre el eje es un movimiento rectilíneo, con una coordenada vertical respecto al punto superior y una velocidad lineal dada por

$$y = -2R \cos\theta \quad \longrightarrow \quad \dot{y} = 2R\dot{\theta} \,\text{sen}\, \theta \tag{2.6.21}$$

que corresponde a la energía cinética

$$T = 2 \cdot \frac{1}{2} m \dot{y}^2 = 4mR^2 \dot{\theta}^2 \,\text{sen}^2\, \theta \tag{2.6.22}$$

Concluimos entonces que la energía cinética total del sistema es

$$T = mR^2 \left(\left(1 + 4 \,\text{sen}^2\, \theta \right) \dot{\theta}^2 + \omega^2 \,\text{sen}^2\, \theta \right) \tag{2.6.23}$$

y de aquí el Lagrangiano resulta ser

$$L = T - V = mR^2 \left(\left(1 + 4 \,\text{sen}^2\, \theta \right) \dot{\theta}^2 + \omega^2 \,\text{sen}^2\, \theta \right) + 6mgR \cos\theta \tag{2.6.24}$$

Las ecuaciones del movimiento son dos, la primera es trivial ya que se deduce de la forma de ligadura para la coordenada φ

$$\varphi = \omega t \tag{2.6.25}$$

y la segunda se obtiene de la ecuación de Euler−Lagrange para la coordenada θ:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \tag{2.6.26}$$

Introduciendo el valor del Lagrangiano y realizando la derivada temporal, llegamos a la ecuación del movimiento

$$\left(1 + 4 \,\text{sen}^2\, \theta \right) \ddot{\theta} + \left(4\dot{\theta}^2 - \omega^2 \right) \cos\theta \,\text{sen}\, \theta + 3 \frac{g}{R} \,\text{sen}\, \theta = 0 \tag{2.6.27}$$

(b) Que podamos reducir las dos ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas (θ, φ) a una única ecuación de movimiento para θ más una ligadura se debe a la existencia de una cantidad conservada. Para verlo más fácilmente recuperamos la expresión del Lagrangiano en función de $\dot{\varphi}$ (esto es, sustituyendo $\omega = \dot{\varphi}$):

$$L = mR^2 \left(\left(1 + 4 \,\text{sen}^2\, \theta \right) \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \,\text{sen}^2\, \theta \right) + 6mgR \cos\theta \tag{2.6.28}$$

Observamos entonces que el ángulo φ no está presente, luego es una coordenada cíclica, es decir, el sistema tiene simetría respecto al eje de giro, y por tanto el valor del ángulo φ es irrelevante, mientras que su velocidad satisface como hemos visto, $\dot{\varphi} = \omega$. Dada por tanto la coordenada cíclica φ, a partir de la ecuación de Euler−Lagrange correspondiente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{2.6.29}$$

deducimos que el momento conjugado asociado

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mR^2 \,\text{sen}^2\, \theta \, \dot{\varphi} \tag{2.6.30}$$

es una constante del movimiento:

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad p_\varphi = 2mR^2 \,\text{sen}^2\, \theta \, \omega = \text{cte} = L_z \tag{2.6.31}$$

Dicha constante se identifica físicamente con el momento angular de rotación en torno al eje vertical, L_z. En general, si un sistema tiene simetría respecto a un eje de giro (en este caso vertical), se produce la conservación del momento angular de rotación respecto a dicho eje.
Además, al no depender explícitamente del tiempo el Lagrangiano asociado a la única coordenada generalizada θ, el Hamiltoniano

$$h \equiv \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L \tag{2.6.32}$$

es una cantidad conservada:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad h = \text{cte} \tag{2.6.33}$$

La simetría asociada a esta ley de conservación es, como hemos visto, la independencia del Lagrangiano respecto al tiempo. Es decir, el sistema realiza un movimiento que es independiente del valor del tiempo inicial fijado para su descripción. Como ejemplo contrario, si la velocidad angular de giro de este sistema fuera variable en el tiempo, la descripción del sistema daría distintos resultados dependiendo, por ejemplo, del tiempo transcurrido desde su punto de partida.
Realizando la operación de derivación llegamos a la expresión para el Hamiltoniano conservado

$$h = mR^2\left(\left(1+4\,\text{sen}^2\,\theta\right)\dot{\theta}^2 - \omega^2\,\text{sen}^2\,\theta\right) - 6mgR\cos\theta \tag{2.6.34}$$

que no coincide con la energía mecánica, dada por

$$E = T + V = mR^2\left(\left(1+4\,\text{sen}^2\,\theta\right)\dot{\theta}^2 + \omega^2\,\text{sen}^2\,\theta\right) - 6mgR\cos\theta \tag{2.6.35}$$

y por tanto ésta última, la energía mecánica, no es una cantidad conservada. Su no conservación se debe a la presencia de un acción externa que controla la velocidad angular, para que se mantenga constante en todo tiempo. Dicha acción aunque no es conocida, aporta energía al sistema, de una forma variable en el tiempo. En particular, será necesario aplicar un torque externamente que equilibre el torque interno que se produce con la variación de la velocidad angular de giro. Aunque el detalle de este balance entre la acción externa y el efecto interno no es perceptible, está implícitamente considerado en la ecuación de ligadura $\dot{\varphi} = \omega = \text{cte}$.

(c) La ley de conservación de h

$$h = mR^2\left(\left(1+4\,\text{sen}^2\,\theta\right)\dot{\theta}^2 - \omega^2\,\text{sen}^2\,\theta\right) - 6mgR\cos\theta = \text{cte} \tag{2.6.36}$$

al no depender de $\ddot{\theta}$, elimina matemáticamente la necesidad de resolver la ecuación de movimiento asociada a la variable θ. En su lugar podemos de forma alternativa despejar la velocidad generalizada directamente en la ecuación de conservación anterior, en la forma

$$\sqrt{1+4\,\text{sen}^2\,\theta}\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\text{sen}^2\,\theta\,\omega^2 + \frac{h+6mgR\cos\theta}{mR^2}} \tag{2.6.37}$$

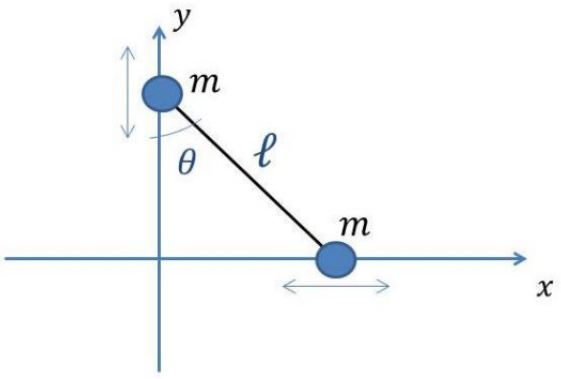
El signo $\pm$ debe elegirse en función de los condiciones iniciales, en particular, del sentido inicial del movimiento, esto es, si $\dot{\theta}$ es mayor o menor que cero en $t = 0$. Y esta ecuación tiene una resolución directa, al menos en forma integral o de cuadratura (i.e. con una expresión integral) en la forma implícita en el tiempo

$$t = \pm\int \frac{\sqrt{1+4\,\text{sen}^2\,\theta}}{\sqrt{\text{sen}^2\,\theta\,\omega^2 + \frac{h+6mgR\cos\theta}{mR^2}}}d\theta \tag{2.6.38}$$

Para cada valor de la constante h, con la resolución de esta integral se obtiene la ley de movimiento $\theta(t)$, por lo que puede decirse que la constante h es la que determina la evolución temporal del sistema. Esta particularidad del Hamiltoniano, por sus implicaciones, es muy relevante en física.

2.6.3. Oscilador con frecuencia dependiente de condición inicial

En el oscilador armónico, la frecuencia ω de oscilación es independiente de la condición inicial del movimiento, mientras que la amplitud o elongación máxima sí depende de ésta. Existen osciladores en los que esta propiedad se invierte, al pasar la frecuencia a ser dependiente de la condición inicial, y ser la amplitud una propiedad característica del sistema. Como ejemplo, se estudia el sistema de la figura, formado por dos masas m unidas por una barra rígida sin masa de longitud ℓ, y obligadas a moverse, sin rozamiento y sin fuerza externa (p.e. movimiento en un plano horizontal), a lo largo de cada eje correspondiente.



(a) Determinar el Lagrangiano del sistema, en función de la coordenada generalizada del sistema. Obtener la ecuación de movimiento, y demostrar que la energía es un cantidad conservada del sistema.

(b) Describir el movimiento general del sistema, y demostrar que la conservación de la energía conlleva que la velocidad de paso por el origen también sea una constante del movimiento.

(c) Demostrar que el movimiento se reduce a un movimiento armónico simple en cada eje. Recordar para ello que según el método Lagrangiano, para analizar el movimiento en las coordenadas no generalizadas debe incorporarse la ecuación de ligadura al Lagrangiano. Con la solución obtenida demostrar finalmente la propiedad descrita en el enunciado: para este sistema, la frecuencia depende de la condición inicial del movimiento, mientras que la amplitud es una constante característica del sistema.

(a) La posición del sistema de masas queda definida dando valor a la única coordenada generalizada, el ángulo θ formado por la barra y el eje y. Las coordenadas x, y de las masas están dadas por

$$x = \ell \operatorname{sen}\theta \quad , \quad y = \ell \cos\theta \tag{2.6.39}$$

y de aquí, por derivación obtenemos sus velocidades

$$\dot{x} = \ell\dot{\theta}\cos\theta \quad , \quad \dot{y} = -\ell\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta \tag{2.6.40}$$

Con esto, la energía cinética tiene la expresión

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 \tag{2.6.41}$$

y en ausencia de fuerzas la energía potencial es constante, e igual a cero. Por tanto, el Lagrangiano es

$$L = T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 \tag{2.6.42}$$

La ecuación de movimiento se obtiene de la ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \tag{2.6.43}$$

con el resultado

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \dot{\theta} = \text{cte} \tag{2.6.44}$$

Es decir, el sistema efectúa una rotación con velocidad angular constante en torno al eje perpendicular a la figura. Además tanto el Lagrangiano como la ligadura del sistema

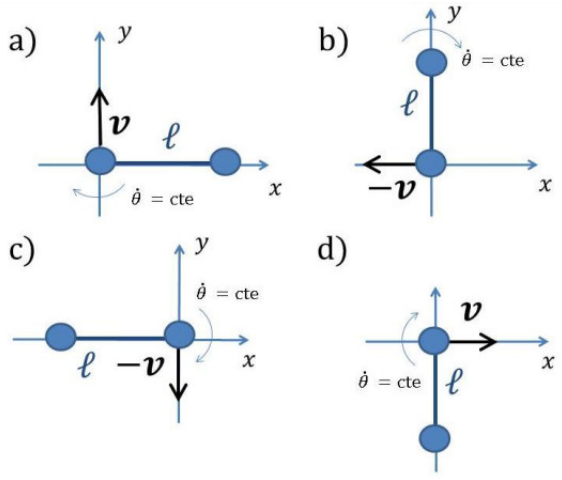
$$x^2 + y^2 = \ell^2 \tag{2.6.45}$$

son independientes del tiempo, por lo que se conserva el Hamiltoniano del sistema, que es igual a la energía total

$$h = E = T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 = \text{cte} \tag{2.6.46}$$

que de nuevo nos lleva a la ecuación del movimiento, $\dot{\theta} = \text{cte}$.

(b) La rotación del sistema puede verse en la figura siguiente



y como puede verse, ℓ resulta ser la amplitud del movimiento en cada uno de los ejes. Hacemos entonces uso de la conservación de la energía, aplicando la ecuación de ligadura. Esto es,

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 = E \quad , \quad x^2 + y^2 = \ell^2 \tag{2.6.47}$$

donde el valor de la energía debe ser obtenido en función de las condiciones iniciales del sistema. Refiriéndonos a la figura anterior, cuando una de las masas está en reposo en la posición de máximo desplazamiento, la otra masa pasa por su posición de equilibrio, situado en el origen de coordenadas, con una velocidad de módulo v. En función de esta velocidad, la energía es

$$\text{cte} = E = 0 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2.6.48}$$

lo que demuestra que la velocidad de paso por el origen también es una constante.

(c) Para determinar cómo es el movimiento oscilatorio de una de las masas, debemos analizar su ecuación de movimiento. Dentro del formalismo Lagrangiano, esto equivale a determinar las ecuaciones de Euler−Lagrange para las dos coordenadas x, y de las dos masas, que se deducen del Lagrangiano extendido

$$L' = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \lambda \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \ell\right) \tag{2.6.49}$$

donde λ es la fuerza de ligadura. La resolución de las ecuaciones correspondientes

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \tag{2.6.50}$$

nos dará la ley del movimiento. Particularizando para la coordenada x obtenemos por derivación de la ecuación de ligadura, la relación

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \quad \longrightarrow \quad \dot{y} = -\frac{x}{y}\dot{x} = -\frac{x}{\pm\sqrt{\ell^2 - x^2}}\dot{x} \tag{2.6.51}$$

y por tanto, la ecuación de conservación de la energía de la masa con coordenada x se escribe

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(\frac{\ell^2}{\ell^2 - x^2}\right) = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2.6.52}$$

Y reordenando los términos

$$\dot{x}^2 + \frac{v^2}{\ell^2}x^2 = v^2 \tag{2.6.53}$$

llegamos a la ecuación para un oscilador armónico, identificando cada término de la ecuación general del oscilador

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2 \tag{2.6.54}$$

Realizando la identificación anterior, vemos que la frecuencia depende de la velocidad de paso por el origen

$$\omega = \frac{v}{\ell} \tag{2.6.55}$$

y por tanto, de las condiciones iniciales del movimiento, mientras que la amplitud del movimiento $A \equiv \frac{v}{\omega}$ está fijada por la ligadura del sistema,

$$A = \frac{v}{\omega} = \ell \tag{2.6.56}$$

que no depende del tiempo, y por tanto, es característica del sistema.

2.6.4. Descripción Lagrangiana del oscilador amortiguado

El Lagrangiano de un movimiento unidimensional viene dado por

$$L = e^{\gamma t} \cdot \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2\right)$$

función de la coordenada q, la velocidad generalizada $\dot{q}$ y el tiempo t.

(a) Obtener la ecuación de movimiento, y determinar a qué sistema corresponde. Describir los distintos movimientos posibles.

(b) Analizar si existe alguna constante del movimiento.

(c) Se define una nueva coordenada para el sistema mediante la transformación de coordenadas

$$Q = e^{\gamma t/2} \cdot q$$

Obtener el nuevo Lagrangiano, y la ecuación de movimiento para la coordenada Q. Analizar el significado físico de dicha transformación. Describir los distintos movimientos posibles ¿Existe ahora alguna constante del movimiento?

(d) Finalmente, en función de los resultados obtenidos, analizar el significado físico de la transformación de coordenadas anterior. ¿Cómo quedan entonces relacionadas las dos descripciones?

(a) La ecuación de movimiento para la coordenada generalizada del sistema se obtiene de la ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{2.6.57}$$

Esto es,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\gamma t} m\dot{q}\right) = -e^{\gamma t} kq \tag{2.6.58}$$

con el resultado

$$e^{\gamma t}\left(\ddot{q} + \gamma\dot{q} + \frac{k}{m}q\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \ddot{q} + \gamma\dot{q} + \frac{k}{m}q = 0 \tag{2.6.59}$$

ecuación de movimiento de un oscilador armónico amortiguado, de frecuencia $\omega = \sqrt{k/m}$.
En todos los casos posibles, dependientes de las condiciones iniciales, se produce un decaimiento exponencial de la amplitud, y el sistema tiende al punto de equilibrio $q = 0$. El movimiento puede ser subamortiguado, si mantiene unas oscilaciones transitorias antes de llegar al punto de equilibrio, o con amortiguación crítica o sobreamortiguado, si llega sin oscilaciones al punto de equilibrio.

(b) El movimiento es unidimensional, el Lagrangiano depende del tiempo y una de las fuerzas (el amortiguamiento) no es conservativa. Por tanto, no se conserva la energía mecánica, definida por

$$E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2 \tag{2.6.60}$$

ni el Hamiltoniano, dado por

$$h = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = e^{\gamma t}\cdot\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2\right) \quad \longrightarrow \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0 \tag{2.6.61}$$

(c) Para la nueva coordenada del sistema, se satisface por derivación

$$\dot{Q} = \frac{\gamma}{2}Q + e^{\gamma t/2}\dot{q} \tag{2.6.62}$$

y de aquí obtenemos la ley inversa de transformación, en la forma

$$q = e^{-\gamma t/2}Q \quad , \quad \dot{q} = e^{-\gamma t/2}\left(\dot{Q} - \frac{\gamma}{2}Q\right) \tag{2.6.63}$$

de forma que el nuevo Lagrangiano (esto es, el Lagrangiano inicial escrito en función de $Q, \dot{Q}, t$) ya no depende del tiempo

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{Q} - \frac{\gamma}{2}Q\right)^2 - \frac{1}{2}kQ^2 \tag{2.6.64}$$

La ecuación de movimiento se obtiene de la ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial Q} \tag{2.6.65}$$

que da lugar tras su desarrollo al resultado final

$$\ddot{Q} + \left(\omega^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right)Q = 0 \tag{2.6.66}$$

que no es más que la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \tag{2.6.67}$$

Cuando $\gamma > 2\omega$, tenemos $\Omega^2 < 0$, y la función $Q(t)$, solución de la ecuación de movimiento, es combinación de dos funciones exponenciales en el tiempo que se alejan o acercan a la posición de equilibrio $Q = 0$, sin realizar oscilaciones.

Cuando $\gamma = 2\omega$, tenemos $\Omega^2 = 0$, y la función $Q(t)$ es una función lineal del tiempo, $A = a + bt$. Finalmente cuando $\gamma < 2\omega$, tenemos $\Omega^2 > 0$, y la función $Q(t)$ realiza oscilaciones armónicas alrededor de su posición de equilibrio $Q = 0$.

Dado que el nuevo Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, el nuevo Hamiltoniano del sistema

$$h = \dot{Q}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} - L \tag{2.6.68}$$

se conserva

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad h = \text{cte} \tag{2.6.69}$$

con la expresión particular

$$h = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}m\Omega^2 Q^2 \tag{2.6.70}$$

que coincide con la energía total del sistema con coordenada Q. Por tanto, la energía es constante, indicativo de que se ha eliminado del movimiento la fuerza no conservativa, procedente del rozamiento.

(d) Podemos concluir que con la transformación de coordenadas se ha eliminado la fuerza no conservativa, por lo que el sistema bajo Q oscila con una amplitud constante. Es la descripción de la parte oscilatoria del sistema.

Además, a partir de la descripción dada en el apartado anterior, al incorporar un simple factor exponencial

$$q = e^{-\gamma t/2}Q \tag{2.6.71}$$

deducimos directamente la descripción del movimiento oscilatorio con amplitud decreciente en el tiempo, esto es, un movimiento que resulta ser sobreamortiguado, con amortiguación crítica, o subamortiguado, dependiendo del valor relativo de los parámetros del sistema γ, ω.

2.6.5. Partícula cargada en campo electromagnético

El Lagrangiano de una partícula de carga eléctrica e y masa m, moviéndose en un campo electromagnético es

$$L = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - e\phi + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}$$

siendo $(\phi, \boldsymbol{A})$ respectivamente los potenciales escalar y vectorial del campo electromagnético.

(a) Evaluar cuál es la relación de los potenciales $(\phi, \boldsymbol{A})$ con los campos eléctrico y magnético $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ para que la ecuación de movimiento resultante por el método Lagrangiano sea la conocida ecuación Newtoniana en presencia de la fuerza de Lorentz sobre la partícula cargada, dada por

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

(b) Demostrar que los campos eléctrico y magnético no varían (y por tanto, no varía la ecuación de movimiento) bajo la siguiente transformación de *calibre* (ó transformación *gauge*) de los potenciales:

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\psi \quad , \quad \phi \to \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

siendo ψ una función arbitraria de las coordenadas y del tiempo.

(a) Para el Lagrangiano dado, la ecuación de movimiento se obtiene a partir de la ecuación de Euler−Lagrange para las coordenadas generalizadas, en este caso, el vector de posición $\boldsymbol{r}$ de la partícula. Se escriben en notación vectorial, con $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{2.6.72}$$

Dado el Lagrangiano del enunciado, obtenemos la ecuación de movimiento de la partícula

$$\frac{d}{dt}\left(m\boldsymbol{v} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) = -e\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}\right) \tag{2.6.73}$$

donde hemos recuperado la notación usual del gradiente $\partial/\partial\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{\nabla}$. Evaluando término a término, vemos que

$$\frac{d}{dt}\left(m\boldsymbol{v}\right) = m\boldsymbol{a} \tag{2.6.74}$$

y que también por la regla de la cadena, dada la dependencia del potencial vector en las coordenadas y el tiempo,

$$\frac{e}{c}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{e}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) \equiv \frac{e}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{A}\right) \tag{2.6.75}$$

Agrupando estos términos, obtenemos la ecuación de movimiento en la forma

$$m\boldsymbol{a} = -e\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{e}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}\left(\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}\right) - \left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{A}\right) \tag{2.6.76}$$

Por las propiedades del operador gradiente, se satisface

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}\right) = \boldsymbol{v}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right) + \boldsymbol{A}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}\right) + \left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{A} + \left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{v} \tag{2.6.77}$$

Dado que por definición, en el formalismo Lagrangiano la velocidad generalizada es independiente de la coordenada, esto es, $\partial\boldsymbol{v}/\partial\boldsymbol{r} = 0$, esta expresión vectorial se reduce a

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}\right) = \boldsymbol{v}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right) + \left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{A} \tag{2.6.78}$$

Por tanto, la ecuación de movimiento se escribe finalmente

$$m\boldsymbol{a} = -e\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{e}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) \tag{2.6.79}$$

Identificando el término de la derecha con la fuerza aplicada con la fuerza de Lorentz encontramos la relación pedida de los potenciales con los campos eléctrico y magnético, en la forma

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \quad , \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \tag{2.6.80}$$

(b) Aplicando ahora la transformación gauge

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\psi \quad , \quad \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{2.6.81}$$

vemos que el nuevo campo eléctrico está dado por

$$\boldsymbol{E}' \equiv -\boldsymbol{\nabla}\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\left(\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\psi) = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{E} \tag{2.6.82}$$

y es efectivamente invariante. El nuevo campo magnético es

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\psi) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} + \cancelto{0}{\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\psi} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \tag{2.6.83}$$

igualmente invariante. Por tanto, la ecuación de movimiento

$$m\boldsymbol{a} = e\boldsymbol{E}' + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}' = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{2.6.84}$$

también se mantiene invariable bajo la transformación gauge.

2.6.6. Transformaciones de escala (M)

Sea la energía potencial de un sistema de n coordenadas generalizadas $V(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ función homogénea de grado m de las coordenadas, es decir, se satisface

$$V(\alpha\cdot q_1, \alpha\cdot q_2, \cdots, \alpha\cdot q_n) = \alpha^m \cdot V(q_1, q_2, \cdots, q_n)$$

para cualquier constante α. Demostrar que entonces con una elección apropiada de la transformación de escala de las coordenadas y el tiempo

$$q_i \to \alpha\cdot q_i \quad , \quad t \to \beta\cdot t$$

el nuevo Lagrangiano del sistema difiere del Lagrangiano inicial en un mera multiplicación por una constante, de forma que las ecuaciones del movimiento quedan invariables. Para ello:

(a) Demostrar primero cómo se transforman las velocidades en tal cambio de escala, y obtener entonces la expresión del nuevo Lagrangiano.

(b) En función del resultado obtenido, determinar cuál debe ser la relación entre el reescalamiento de coordenadas y del tiempo para que las ecuaciones del movimiento permanezcan invariables.

(c) Finalmente comprobar como quedan modificados en este caso el tiempo, la velocidad, la energía y el momento angular en este transformación particular de escala, expresado en función del escalamiento α de las coordenadas.

(a) Para la función potencial dada definida en el enunciado, el Lagrangiano del sistema será en general

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \cdots + \dot{q}_n^2\right) - V\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \tag{2.6.85}$$

función de las coordenadas $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ y las velocidades generalizadas $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n)$. Aplicando un reescalamiento de coordenadas y tiempo en la forma

$$q_i \to \alpha \cdot q_i \quad , \quad t \to \beta \cdot t \tag{2.6.86}$$

donde α, β son constantes, obtenemos de forma directa la ley de transformación de las velocidades

$$\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\left(\alpha \cdot q_i\right)}{d\left(\beta \cdot t\right)} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{dq_i}{dt} = \frac{\alpha}{\beta}\dot{q}_i \tag{2.6.87}$$

Aplicando estas fórmulas deducimos cómo se realiza la transformación de escala para la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \cdots + \dot{q}_n^2\right) \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}m\frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \cdots + \dot{q}_n^2\right) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}T \tag{2.6.88}$$

Para la transformación de la energía potencial, hacemos uso de la propiedad del enunciado para la función homogénea, con el resultado

$$V\left(q_1, q_2, \cdots, q_n\right) \quad \longrightarrow \quad V\left(\alpha \cdot q_1, \alpha \cdot q_2, \cdots, \alpha \cdot q_n\right) = \alpha^m \cdot V\left(q_1, .., q_n\right) \tag{2.6.89}$$

Reuniendo ambos resultados, la transformación del Lagrangiano se escribe

$$L = T - V \quad \longrightarrow \quad \frac{\alpha^2}{\beta^2}T - \alpha^m V \tag{2.6.90}$$

(b) La transformación anterior será igual a la mera multiplicación por una constante

$$L \quad \longrightarrow \quad \text{cte} \cdot L \tag{2.6.91}$$

cuando se satisfaga

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^m \tag{2.6.92}$$

en cuyo caso

$$L \quad \longrightarrow \quad \alpha^m\left(T - V\right) = \alpha^m L \equiv \text{cte} \cdot L \tag{2.6.93}$$

quedando invariables las ecuaciones del movimiento, como comprobamos. Partiendo de la ecuaciones iniciales de Euler−Lagrange se deduce que bajo la transformación de escala elegida se satisface

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{d\left(\beta \cdot t\right)}\left(\frac{\partial\left(\alpha^m \cdot L\right)}{\partial\left(\frac{\alpha}{\beta}\dot{q}_i\right)}\right) = \frac{\partial\left(\alpha^m \cdot L\right)}{\partial\left(\alpha \cdot q_i\right)} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{2.6.94}$$

como puede verse fácilmente quitando los factores comunes en la última expresión anterior.

(c) La condición necesaria vista en el apartado anterior nos da la solución para el reescalamiento β del tiempo en función del grado m de homogeneidad del potencial

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^m \quad \longrightarrow \quad \beta = \alpha^{\frac{2-m}{2}} \tag{2.6.95}$$

Dada la invariancia de las ecuaciones de movimiento bajo esta transformación, la relación anterior es característica de cada sistema analizado, y esto tendrá importantes consecuencias como veremos en el siguiente problema.

Para la velocidad, de la transformación general

$$\dot{q}_i \quad \longrightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta}\dot{q}_i \equiv \gamma \dot{q}_i \tag{2.6.96}$$

deducimos la relación particular entre la escala de la velocidad y la escala de las coordenadas para la invariancia de las ecuaciones del movimiento

$$\gamma \equiv \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha^{\frac{2-m}{2}}} = \alpha^{\frac{m}{2}} \tag{2.6.97}$$

Por otro lado, por su propia definición, la energía mecánica $E = T + V$ tendrá la misma transformación de escala que el Lagrangiano $L = T - V$, en la forma

$$E \quad \longrightarrow \quad \alpha^m (T + V) = \alpha^m \cdot E \equiv \delta \cdot E \tag{2.6.98}$$

con lo que deducimos la relación particular entre la escalas de la energía y la escala de las coordenadas

$$\delta = \alpha^m \tag{2.6.99}$$

Finalmente para el momento angular, a partir de su definición vectorial

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} \times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{q} \times m\dot{\boldsymbol{q}} \tag{2.6.100}$$

obtenemos su ley de transformación de escala

$$\boldsymbol{L} \quad \longrightarrow \quad \alpha \boldsymbol{q} \times m\frac{\alpha}{\beta}\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\alpha^2}{\beta} \cdot \boldsymbol{q} \times m\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\alpha^2}{\beta} \cdot \boldsymbol{L} \equiv \varepsilon \cdot \boldsymbol{L} \tag{2.6.101}$$

con lo que deducimos la relación particular entre la escalas del momento angular y la escala de las coordenadas

$$\varepsilon \equiv \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{\alpha^2}{\alpha^{\frac{2-m}{2}}} = \alpha^{\frac{2+m}{2}} \tag{2.6.102}$$

2.6.7. Leyes de escala para movimientos Newtonianos

Particularizar el análisis realizado en el ejercicio anterior para los siguientes movimientos que cumplen las condiciones fijadas para el potencial:

(a) el movimiento planetario gobernado por el potencial Newtoniano, inversamente proporcional a la coordenada radial.

(b) el movimiento cerca de la superficie terrestre en presencia de un campo gravitatorio constante.

(c) el movimiento armónico simple.

Describir en cada caso las relaciones físicas que se deducen de las relaciones de escala obtenidas.

(a) Para el movimiento planetario, el potencial Newtoniano es inversamente proporcional a la coordenada radial, $V \propto r^{-1}$, por lo que la energía potencial es función homogénea de grado $m = -1$ en la coordenada radial. En este caso, las relaciones de escala anteriores, para el tiempo, la velocidad, la energía y el momento angular, se corresponden con los valores respectivos de los parámetros (para $m = -1$)

$$\beta = \alpha^{3/2} \quad , \quad \gamma = \alpha^{-1/2} \quad , \quad \delta = \alpha^{-1} \quad , \quad \varepsilon = \alpha^{1/2} \tag{2.6.103}$$

Desde el punto de vista físico:

1) La primera relación (entre tiempo y coordenada) establece que $\beta^2 = \alpha^3$, es decir, el tiempo característico del movimiento al cuadrado es proporcional a la longitud característica al cubo, que no es más que la tercera Ley de Kepler para las órbitas planetarias.

2) La segunda relación establece que la velocidad característica es inversamente proporcional a la longitud característica, cuyo ejemplo más sencillo (con una velocidad constante) se da en el caso de una órbita planetaria circular.

3) La tercera relación establece que la energía es inversamente proporcional a la longitud característica, de nuevo de comprobación sencilla en el caso de la órbita circular.

4) La última relación establece que el momento angular es directamente proporcional a la raíz de la longitud característica, de nuevo de comprobación sencilla en el caso de la órbita circular. Como puede observarse, aquí ya no hablamos de valores característicos en el movimiento puesto que tanto la energía como el momento angular tienen valores únicos ya que son cantidades conservadas.

A partir de las relaciones anteriores, pueden obtenerse nuevas relaciones derivadas, por ejemplo, la ley de las áreas ó segunda ley de Kepler que establece que la velocidad areolar v_S es una constante

$$v_S \equiv \frac{dS}{dt} = \frac{L}{2\mu} \tag{2.6.104}$$

siendo S el área barrida por el radio vector de la trayectoria, L el módulo del vector momento angular y μ la masa (reducida) del sistema. Dicha ley proviene de la relación existente entre la escala del momento angular y las escalas de las coordenadas y el tiempo, en la forma

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2}{\beta} \tag{2.6.105}$$

(b) Para el campo gravitatorio en la superficie terrestre, la energía potencial es de la forma $V = mgh$, siendo h la altura, y por tanto es función homogénea de grado $m = 1$ en la coordenada vertical. En este caso particular, las relaciones de escala anteriores para el tiempo, la velocidad, la energía y el momento angular se corresponden con los valores respectivos de los parámetros (para $m = 1$)

$$\beta = \alpha^{1/2} \quad , \quad \gamma = \alpha^{1/2} \quad , \quad \delta = \alpha \quad , \quad \varepsilon = \alpha^{3/2} \tag{2.6.106}$$

Desde el punto de vista físico:

1) La primera relación establece que $\beta^2 = \alpha$, es decir, el tiempo característico al cuadrado es proporcional a la longitud característica, que no es más que la relación espacio-tiempo del movimiento uniformemente acelerado, con $s \propto a \cdot t^2/2$.

2) La segunda relación establece que la velocidad característica es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud característica, como puede comprobarse fácilmente ya que para el movimiento uniformemente acelerado, $v \propto \sqrt{a \cdot s}$.

3) La tercera relación establece que la energía es directamente proporcional a la longitud característica, como puede verse fácilmente al calcular la energía, en particular tomando el punto más alto de la trayectoria, $E = T + V = 0 + mgH$.

4) La última relación ahora no tiene un significado físico directo en este caso ya que el momento angular es idénticamente nulo (el movimiento es unidimensional), luego el factor de escala puede tener cualquier valor. Queda fuera de esta discusión el movimiento en dos dimensiones (x, y) bajo la acción de la gravedad en la dirección y, ya que en ese caso el potencial no sería homogéneo en las dos coordenadas del movimiento (x, y).

(c) Para el movimiento armónico simple, la energía potencial es de la forma $V = \frac{1}{2}kx^2$, donde x es el desplazamiento respecto al punto de equilibrio, y por tanto es una función homogénea de grado $m = 2$ en la coordenada x. En este caso particular, las relaciones de escala anteriores para el tiempo, la velocidad, la energía y el momento angular se corresponden con los valores respectivos de los parámetros (para $m = 2$)

$$\beta = \text{cte} \quad , \quad \gamma = \alpha \quad , \quad \delta = \alpha^2 \quad , \quad \varepsilon = \alpha^2 \tag{2.6.107}$$

Desde el punto de vista físico:

1) La primera relación establece que $\beta = \text{cte}$, es decir, el tiempo característico es independiente de la longitud característica. Ya que el tiempo característico del movimiento es el periodo de oscilación y la longitud característica del movimiento armónico resulta ser la amplitud A, la primera relación no es más que la independencia del periodo del movimiento con la amplitud.

2) La segunda relación establece que la velocidad característica es directamente proporcional a la longitud característica, como puede comprobarse fácilmente a partir de la ley de movimiento $x = A \cdot \cos \omega t$, con $v \propto A \cdot \omega$.

3) La tercera relación establece que la energía es directamente proporcional al cuadrado de la longitud característica, como puede comprobarse fácilmente cuando analizamos la energía en los puntos más alejados de la trayectoria, $E = T + V = 0 + \frac{1}{2}kA^2$.

4) La última relación no tiene un significado físico directo ya que al ser el movimiento unidimensional el momento angular es idénticamente nulo, luego el factor de escala puede tener cualquier valor.

2.6.8. Lagrangiano de la partícula libre (M)

Para describir el movimiento de una partícula libre se propone utilizar el método de Lagrange desde primeros principios. Para ello se define un Lagrangiano sin especificar (i.e lo más general posible), función de las coordenadas cartesianas, las velocidades y el tiempo

$$L = L(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$$

(a) Utilizando el principio de relatividad de Galileo, y el concepto de sistema inercial, demostrar que necesariamente el Lagrangiano para la partícula libre debe ser de la forma

$$L = L(v)$$

siendo v el módulo de la velocidad. Para ello hacer uso de las propiedades de homogeneidad e isotropía del espacio, que definen la física clásica.

(b) Sabiendo además que las ecuaciones de movimiento se mantienen invariables bajo la transformación del Lagrangiano

$$L' = L + \frac{df}{dt}$$

siendo f una función arbitraria de las coordenadas y el tiempo, demostrar que el Lagrangiano de una partícula libre debe tener la forma específica

$$L = a \cdot v^2$$

siendo a una constante.

(a) El principio de relatividad de Galileo establece que las ecuaciones de movimiento de un sistema son las mismas respecto al sistema de coordenadas de dos observadores que se mueven entre sí a velocidad constante. La transformación de las coordenadas y el tiempo de los observadores se escribe

$$t = t' \quad , \quad \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{V} \quad , \quad \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{V}t \tag{2.6.108}$$

siendo $\boldsymbol{V}$ su velocidad relativa.
Desde el punto de vista Lagrangiano, esta invariancia se debe conservar en las ecuaciones de Euler−Lagrange en los dos sistemas de coordenadas

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}'}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}'} \tag{2.6.109}$$

como podemos comprobar fácilmente aplicando la transformación anterior.

Analizamos ahora el caso del enunciado, de una partícula libre. En un sistema inercial, la partícula libre mantiene su estado de movimiento; por ejemplo, si inicialmente está en reposo, se mantiene siempre en reposo. Para que sea así, el sistema inercial debe tener dos propiedades fundamentales, el tiempo debe ser homogéneo y el espacio debe ser isótropo. Si cualquiera de las dos propiedades falla, no puede asegurarse que se mantiene el estado de movimiento de la partícula libre. Se producirían aceleraciones de la partícula, derivadas de la inhomogeneidad del tiempo o la anisotropía del espacio, y no podría mantener su estado de movimiento en ausencia de fuerzas externas.
Necesariamente entonces, por homogeneidad e isotropía, el movimiento de la partícula es independiente del tiempo y de la posición en el espacio. Si no fuera así, existiría un tiempo y un punto en el espacio destacados del resto, y no se podría mantener el estado del movimiento en su vecindad.

Como consecuencia, desde el punto de vista Lagrangiano, es el Lagrangiano L el que necesariamente debe ser independiente del tiempo y el espacio. Por tanto, debe tener la forma funcional

$$L = L(\boldsymbol{v}) \tag{2.6.110}$$

La isotropía del espacio indica además que todas las direcciones espaciales son equivalentes: el movimiento de la partícula libre es el mismo independientemente de su dirección de movimiento. Necesariamente el Lagrangiano sólo puede depender del módulo de la velocidad, no de su dirección en el espacio, por lo que se obtiene el resultado del enunciado

$$L = L(v) \tag{2.6.111}$$

(b) Pasamos a analizar por tanto bajo qué condiciones se puede definir la transformación del Lagrangiano entre dos sistemas inerciales, que se mueven entre sí con velocidad constante. Esto es, buscamos una función arbitraria f tal que

$$L(v) = L(v') + \frac{df}{dt} \tag{2.6.112}$$

siendo

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{V} \quad , \quad v'^2 = v^2 + V^2 + 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V} \tag{2.6.113}$$

Por simplicidad, es suficiente analizar el caso de una velocidad relativa entre los dos sistemas lo suficientemente pequeña, como para despreciar el término cuadrático en V, de forma que

$$v'^2 \approx v^2 + 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V} \tag{2.6.114}$$

En este caso además, el Lagrangiano admitiría el desarrollo en potencias del incremento de velocidad, con la forma en primer orden

$$L(v') \approx L(v) + \left(\frac{dL}{dv}\right)\cdot\Delta v \tag{2.6.115}$$

siendo

$$\Delta v = v' - v \approx \sqrt{v^2 + 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}} - v \approx v\left(1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}}{v^2}\right) - v = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}}{v} \tag{2.6.116}$$

Con esto, la condición de invariancia bajo esta transformación del Lagrangiano

$$L(v') = L(v) + \left(\frac{dL}{dv}\right)\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}}{v} \equiv L(v) + \frac{df}{dt} \tag{2.6.117}$$

nos lleva a la identificación de la función desconocida, dado que se satisface

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{dL}{dv}\right)\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V}}{v} \tag{2.6.118}$$

Ahora bien, dado que la velocidad de la partícula está dada por

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{2.6.119}$$

esta identificación podrá ser posible, siempre que el lado derecho sea una función lineal de la velocidad, en la forma $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$, en cuyo caso la función f estará dada por

$$f = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r} \tag{2.6.120}$$

y quedará satisfecha la condición de invariancia, al ser

$$L(v') = L(v) + \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r}\right) \tag{2.6.121}$$

salvo términos de orden superior.

En conclusión, hemos llegado a la condición

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} = \left(\frac{dL}{dv}\right) \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{V}}{v} \tag{2.6.122}$$

para $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{V}$ arbitrarios. Tal condición para L exige que se satisfaga la condición adicional

$$\frac{dL}{dv} = \text{cte} \cdot v \tag{2.6.123}$$

y por su integral directa, obtenemos el resultado pedido

$$L = a \cdot v^2 \tag{2.6.124}$$

Lógicamente la constante a está relacionada con la masa, $a = m/2$, aunque es irrelevante su valor. Este hecho es una confirmación de que la masa, como tal, no tiene un papel relevante en la dinámica de una partícula libre.

2.7. Ejercicios de Autoevaluación

2.7.1. Movimiento en un tunel terrestre

Considere el movimiento sin rozamiento de una partícula puntual de masa m a lo largo de un túnel recto en el interior de la Tierra. Tome la expresión

$$U = \frac{1}{2} m g \frac{r^2}{R} \tag{2.7.1}$$

para la energía potencial gravitatoria de la masa puntual, siendo g el valor de la gravedad en la superficie terrestre, r la coordenada radial desde el centro de la Tierra, y R el radio terrestre.

(a) Demuestre en primer lugar que si la masa parte del reposo desde la superficie terrestre realizará un movimiento armónico simple a lo largo del túnel. Obtenga el valor del periodo de oscilación, y demuestre que no depende de la distancia entre los puntos inicial y final del tunel.

(b) Considere ahora que el túnel está curvado y definido en coordenadas polares por la ecuación $r = r(\theta)$. Plantee un problema variacional para encontrar la forma del túnel que da lugar a un tiempo mínimo de movimiento entre los puntos extremos. Determine una integral primera de la ecuación de Euler−Lagrange resultante.

(c) Resuelva la ecuación de movimiento a partir de la integral primera introduciendo el parámetro de la curva ϕ tal que

$$\tan\phi = \sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2}} \tag{2.7.2}$$

siendo r_0 la distancia de máximo acercamiento radial al centro de la Tierra. Demuestre que la solución es una *hipocicloide*, y que en particular el parámetro ϕ a lo largo de la curva varía linealmente con el tiempo.

Sol:

(a) $E = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m\frac{g}{R}s^2 \quad , \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

(b) $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = \text{cte}\frac{r^4}{R^2 - r^2}$

(c) $\tan\phi = \sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2}} \quad , \quad \tan\left(\theta + \frac{r_0}{R}\phi\right) = \frac{r_0}{R}\tan\phi \quad , \quad \phi = 2\pi\frac{t}{T}$

2.7.2. Sistema dinámico con dos grados de libertad

En un sistema dinámico de dos grados de libertad (q_1, q_2), la energía cinética está dada por la función de las coordenadas y las velocidades generalizas $(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$

$$T = \frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{A + B \cdot q_2} + \frac{1}{2}q_2^2 \cdot \dot{q}_2^2$$

y la energía potencial está dada por la función de las coordenadas

$$V = C + D \cdot q_2$$

siendo A, B, C, D constantes.

(a) Utilizando el método Lagrangiano, obtener las ecuaciones del movimiento, y analizar la existencia o no de cantidades conservadas.

(b) Utilizar las cantidades conservadas obtenidas para reducir la complejidad de las ecuaciones de movimiento, y resolverlas al menos en forma de cuadratura (esto es, en forma de una integral).

Sol:

(a) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{q}_1}{A + Bq_2}\right) = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(q_2^2\dot{q}_2\right) = q_2\dot{q}_2^2 - \frac{1}{2}\frac{B\dot{q}_1^2}{(A + Bq_2)^2} - D$

$p_1 = \frac{\dot{q}_1}{A + Bq_2} = \text{cte} \quad , \quad h = \frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{A + B \cdot q_2} + \frac{1}{2}q_2^2 \cdot \dot{q}_2^2 + C + Dq_2 = T + V = E = \text{cte}$

(b) $t = \int \frac{q_2}{\sqrt{2Fq_2 + G}}dq_2 \quad , \quad F \equiv -\frac{1}{2}Bp_1^2 - D \quad , \quad G \equiv \left(q_2^2\dot{q}_2^2 - 2Fq_2\right)_{t=0}$

$q_1 = Ap_1t + B\int q_2(t)dt$

2.8. Apéndice A. Cálculo simbólico y numérico

2.8.1. Cálculo simbólico con Maxima

El uso del cálculo simbólico en general es un método útil que nos permite minimizar los posibles errores algebraicos en la manipulación de las fórmulas matemáticas. La referencia básica para aprender el uso del programa Maxima en el área de la Mecánica clásica es el libro

- *Classical Mechanics with Maxima* de los autores Todd Keene Timberlake y J. Wilson Mixon, Jr., Editorial Springer, 2016

En el Apéndice final pueden encontrar la ejecución de los programas de Maxima elaborados por el equipo docente de los ejercicios seleccionados, en los que el cálculo simbólico sirve para reducir la complejidad matemática de la resolución.

2.8.2. Esquemas de integración numérica

Dado que los métodos numéricos no forman parte del contenido de la asignatura, la mayoría de los ejercicios resueltos tienen una resolución analítica directa que evita la necesidad de una resolución numérica. No obstante, hay situaciones en las que tener un buen esquema numérico puede favorecer una comprensión más rápida de los problemas abordados, generalmente complejos. Uno de estos ejemplos es el análisis adiabático, y por extensión problemas en los que tengamos dos escalas de tiempo bien diferenciadas, una evolución lenta y una evolución rápida, como por ejemplo en física atmosférica.
Como ejemplo característico fundamental analizamos aquí el movimiento oscilatorio simple, solución de la ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{2.8.1}$$

ó de forma equivalente solución de las dos EDO de primer orden

$$\dot{x} = y \quad , \quad \dot{y} = -\omega^2 x \tag{2.8.2}$$

El movimiento oscilatorio es sencillo de interpretar pero numéricamente complicado para integrar, dado que debe asegurarse que se mantiene una amplitud constante en cada periodo. Es obligatorio por ello utilizar una integración numérica con un paso adaptativo, que nos permita controlar la precisión numérica localmente, esto es, paso a paso. Para ello pueden utilizarse dos esquemas Runge-Kutta de orden 4 en cada paso, corrigiendo el paso de integración en función del error relativo cometido entre ellos. Con esto podremos integrar de forma sencilla el movimiento oscilatorio de frecuencia constante. En detalle:

Esquema Runke-Kutta de orden 4 El esquema de Runge-Kutta de orden 4 para la integración de la EDO de primer orden general

$$\dot{y} = f(y, t) \tag{2.8.3}$$

está dado por los puntos $y_j \equiv y(t_j)$, que satisfacen las relaciones de recurrencia

$$y_{j+1} = y_j + C_1 y_{1j} + C_2 y_{2j} + C_3 y_{3j} + C_4 y_{4j} + C_5 y_{5j} + C_6 y_{6j} \tag{2.8.4}$$

donde $C_1, .., C_6$ son constantes, y las funciones $y_{1j}, .., y_{6j}$ están dadas por las expresiones

$$\begin{aligned}
y_{1j} &= h f(y_j, t_j + A_1 h) \\
y_{2j} &= h f(y_j + B_{21} y_{1j}, t_j + A_2 h) \\
y_{3j} &= h f(y_j + B_{31} y_{1j} + B_{32} y_{2j}, t_j + A_3 h) \\
y_{4j} &= h f(y_j + B_{41} y_{1j} + B_{42} y_{2j} + B_{43} y_{3j}, t_j + A_4 h) \\
y_{5j} &= h f(y_j + B_{51} y_{1j} + B_{52} y_{2j} + B_{53} y_{3j} + B_{54} y_{4j}, t_j + A_5 h) \\
y_{6j} &= h f(y_j + B_{61} y_{1j} + B_{62} y_{2j} + B_{63} y_{3j} + B_{64} y_{4j} + B_{65} y_{5j}, t_j + A_6 h)
\end{aligned} \tag{2.8.5}$$

donde h es el paso de integración, esto es, $t_{j+1} = t_j + h$, y donde los valores A_n, B_{mn} son otras constantes numéricas por resolver. Estas constantes, junto con las constantes C_n anteriores, se eligen para que el esquema de integración sea de orden 4, esto es, la recurrencia anterior corresponda al desarrollo de Taylor de orden h^4 alrededor de cada punto, de forma que el error cometido al truncar el desarrollo sea de orden $O(h^5)$. Estos valores pueden seleccionarse directamente de las referencias publicadas sobre este método de integración, o elaborando un programa de cálculo propio para su determinación. En particular, en nuestro caso utilizaremos los valores

$$A_1 = 0\ ,\ A_2 = \frac{1}{5}\ ,\ A_3 = \frac{3}{10}\ ,\ A_4 = \frac{3}{5}\ ,\ A_5 = 1\ ,\ A_6 = \frac{7}{8} \tag{2.8.6}$$

y

$$\begin{aligned}
&B_{21} = \frac{1}{5} \\
&B_{31} = \frac{3}{40}\ ,\ B_{32} = \frac{9}{40} \\
&B_{41} = \frac{3}{10}\ ,\ B_{42} = -\frac{9}{10}\ ,\ B_{43} = \frac{6}{5} \\
&B_{51} = -\frac{11}{54}\ ,\ B_{52} = \frac{5}{2}\ ,\ B_{53} = -\frac{70}{27}\ ,\ B_{54} = \frac{35}{27} \\
&B_{61} = \frac{1631}{55296}\ ,\ B_{62} = \frac{175}{512}\ ,\ B_{63} = \frac{575}{13824}\ ,\ B_{64} = \frac{44275}{110592}\ ,\ B_{65} = \frac{253}{4096}
\end{aligned} \tag{2.8.7}$$

junto a

$$C_1 = \frac{37}{378}\ ,\ C_2 = 0\ ,\ C_3 = \frac{250}{621}\ ,\ C_4 = \frac{125}{594}\ ,\ C_5 = 0\ ,\ C_6 = \frac{512}{1771} \tag{2.8.8}$$

Paso adaptativo Como hemos indicado, el esquema de integración nos permite obtener fórmulas exactas hasta orden h^5. Esto quiere decir que si ejecutamos dos integraciones independientes (esto es, con distintos valores de las constantes A, B, C) para obtener dos soluciones y e y^* en cada punto, el valor absoluto de su diferencia en cada punto será del orden

$$|y - y^*|_j \propto h^5 \tag{2.8.9}$$

o de otra forma, que

$$r \equiv \frac{|y - y^*|}{h} \propto h^4 \tag{2.8.10}$$

Esta propiedad de las soluciones nos permite definir un *factor de escala* en cada punto en la forma

$$\Gamma \equiv c \cdot \left(\frac{r_{max}}{r}\right)^{1/4} \tag{2.8.11}$$

siendo r_{max} la precisión máxima recomendada en cada paso (para detectar posibles singularidades), de forma que

$$h' = \Gamma \cdot h \tag{2.8.12}$$

sea el paso corregido para la siguiente recurrencia. El factor numérico c debe ser de orden unidad, y su valor exacto no es relevante. En nuestro caso elegimos $c = 0{,}84$, y para la segunda integración podemos escoger los mismos valores para las constantes A, B, esto es, $A^* = A$, $B^* = B$, y los valores para las constantes C^* independientes de los valores C, en la forma

$$C_1^* = \frac{2825}{27648}\ ,\ C_2^* = 0\ ,\ C_3^* = \frac{18575}{48384}\ ,\ C_4^* = \frac{13525}{55296}\ ,\ C_5^* = \frac{277}{14336}\ ,\ C_6^* = \frac{1}{4} \tag{2.8.13}$$

Factor de escala Analizando la expresión del factor de escala, vemos que si la integración se comporta de forma suave, esto es, r es mucho menor que la precisión máxima el factor de escala es mayor que la unidad y podemos aplicar un paso h mayor de forma segura. En el caso contrario, si r es mayor que r_{max} estaremos integrando por encima del rango recomendado, el factor de escala será menor que la unidad, y tendremos que disminuir h. En todo caso, debemos asegurar que el factor de escala no se aleja de un cierto rango $(\Gamma_{min}, \Gamma_{max})$ de forma que fijamos el valor $\Gamma = \Gamma_{\text{mín}}$ si $\Gamma < \Gamma_{min}$, y el valor $\Gamma = \Gamma_{max}$ si $\Gamma > \Gamma_{max}$. Además debemos establecer un paso mínimo admisible h_{min} de forma que si alcanzamos o superamos este valor mínimo podemos considerar que el sistema presenta una singularidad en ese punto de integración no resoluble numéricamente, esto es, $|y - y^*|$ se mantiene finito para valores h arbitrariamente pequeños. En particular, en nuestro caso tomamos los valores generales

$$r_{max} = 10^{-6} \quad , \quad h_0 = r_{max}^{1/4} \quad , \quad h_{min} = 10^{-4} h_0 \tag{2.8.14}$$

siendo h_0 el valor inicial del paso de integración, junto con los factores de escala

$$\Gamma_{min} = \frac{1}{10} \quad , \quad \Gamma_{max} = 10 \tag{2.8.15}$$

Ejemplo. Oscilador armónico Como ejemplo, presentamos de forma gráfica el resultado de la integración de la EDO del oscilador armónico de frecuencia unidad, $\omega = 1$,

$$\dot{x} = y \quad , \quad \dot{y} = -x \tag{2.8.16}$$

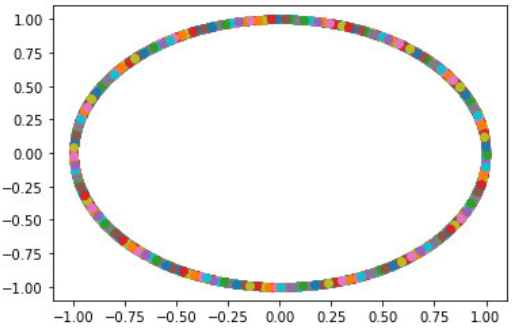
sujeto a las condiciones iniciales

$$x(0) = 1 \quad , \quad y(0) = 0 \tag{2.8.17}$$

Para este sistema de dos EDO de orden uno, el factor de escala debe definirse en la forma conjunta (para la integración de la coordenada x y la velocidad y)

$$r \equiv \frac{1}{h} \operatorname{máx} \left(|x - x^*|, |y - y^*| \right) \quad , \quad \Gamma \equiv c \cdot \left(\frac{r_{max}}{r} \right)^{1/4} \tag{2.8.18}$$

Como muestra la figura, que representa el movimiento en el *espacio de fases* (x, y) a lo largo del tiempo $t \sim NT$ siendo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$ el periodo del oscilador, y $N \sim 100$, la integración numérica muestra una amplitud constante del movimiento, que no se alcanzaría con una integración de paso h constante.



2.9. Apéndice B. Resolución ligadura dependiente del tiempo

Resolución del problema dependiente del tiempo Aunque el problema no sea resoluble mediante el formalismo Lagrangiano podemos resolverlo aplicando otra metodología, en particular, la extensión del formalismo a espacios de dimensión superior. Para ello necesitamos definir lo siguiente:

- Si (q,t) en general es el denominado *espacio de configuración* del sistema (espacio donde podemos definir la trayectoria $q(t)$), el espacio $(q,\dot{q},t)$ es el espacio ampliado (*jet bundle*) donde podemos definir el Lagrangiano $L(q,\dot{q},t)$. La ecuación de movimiento corresponde a la ecuación de Euler−Lagrange

$$E[L] = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \tag{2.9.1}$$

  siendo d/dt el operador de derivación temporal definido en este espacio ampliado

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial}{\partial q} + \ddot{q}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \tag{2.9.2}$$

- Desde el punto de vista dinámico, las ligaduras definen las ecuaciones de la superficie sobre la que se mueve el sistema. O dicho de otra forma, la trayectoria del sistema es tangente a la superficie de ligadura. Es por ello que si la ligadura depende de (q,t) el espacio ampliado debe contener las velocidades $\dot{q}$, ya que sirven para definir esta dirección tangente. Sin embargo, si las ligaduras dependen de las velocidades, la superficie de ligadura tendrá un tangente en la dirección $\ddot{q}$, por lo que en este caso será necesario recurrir al espacio ampliado del espacio ampliado, esto es, $(q,\dot{q},\ddot{q},t)$ (que por ello se denominan respectivamente $2-$*jet bundle* y $1-$*jet bundle*).

- Si $\phi = 0$ es la condición genérica de ligadura, que determina implícitamente ecuación de la superficie de la ligadura, la trayectoria del sistema, tangente a la superficie, deberá ser compatible con la condición

$$\frac{d}{dt}\phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial \phi}{\partial q} + \ddot{q}\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{2.9.3}$$

  Esto es, los coeficientes $(\dot{q},\ddot{q})$ en esta ecuación deben identificarse con la velocidad y aceleración del sistema en su trayectoria.

- En el caso de una ligadura holónoma los términos anteriores no contienen el término proporcional a la aceleración, por lo que es posible incorporar esta ecuación como una modificación al Lagrangiano. Cuando la ligadura es no holónoma, el término proporcional a la aceleración no permite modificar el Lagrangiano, y es la ecuación de Euler−Lagrange la que debe incorporarse, mediante una proyección, a la ecuación $d\phi/dt = 0$. Con ello podremos identificar cuál resulta ser la expresión de $\ddot{q}$, esto es, la aceleración del sistema que determina su movimiento en presencia de la ligadura.

Por tanto, la resolución del problema estará dada por la proyección de la ecuación de movimiento *libre* $E[L]$ (sin tener en cuenta la ligadura) sobre la dirección tangente a la superficie de ligadura. La cuestión clave por tanto es cómo determinar dicha proyección, esto es, cómo pasar de $d\phi/dt = 0$ a $P[\phi] = 0$. Lo determinamos en el caso particular anterior de la curva de persecución, para el Lagrangiano libre

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \tag{2.9.4}$$

y la ligadura no holónoma escrita en la forma $\phi = 0$, esto es

$$\phi = y\dot{x} + \left(f(t) - x\right)\dot{y} = 0 \tag{2.9.5}$$

El resultado se define en la siguiente forma. La ecuación de Euler−Lagrange se escribe en la forma ampliada, teniendo en cuenta la ligadura no holónoma,

$$\tilde{E}[L] = E[L] + Z[L] = -\mu \quad , \quad E[L] = 0 \quad , \quad Z[L] = -\mu \tag{2.9.6}$$

donde L es el Lagrangiano libre, y $Z[L]$ es la contribución proveniente de la *fuerza generalizada* de ligadura, que escribimos directamente

$$\mu = \phi \tag{2.9.7}$$

Además el proyector $P[\cdot]$ está dado por la expresión funcional

$$P[\cdot] = \frac{d\phi}{dt} \cdot \left(\mathbb{1} - \frac{Z[\cdot]}{Z[\phi]} \right) \tag{2.9.8}$$

donde la derivada de ϕ se refiere al espacio de configuración, esto es,

$$\frac{d\phi}{dt} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{2.9.9}$$

con lo que se satisfacen las premisas de partida:

- El movimiento del sistema se realiza manteniendo nulo el valor de la ligadura

$$P[\phi] = \frac{d\phi}{dt} \cdot \left(\mathbb{1} - \frac{Z[\phi]}{Z[\phi]} \right) = 0 \tag{2.9.10}$$

  y se realiza en presencia de la ligadura, como indica el formalismo Lagrangiano,

$$\tilde{E} = -\mu \tag{2.9.11}$$

- Cuando la ligadura es holónoma, $Z \equiv 0$, y se obtiene el resultado esperado del formalismo Lagrangiano

$$E[L] = 0 \quad , \quad P[\phi] = \frac{d\phi}{dt} = 0 \tag{2.9.12}$$

Aplicando esta formulación, obtenemos para la curva de persecución

$$Z[L] = -\phi = -y\dot{x} - (f(t) - x)\,\dot{y} \Rightarrow Z[\cdot] = -\frac{y}{m}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{f-x}{m}\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \tag{2.9.13}$$

y por tanto, respecto a ϕ, obtenemos el valor

$$Z[\phi] = -\frac{y}{m}\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}} - \frac{f-x}{m}\frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}} = -\frac{1}{m}\left((x-f)^2 + y^2 \right) \tag{2.9.14}$$

Para obtener ahora el valor del proyector, introducimos el valor de $d\phi/dt$ en el espacio de configuración

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial \phi}{\partial y} = f'(t)\dot{y} \tag{2.9.15}$$

lo que nos lleva a la expresión final del operador $P[\cdot]$

$$P[\cdot] = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{y\dot{y}}{(x-f(t))^2 + y^2} f' \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \frac{(x-f(t))\,\dot{y}}{(x-f(t))^2 + y^2} f' \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \tag{2.9.16}$$

Identificando en esta expresión las aceleraciones $\ddot{x}, \ddot{y}$ del sistema como los coeficientes de $\partial/\partial\dot{x}$ y $\partial/\partial\dot{y}$ respectivamente, obtenemos la ley de movimiento del sistema en presencia de la ligadura, en la forma

$$\ddot{x} = -\frac{y\dot{y}}{(x-f(t))^2 + y^2} f' \quad , \quad \ddot{y} = \frac{(x-f(t))\,\dot{y}}{(x-f(t))^2 + y^2} f' \tag{2.9.17}$$

2.10. Apéndice C. Sistemas dinámicos

Describimos aquí la aplicación del formalismo Lagrangiano a los denominados *sistemas dinámicos*, conjunto de ecuaciones que describen la evolución de las coordenadas de un sistema en función del tiempo, $x(t)$. Esta aplicación no es general ya que existirán sistemas dinámicos definidos por unas ecuaciones diferenciales de movimiento para $x(t)$ que no son derivables a partir de un Lagrangiano, esto es, las ecuaciones de movimiento no admiten la estructura de las ecuaciones

de Euler−Lagrange. Pero cuando es posible, la obtención del Lagrangiano permite aplicar el formalismo completo al sistema dinámico, y en particular se pueden determinar sus constantes de movimiento con la aplicación del teorema de Noether. Es lo que constituye el denominado *problema inverso*: la obtención, si es factible, del Lagrangiano asociado al sistema dinámico que determina sus ecuaciones de movimiento.

Una vez definido el Lagrangiano generalizado la ecuación del movimiento del sistema dinámico se obtiene de la forma estándar aplicando el principio de la Acción estacionaria. En general el Lagrangiano generalizado dependerá de coordenadas, velocidades o incluso de derivadas de orden superior, por lo que no necesariamente tiene una naturaleza mecánica, esto es, no queda definido en función de una energía cinética y potencial en la forma $L = T - V$.

2.10.1. Caso práctico. Lagrangiano generalizado $L(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$

Consideremos un ejemplo sencillo de un Lagrangiano generalizado que tiene una dependencia adicional con la aceleración del sistema $\ddot{x}$. Analizamos cuál debe ser la ecuación correspondiente de Euler−Lagrange que se deriva del principio de Acción estacionaria.

Acción estacionaria Analizamos por tanto la variación de la acción S, correspondiente a una variación arbitraria de $x(t)$. Ya que el tiempo t es un parámetro para cada trayectoria, la variación de la acción es directamente

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) dt \tag{2.10.1}$$

considerando la variación del Lagrangiano en la forma

$$\delta L \equiv \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\delta \ddot{x} \tag{2.10.2}$$

Como t no actúa como variable independientes, la derivada temporal y la variación son operadores intercambiables, por lo que

$$\delta \dot{x} = \frac{d}{dt}\delta x \quad , \quad \delta \ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}\delta x \tag{2.10.3}$$

Con la aplicación de este resultado podemos escribir la variación de la acción en la forma extendida

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\frac{d^2}{dt^2}\delta x \right) dt \tag{2.10.4}$$

Como primer paso integramos por partes el segundo término, teniendo en cuenta que sobre los límites de integración t_1, t_2 la variación de la trayectoria debe ser nula, $\delta x = 0$. Obtenemos la variación de la acción en la forma

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\frac{d^2}{dt^2}\delta x \right) dt + \cancelto{0}{\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\delta x\Big|_{t_1}^{t_2}} \tag{2.10.5}$$

Como último paso realizamos la integración por partes dos veces del término restante con el resultado parcial

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\frac{d^2}{dt^2}\delta x dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\frac{d\delta x}{dt}dt + \cancelto{0}{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d\delta x}{dt}\Big|_{t_1}^{t_2}} \tag{2.10.6}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\delta x dt - \cancelto{0}{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\delta x\Big|_{t_1}^{t_2}} \tag{2.10.7}$$

teniendo en cuenta que sobre los límites de integración también la derivada temporal $\frac{d}{dt}\delta x$ de la variación de la trayectoria debe ser nula, por ser el Lagrangiano dependiente de la derivada de segundo orden $\ddot{x}$ de la trayectoria.

Ecuación de Euler−Lagrange Agrupando los resultados, obtenemos la variación de la acción en su forma final

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\right) \delta x dt \tag{2.10.8}$$

El principio de Acción estacionaria establece que dicha variación es cero para la trayectoria real, elegida entre todas las trayectorias compatibles con las condiciones frontera, en este caso tanto para la posición x como para la velocidad $\dot{x}$. Dado que se exige $\delta S = 0$, para todo δx arbitrario y compatible, la única solución es que se anule idénticamente el integrando, de forma que la trayectoria real descrita por el sistema satisface

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right) = 0 \tag{2.10.9}$$

que constituye la ecuación de Euler−Lagrange del movimiento del sistema.

Teorema de Noether Analizamos finalmente la expresión del teorema de Noether para este tipo de Lagrangiano. Recordamos que este teorema relaciona las cantidades conservadas del movimiento con el tipo de simetría que se conserva en el sistema. Supongamos que bajo la transformación infinitesimal de las coordenadas y el tiempo

$$t \to t' = t + \delta t \quad , \quad x(t) \to x'(t') \tag{2.10.10}$$

no varía la integral de acción para una trayectoria dada. Veamos qué consecuencias podemos extraer de esta simetría.

La variación de la acción debido a esta transformación de coordenadas es ahora

$$\delta S = \int L\left(x', \frac{dx'}{dt'}, \frac{d^2x'}{dt'^2}, t'\right) dt' - \int L\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, t\right) dt \tag{2.10.11}$$

Calculamos las variaciones de las coordenadas y el tiempo por separado. Respecto a la variable de tiempo, tenemos

$$dt' \equiv \left|\frac{dt'}{dt}\right| dt = \left(1 + \frac{d\delta t}{dt}\right) dt \tag{2.10.12}$$

Para la coordenada x, la variación tiene un origen doble, primero por variar la propia coordenada y segundo por variar la variable temporal de la que depende. De ello obtenemos

$$\delta x(t) \equiv x'(t') - x(t) = \overline{\delta x}(t) + \frac{dx}{dt}\delta t \tag{2.10.13}$$

siendo $\overline{\delta x}(t) \equiv x'(t) - x(t)$ la variación de la coordenada manteniendo fijo el tiempo.

De la misma forma, la variación del Lagrangiano se compone de dos partes que escribimos

$$\delta L = \overline{\delta L} + \frac{dL}{dt}\delta t \equiv \frac{\partial L}{\partial x}\overline{\delta x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\overline{\delta \ddot{x}} + \frac{dL}{dt}\delta t \tag{2.10.14}$$

Con esto, la variación de la acción se escribe

$$\delta S = \int L\frac{d\delta t}{dt}dt + \int \left(\frac{\partial L}{\partial x}\overline{\delta x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\overline{\delta \ddot{x}} + \frac{dL}{dt}\delta t\right) dt \tag{2.10.15}$$

que se reduce a

$$\delta S = \int \frac{d\left(L\delta t\right)}{dt}dt + \int \left(\frac{\partial L}{\partial x}\overline{\delta x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\overline{\delta \ddot{x}}\right) dt \tag{2.10.16}$$

De la misma forma que en la obtención de las ecuaciones de Euler−Lagrange, el operador de derivación temporal puede intercambiarse con el operador de variación a tiempo constante, por lo que

$$\overline{\delta\dot{x}} = \frac{d}{dt}\overline{\delta x} \quad , \quad \overline{\delta\ddot{x}} = \frac{d^2}{dt^2}\overline{\delta x} \tag{2.10.17}$$

con lo cual, podemos escribir el último término en el integrando en la forma

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}\overline{\delta x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta x}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\overline{\delta x} \tag{2.10.18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\frac{d^2}{dt^2}\overline{\delta x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\frac{d}{dt}\overline{\delta x}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\frac{d}{dt}\overline{\delta x} \tag{2.10.19}$$

y así, la variación de la acción tiene la expresión final, tras una integración por partes

$$\delta S = \int \frac{d}{dt}\left(L\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta x} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\frac{d}{dt}\overline{\delta x}\right)dt + \int\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\right)\right)\overline{\delta x}\,dt \tag{2.10.20}$$

Con la condición de que la variación de la acción sea nula y que el movimiento recorra la trayectoria real, esto es, que se satisfagan las ecuaciones de Euler−Lagrange, obtenemos la expresión del *teorema de E. Noether* en este caso: Si S es invariante bajo la transformación de las coordenadas $t \to t'$, $x \to x'$, entonces

$$\delta S = \int \frac{d}{dt}\left(L\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta x} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\frac{d}{dt}\overline{\delta x}\right)dt = 0 \tag{2.10.21}$$

ó lo que es lo mismo

$$L\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta x} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\frac{d}{dt}\overline{\delta x} \tag{2.10.22}$$

es una constante del movimiento. Por último, al ser

$$\overline{\delta x} = \delta x - \dot{x}\delta t \quad , \quad \frac{d}{dt}\overline{\delta x} = \frac{d}{dt}\delta x - \ddot{x}\delta t - \dot{x}\frac{d}{dt}\delta t \tag{2.10.23}$$

podemos escribir dicha constante del movimiento en la forma

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\ddot{x}\right)\delta t - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\frac{d}{dt}\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}\frac{d}{dt}\delta x \tag{2.10.24}$$

2.11. Videoclases

Tipo	**Duración**	**Contenidos**	**Enlace**	**Notas(pdf)**
Teoría	96 mn	Secciones 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5	S.2.1, S.2.2, S.2.3, S.2.4, S.2.5	S.2.1, S.2.2, S.2.3, S.2.4, S.
Ejercicios	75 mn	Ejercicios sección 2.6	S.2.6	S.2.6
Autoevaluación	20 mn	Ejercicios sección 2.7	S.2.7	S.2.7
Otros	Pendiente	Apéndices 2.8, 2.9, 2.10	Pendiente	Pendiente

Formalismo Hamiltoniano de la Mecánica

Capítulo 3

Formalismo Hamiltoniano

3.1. Introducción

3.1.1. Relevancia del Principio de Acción estacionaria

Formulación Newtoniana Podemos definir la formulación Newtoniana como una teoría puramente metodológica, esto es, nos indica cuál es el método de trabajo en el ámbito de la Física clásica (cálculo de fuerzas y resolución de una ecuación en segundo orden en el tiempo para obtener la ley de movimiento). Dadas las fuerzas conocemos el movimiento, o dado el movimiento podemos deducir la expresión de las fuerzas. Pero no es una formulación fundamental de la naturaleza, por ejemplo no podemos construir la Física cuántica a partir de la formulación Newtoniana (sí lo podemos hacer desde la formulación Hamiltoniana).

Formulación variacional Así mismo, hemos visto que el principio de D'Alembert permite descubrir que la Física clásica admite una formulación variacional, inexistente en la formulación Newtoniana, siendo la formulación Lagrangiana y la formulación Hamiltoniana las dos caras de esta formulación variacional, cada una de ellas con un ámbito de aplicación apropiado. Esta formulación variacional mantiene su importancia incluso en la física más avanzada (Fisica cuántica, Física relativista, Teoria de campos,..), y así queda claro que es una formulación fundamental de la naturaleza, y no propia de cualquier teoría que se utilice para comprenderla. Esta formulación variacional se basa en un único principio general, el Principio de Acción estacionaria.

Principio de Acción estacionaria Para poder comprender el origen de este principio, debemos descender a la teoría física que es más exacta, la Mecánica cuántica. Esta teoría contempla dos premisas fundamentales:

- el comportamiento ondulatorio en la evolución dinámica de los sistemas, y
- el carácter probabilístico asociado a la medida experimental.

La cuestión fundamental que se deduce es que la fase asociada a esta onda de materia es igual a la acción S en unidades de $\hbar$, esto es, al cociente $S/\hbar$. La acción S que tenía el papel de una función auxiliar en la teoría clásica, tiene ahora un papel de primer orden en la teoría cuántica. Además, la partícula cuántica no está localizada sino que cubre espacialmente la región accesible a su función de onda asociada. Y al querer obtener una visión determinista (predecible) de la evolución del sistema, estas dos particularidades nos obligan a utilizar un principio variacional (acción estacionaria) que fije las distintas posiciones del sistema (como si se tratara de un filtro determinista). En el límite $\hbar \to 0$ este proceso nos da una trayectoria perfectamente definida (la trayectoria clásica) y cuando $\hbar \neq 0$ tendremos una trayectoria difuminada, más extendida cuanto más peso le demos a su comportamiento cuántico.

Teorías de campo Todas las teorías de campo (Relatividad general, Electromagnetismo, Electrodinámica cuántica,..) se construyen partiendo del Principio de Acción estacionaria para obtener las ecuaciones del campo. Esto es así porque es necesario definir desde el inicio cuáles son las propiedades generales del campo, eligiendo entonces la expresión más apropiada para la acción S, y obteniendo entonces las ecuaciones de campo. Es por esta razón, la de ser teorías fundamentales, para que estén basadas únicamente en este Principio. Otras descripciones físicas como la Mećanica de fluidos ó la Elasticidad, no cumplen la acción estacionaria, aunque si pueden analizarse desde un punto de vista variacional. La diferencia estriba en que para la teoría fundamental $\delta S = 0$ siempre, mientras que para esta Mecánica de medios continuos $\delta S = \delta A$, siendo A un funcional adicional que depende generalmente de contribuciones en la frontera del sistema (por ejemplo, el flujo de calor). De esta forma $\delta S = \delta A$ representa el movimiento del sistema bajo la acción externa aplicada en su frontera. Para una teoría fundamental no existe tal frontera (matemáticamente el campo se anula en el infinito, o el infinito se elige donde se anula el campo), tenemos $\delta S = 0$ y la teoría es autosuficiente.

Sistemas disipativos También quedan fuera de la acción estacionaria los sistemas disipativos, por el mismo motivo (existe una interacción externa que determina el movimiento) aunque siempre podrán encontrarse principios variacionales suficientes para su descripción. Es interesante ver que el propio formalismo Hamiltoniano dispone de un mecanismo interno preciso que limita su uso en los sistemas disipativos: en el espacio de fases (q, p) el flujo (esto es, la evolución temporal del sistema) es Hamiltoniano, y conserva los estados del sistema. Es decir, un estado de energía dado permanece en el tiempo y va describiendo su trayectoria en el espacio de fases. En un sistema disipativo la energía se pierde (los estados de energía desaparecen), y por ello el flujo no es Hamiltoniano y no es posible una descripción Hamiltoniana del sistema.
Un ejemplo parecido son los sistemas con colisiones, por ejemplo un billar mecánico. Las paredes sobre las que colisiona la partícula son parte del sistema pero no están incluidas en el Hamiltoniano (en general la partícula sólo es libre en su trayectoria de colisión a colisión). Por ello el sistema Hamiltoniano está mal definido inicialmente, y para tratarlo con el formalismo Hamiltoniano se deben introducir condiciones frontera apropiadas sobre el movimiento de la partícula que sustituyan físicamente a las paredes (por ejemplo, con un cambio de velocidad en la colisión elástica). Si las colisiones son inelásticas el sistema ya sería disipativo desde un inicio y estaríamos fuera del formalismo Hamiltoniano.

3.1.2. Formalismo Lagrangiano y formalismo Hamiltoniano

Comenzamos con unos comentarios generales sobre el paso del formalismo Lagrangiano al formalismo Hamiltoniano que serán de utilidad como primera introducción al tema.

Formalismo Lagrangiano En la formulación Lagrangiana de la Mecánica clásica se resuelven problemas del tipo, por ejemplo

- Sea el Lagrangiano
$$L = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{2}\dot{q}_i^2 - \frac{1}{3}\alpha q_i^3 \right) \tag{3.1.1}$$
sujeto a la ligadura $q_3 = q_1 + q_2$. Determine las ecuaciones de movimiento sobre la ligadura, es decir, teniendo en cuenta la ligadura.

En este caso la solución $q_i(t)$ a las ecuaciones del movimiento (ecuaciones de Euler−Lagrange) determina laevolución de las coordenadas q_i en el tiempo, y esta trayectoria del sistema se representa en el llamado *espacio de configuración* (coordenadas q_i frente al tiempo t). Y si queremos calcular su velocidad, podemos derivar respecto al tiempo para obtener $\dot{q}_i(t)$ o podemos analizar gráficamente la pendiente de la curva $q_i(t)$ en cada instante de tiempo. Finalmente la existencia de una ligadura nos indica la presencia de una fuerza (la fuerza de ligadura) que limita el movimiento a la superficie definida por la ecuación de ligadura, de ahí que el enunciado del problema mencione la expresión *movimiento sobre la ligadura.*

Formalismo Hamiltoniano En el formalismo Hamiltoniano en la descripción del sistema mecánico se utilizan dos variables, la coordenada q y el denominado *momento* p, en lugar de una sola variable, la coordenada q. El espacio físico característico deja de ser el espacio de configuración (q,t) , y pasa a ser el denominado *espacio de fases* (q,p). Y lo que era antes la representación de la trayectoria $q(t)$ para a ser la representación de ambas variables $(q(t),p(t))$ en el espacio de fases. En cada instante de tiempo t, el sistema tiene coordenada $q(t)$ y momento $p(t)$, y su trayectoria se define como el conjunto de puntos $(q(t),p(t))$ en el espacio de fases, uno por cada valor del tiempo.
Los resultados serán los mismos, utilicemos el formalismo Lagrangiano o el formalismo Hamiltoniano. La descripción mecánica del sistema será idéntica, por lo que utilizar uno u otro método realmente es una cuestión eminentemente práctica.

Características propias del formalismo Hamiltoniano Es cierto que formalmente la descripción mecánica es la misma, independientemente del formalismo elegido. Pero el formalismo Hamiltoniano introduce dos aspectos nuevos fundamentales, la geometría simpléctica y el papel otorgado al tiempo.

- Al extender el número de variables a dos, aparece una estructura subyacente, la denominada *geometría simpléctica*, que era invisible para el formalismo Lagrangiano. Dicha estructura geométrica define que q,p sean variables casi idénticas (sean intercambiables), y que existan transformaciones de estas variables que preservan la mecánica del sistema (sus ecuaciones del movimiento). Esto nos permite trabajar en condiciones mucho más ventajosas, pudiendo transformar el sistema mecánico en un sistema más sencillo, que nos permite llegar a los mismos resultados (solución al movimiento) de una manera más directa.

    - Por sí sola esta naturaleza geométrica adicional del formalismo Hamiltoniano resulta de especial interés para describir todas las teorías fundamentales de la física, como por ejemplo la teoría electromagnética, ya que son eminentemente conservativas. La disipación aparece únicamente con la interacción, por ejemplo en este caso, con la interacción del campo electromagnético con la materia (las partículas cargadas).
    - Aunque no todo son ventajas, ya que la existencia de una geometría que preserva la mecánica implica que los sistemas que no sean conservativos (por ejemplo, los sistemas disipativos) quedarán fuera del formalismo Hamiltoniano. Esto es así porque los sistemas conservativos tienen un flujo Hamiltoniano en el espacio de fases (se mantiene constante el número de puntos en el espacio de fases), mientras que un sistema disipativo no (el número de puntos disminuye en el tiempo). Como ejemplo, un sistema con rozamiento y energía positiva terminará teniendo una energía nula (estado de reposo), de forma que el estado inicial de energía positiva (punto en el espacio de fases) habrá desaparecido. Para estos sistemas el formalismo Lagrangiano será mucho más efectivo, ya que los requisitos a cumplir son mucho menores.

- El otro punto clave, que marca una diferencia relevante entre ambos formalismos, es el papel que juega el tiempo t. Para el formalismo Lagrangiano t actúa meramente como un parámetro temporal, que puede ser sustituido por cualquier otro parámetro que describa la evolución del sistema. Sin embargo, para el formalismo Hamiltoniano es *imprescindible* que t tenga las propiedades de un parámetro temporal. Dentro de la Física clásica (Newtoniana) esta diferencia es inexistente ya que el tiempo t tiene carácter absoluto. No así en la Física relativista, donde t tiene una carácter relativo. Y es en la Física relativista donde la diferencia es esencial. El formalismo Lagrangiano tendrá por definición incluidas todas las propiedades relativistas, mientras que el formalismo Hamiltoniano no, por lo que deberá construirse paso a paso, y caso a caso, incorporando de forma explícita todas las propiedades relativistas, lo que dificulta en general la aplicación de este formalismo. Es el caso de la Teoría de campos, donde se utiliza habitualmente el formalismo Lagrangiano.

Conclusión Como conclusión, podemos ver a primera vista que con el formalismo Hamiltoniano obtenemos los mismos resultados que con el formalismo Lagrangiano, pero al tratarlo con más

profundidad, podemos adquirir una visión más completa de la Mecánica y de su extensión natural a las teorías fundamentales, sin olvidar que tendremos a nuestra disposición el formalismo que más nos interese en cada caso, en función del ámbito de la Física que estemos tratando.

3.1.3. Fundamentos de la parametrización temporal

Parámetro continuo de tiempo Analizamos primero cómo surge la necesidad de tener en cuenta un parámetro continuo de tiempo, digamos t. Consideremos un sistema que conserva la energía mecánica, por ejemplo una masa ligada a un muelle,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{3.1.2}$$

pero del que no sabemos cuál es su movimiento. De la mera conservación de la energía podemos deducir que el movimiento está acotado en el coordenada y en la velocidad, en la forma

$$-\sqrt{\frac{2E}{m}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad , \quad 0 \leq v^2 \leq \frac{2E}{m} \tag{3.1.3}$$

pero no podemos deducir por ejemplo el sentido de su movimiento. En particular, la masa podría cambiar de forma instantánea su posición y velocidad, con las transiciones $(x, v) \iff (x, -v) \iff (-x, v) \iff (-x - v)$, ya que todas conservan la energía, o podría desplazarse mediante una combinación de movimiento continuo con una serie de saltos discontinuos.
Sí podremos obtener la ecuación de su movimiento si asociamos a la conservación de la energía $E = \text{cte}$, que además su variación sea nula

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -kx \tag{3.1.4}$$

La cuestión clave aquí ha sido poder introducir un parámetro continuo de tiempo, que describe la evolución del sistema, de forma que dt no es un valor arbitrario, sino es el valor tal que $dx = vdt$, es decir, relaciona la variación de posición con la velocidad a lo largo de la trayectoria. Esta continuidad del tiempo nos permite eliminar las soluciones no físicas incluídas en la mera conservación de la energía.

Concepto de trayectoria vecina El segundo punto clave es que la teoría exige analizar (comparar) las trayectorias vecinas del sistema parametrizado por el tiempo. Que las trayectorias sean vecinas es indicación únicamente de que estamos aplicando un principio variacional (por ejemplo, que exista un máximo relativo de una función en x_0 depende únicamente de sus valores en la proximidad de x_0, no de valores en puntos lejanos que dejan de ser representativos).
En este caso de trayectorias vecinas, el principio mecánico evalúa trayectorias con un mismo punto inicial y un mismo punto final. Que estos puntos sean idénticos para las dos trayectorias que estamos comparando sólo indica que tratamos de obtener un principio que no dependa de las condiciones frontera del movimiento. En caso contrario, si los puntos no coincidieran, el Principio de Acción estacionaria se escribiría $\delta S = \delta A$, siendo δA la contribución a la variación en los extremos. Sin entrar en detalle, encontraríamos que $\delta S = p\delta x \to p \equiv \partial S/\partial x$, que no sería más que la definición del momento del sistema. Esta variación de la trayectoria del sistema al variar el punto final (o el punto inicial) está gobernada por el momento p (o dicho de otra forma, el momento p describe la traslación del sistema en una cantidad δx). Todo ello lo veremos con más detalle en relación a la ecuación de Hamilton−Jacobi.

Un mismo parámetro temporal Retomando entonces la comparación de trayectorias vecinas, la cuestión a explicar es por qué podemos elegirlas, digamos como $x(t)$ y $x(t) + \delta x(t)$, respectivamente. Respecto a $x(t)$ queda aclarado, al ser t un parámetro continuo. Respecto a la segunda curva, puede servirnos un mero argumento físico, no matemático: si utilizamos un parámetro temporal diferente, digamos $t+\delta t$, nos vemos en la obligación de justificar qué representa el cociente $\delta x/\delta t$ (con unidades de velocidad), cuando no existe ninguna relación física entre la

trayectoria real $x(t)$ y la trayectoria variada $x(t) + \delta x(t)$. Es decir, cambiando la parametrización temporal estaríamos añadiendo al principio variacional unas propiedades adicionales sin tener una justificación física que lo respalde.

Invariancia bajo reparametrizaciones En última instancia, siempre es necesaria la independencia del resultado respecto al parámetro t elegido arbitrariamente (y para todo el conjunto de curvas analizadas), ya que esta independencia muestra que el principio aplicado es invariante bajo reparametrizaciones del tiempo (todos los observadores validarán el mismo principio, y por tanto el mismo movimiento, aunque tengan expresiones diferentes en función de sus propias coordenadas y tiempo).

3.2. Definición de Hamiltoniano

3.2.1. Espacio de fases

En el formalismo Hamiltoniano en la descripción del sistema mecánico se utilizan dos variables independientes, la coordenada x y el denominado *momento* p, en lugar de una sola variable independiente, la coordenada x, de la que se deriva la velocidad generalizada $v \equiv \dot{x}$. Así, el espacio físico característico deja de ser el espacio de configuración (x, t) del formalismo Lagrangiano, y pasa a ser el denominado *espacio de fases* (x, p). Y lo que era antes la representación de la trayectoria $x(t)$ para a ser la representación de ambas variables $(x(t), p(t))$ en el espacio de fases. En cada instante de tiempo t, el sistema tiene coordenada $x(t)$ y momento $p(t)$, y su trayectoria se define como el conjunto de puntos $(x(t), p(t))$ en el espacio de fases, uno por cada valor del tiempo.
Los resultados prácticos serán los mismos, utilicemos el formalismo Lagrangiano o el formalismo Hamiltoniano. Ya que la descripción mecánica del sistema será idéntica, utilizar un formalismo u otro dependerá en cada caso de la elección del método más conveniente.

3.2.2. Desde el formalismo Lagrangiano

Como vemos en el ejercicio 3.9.3, para la descripción de un sistema mecánico en las variables (x, p) definimos el *Hamiltoniano* $H(x, p, t)$ como la transformada de Legendre del Lagrangiano, esto es, se satisface

$$H(x, p, t) \equiv vp - L(x, v, t) \quad , \quad p \equiv \frac{\partial L}{\partial v} \tag{3.2.1}$$

siendo $v \equiv \dot{x}$ la velocidad generalizada del sistema, que debe definirse en función de la coordenada x y el momento p, mediante la inversión

$$p \equiv \left(\frac{\partial L(x, v, t)}{\partial v} \right)_x \Rightarrow \; v = v(x, p, t) \tag{3.2.2}$$

Cuando no sea posible realizar esta inversión, no podremos definir la función transformada, y no podremos construir el formalismo Hamiltoniano a partir del formalismo Lagrangiano. Establecemos ahora cuál es este criterio de invertibilidad.

Criterio de invertibilidad

- Consideremos en primer lugar el caso unidimensional no mecánico descrito en el ejercicio 3.9.1. Exigimos que la curva $(x, y(x))$ sea convexa para poder *reconstruir* la misma curva con las variables $(p, f(p))$. Esta convexidad nos permitía definir las rectas tangentes a la curva en cada punto, junto con su punto de corte con el eje $x = 0$. Si la curva no fuera convexa cada recta tangente tendría más de un punto sobre la curva y la reconstrucción no sería unívoca. Por tanto, para el modelo unidimensional, la condición que estamos buscando es que la curva convexa no se haga cóncava, o dicho de otra forma, que la curva no tenga un punto de inflexión en el intervalo de definición de la coordenada x. Matemáticamente

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \neq 0 \Rightarrow \; \frac{dp}{dx} \neq 0 \tag{3.2.3}$$

al ser en este caso $p \equiv y'(x)$.

- Analizamos ahora el caso bidimensional no mecánico descrito en el ejercicio 3.9.2, que describe las características de la función $f(x,y)$ en términos de su transformada de Legendre $g(p,y)$. Como indicamos, en este caso bidimensional ya no existe una reconstrucción por medio de las tangentes, por lo que se establece una correlación entre las diferenciales df y dg. En cualquier caso, las derivadas en la transformación de Legendre son inversas entre sí, lo que corresponde a que las funciones $x(p,y)$ y $p(x,y)$, obtenidas por separado mediante las relaciones

$$p \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad x \equiv \frac{\partial g}{\partial p} \tag{3.2.4}$$

sean inversas entre sí, esto es,

$$x(p,y), p(x,y) \Rightarrow \; x\left(p(x,y),y\right) = x \quad , \quad p\left(x(p,y),y\right) = p \tag{3.2.5}$$

Lo que nos corresponde aquí es determinar la condición bajo la cual la relación

$$p \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \tag{3.2.6}$$

determina la existencia de la función $x = x(p,y)$. Aplicamos para ello el *teorema de la función implícita* que establece que existe tal función x si el determinante de la matriz Jacobiana de la transformación de variables $(x,y) \to (p,y)$ es distinto de cero. Esto es,

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial p}{\partial x} \neq 0 \Rightarrow \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0 \tag{3.2.7}$$

- Finalmente analizamos el sistema puramente mecánico descrito en el ejercicio 3.9.3, que corresponde al paso del Lagrangiano $L(x,v)$ al Hamiltoniano $H(x,p)$, siendo L función convexa en la velocidad v. Utilizando de nuevo el teorema de la función implícita tenemos la condición de invertibilidad

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial p}{\partial v} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial p}{\partial v} \neq 0 \Rightarrow \; \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} \neq 0 \tag{3.2.8}$$

Es interesante aquí detenernos brevemente en el resultado que hemos utilizado en este determinante

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{3.2.9}$$

válido dentro del formalismo Lagrangiano, ya que es un resultado que no es intuitivo. Lo que indica la expresión anterior es que (x,v) son dos variables independientes. Pero sabemos que $v \equiv \frac{dx}{dt}$, por lo que existe una cierta dependencia de la velocidad $v(t)$ con la coordenada $x(t)$, y además el Lagrangiano está definido únicamente en el espacio de configuración $x(t)$. Todo ello puede causar confusión, pero debe tenerse en cuenta que la derivación respecto al parámetro temporal t no determina una dependencia *funcional* entre la coordenada y la velocidad generalizada, y sólo es aplicable a cada movimiento determinado, cuando pasamos de la coordenada x a la ley de movimiento $x(t)$.
Destacamos finalmente que en el procedimiento inverso, la obtención del Lagrangiano a partir del Hamiltoniano, el criterio de invertibilidad sería, de forma directa

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial p} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial p} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial p} \end{pmatrix} = \frac{\partial v}{\partial p} \neq 0 \Rightarrow \; \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \neq 0 \tag{3.2.10}$$

Hamiltonianos singulares Un caso muy especial de la construcción del Hamiltoniano a partir del Lagrangiano lo constituye los denominados *Hamiltonianos singulares*, que básicamente corresponden a la condición de nulidad $H \equiv 0$ (véase el ejercicio 3.7.4). Esto es, la descripción del sistema en las variables (x, p) queda *congelada*. Esto se produce porque existe un *exceso* de información en el Lagrangiano que no permite caracterizar de forma unívoca el comportamiento dinámico en el espacio de fases. Únicamente con la eliminación de este exceso de información mediante la denominada *elección gauge* quedará el Hamiltoniano bien definido. En el apéndice 3.12 se describen las principales características de la dinámica del sistema en presencia de estos Hamiltonianos singulares.

3.2.3. Esquema para la construcción del Hamiltoniano

Detallamos aquí los pasos a seguir, a modo de resumen, para obtener de forma directa el Hamiltoniano a partir del Lagrangiano, para un sistema con n grados de libertad, con n arbitrario.

(1) Se define en primer lugar el Lagrangiano

$$L \equiv L(q, \dot{q}, t) \tag{3.2.11}$$

para las n coordenadas q y las n velocidades generalizadas $\dot{q}$ del sistema.

(2) A partir del Lagrangiano, se definen los n momentos conjugados en la forma

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \equiv p(q, \dot{q}, t) \tag{3.2.12}$$

(3) Se construye el Hamiltoniano (denotado con minúscula) en el espacio de configuración, en la forma

$$h(q, \dot{q}, t) \equiv p\dot{q} - L \equiv h(q, \dot{q}, t) \tag{3.2.13}$$

(4) Se invierten las relaciones definidas en **(2)** para obtener las velocidades generalizadas en función de los momentos conjugados, en la forma

$$\dot{q} \equiv \dot{q}(q, p, t) \tag{3.2.14}$$

(5) Se introducen finalmente estas expresiones de las velocidades generalizadas en el Hamiltoniano para construir el Hamiltoniano en el espacio de fases

$$H \equiv H(q, p, t) \equiv h(q, \dot{q}(q, p, t), t) \tag{3.2.15}$$

Ejemplo. Partícula en campo central

(1) Tomando como coordenadas generalizadas las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) (veáse la seccion 14.5)

$$L \equiv T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}^2\right) - V(r) \tag{3.2.16}$$

(2) Tenemos los tres momentos conjugados

$$\begin{aligned} p_r &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ p_\phi &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi} \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

(3) Hamiltoniano h

$$\begin{aligned} h &\equiv \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\phi}p_\phi - L \\ &= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + mr^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\dot{\phi}^2\right) + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\dot{\phi}^2\right) + V(r) \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

(4) Se invierten las relaciones que definen los momentos conjugados para obtener las velocidades generalizadas

$$\begin{aligned} \dot{r} &\equiv \frac{p_r}{m} \\ \dot{\theta} &\equiv \frac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{\phi} &\equiv \frac{p_\phi}{mr^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

(5) $H \equiv h$ para las variables canónicas (q, p)

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2\frac{p_\theta^2}{m^2r^4} + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\frac{p_\phi^2}{m^2r^4\,\mathrm{sen}^4\,\theta}\right) + V(r) \\ &= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\right) + V(r) \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Ejemplo. Partícula cargada en campo electromagnético [1].

(1) Al no tener más indicaciones, tomamos como coordenadas generalizadas las coordenadas cartesianas (por ser las más generales),

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - q\phi + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} \tag{3.2.21}$$

siendo $\phi, \boldsymbol{A}$ los potenciales escalar y vector del campo electromagnético, dependientes de $\boldsymbol{r}$ y de t.

(2) Momento conjugado

$$\boldsymbol{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{v} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A} \tag{3.2.22}$$

(3) Hamiltoniano h

$$\begin{aligned} h &\equiv \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p} - L \\ &= m\boldsymbol{v}^2 + \cancel{\frac{q}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}} - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + q\phi - \cancel{\frac{q}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}} = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + q\phi \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

(4) Se invierten las relaciones que definen los momentos conjugados para obtener las velocidades generalizadas

$$\boldsymbol{v} \equiv \frac{1}{m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right) \tag{3.2.24}$$

(5) $H \equiv h$ para las variables canónicas $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\right)^2 + q\phi(\boldsymbol{r}, t) \equiv H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) \tag{3.2.25}$$

[1] Véase la resolución completa del problema según el formalismo Lagrangiano en el ejercicio 2.6.5

3.2.4. Definición propia. Variables canónicas

Uno de los resultados más importantes del formalismo Hamiltoniano, como veremos, es que *todos* los sistemas mecánicos son equivalentes, esto es, están gobernados por una misma dinámica Hamiltoniana. En este sentido, el carácter puramente *mecánico* de un sistema, derivado de la expresión del Lagrangiano $L = T - V$, queda diluído y el formalismo puede aplicarse igualmente a cualquier sistema dinámico.

Por ello, la mayor parte de las aplicaciones que utilizan el Hamiltoniano no tratan con sistemas inicialmente Lagrangianos, sino que de forma independiente se construye una función $H(x, p)$ dependiente de las coordenadas y los momentos, y posiblemente del tiempo, que satisface determinadas propiedades de simetría, que se consideran las necesarias para dar lugar a leyes de conservación preestablecidas. Como ejemplo, podemos ver en el ejercicio 3.8.2 un Hamiltoniano que no tiene un origen mecánico que simula el movimiento de una partícula puntual en presencia de una fuerza de rozamiento dependiente de la velocidad.

En general, cuando se construya el formalismo Hamiltoniano de forma independiente ya no tendrá sentido definir p como un momento *conjugado* a q, ya que no existe o no está definido el Lagrangiano. Se hablará entonces momento *canónico*, y al conjunto de variables (q, p) del espacio de fases se le denominará conjuntamente como *variables canónicas*. En este sentido, el adjetivo *canónico* se refiere a la pertenencia al espacio de fases.

3.2.5. Uso de la notación tensorial

Indicamos aquí cómo sería la notación tensorial de la transformación de Legendre, ya que nos aportará una información muy relevante sobre las variables (q, p). Analizando la expresión de la transformación

$$H(x, p, t) = v \cdot p - L(x, v, t) \tag{3.2.26}$$

vemos que L, H son funciones escalares, por lo que el producto $v \cdot p$ debe ser un escalar. Esto es directo en el caso unidimensional, al ser $v \cdot p = vp$, y como notación matricial tendríamos $v \cdot p = v^T \cdot p$ siendo T la transposición de la matriz fila v (véase el ejercicio 3.9.3 ó el apéndice 3.10.1).
Lo que nos interesa aquí es utilizar la notación tensorial para la velocidad y el momento. En el caso de la velocidad, derivada temporal de la coordenada x, si x^α son las componentes contravariantes de las coordenadas, las componentes v^α de la velocidad serán (véase la sección 11.7.1)

$$v^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{dt} \tag{3.2.27}$$

La cuestión entonces es cómo debe ser la representación tensorial del momento p para que la cantidad $v \cdot p$ sea un escalar. Recordando que en el análisis tensorial una cantidad escalar se obtiene mediante la *contracción tensorial*, por lo que debemos tener

$$v \cdot p \equiv v^\alpha p_\alpha \tag{3.2.28}$$

con suma en α. Esto nos indica que la definición *natural* del momento es con componentes de naturaleza contraria que la coordenada x, en este caso, las componentes covariantes p_α. Esta diferencia es fundamental, y en la descripción puramente geométrica hablamos de que x pertenece al espacio de configuración y p pertenece al denominado *espacio tangente*. El hecho de que el espacio de fases se construya con dos espacios diferentes da lugar a la denominada *geometría simpléctica*, cuyas características fundamentales se detallan en el apéndice 3.11.

Utilizando este apartado específico de notación tensorial, indicamos la expresión general de la transformación de Legendre, para una función cuadrática de las velocidades

$$L = \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta - V(x) \tag{3.2.29}$$

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial v^\alpha} = A_{\alpha\beta} v^\beta \Rightarrow \; v^\alpha = B^{\alpha\beta} p_\beta \tag{3.2.30}$$

$$H \equiv v^\alpha p_\alpha - L = \frac{1}{2} B^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + V(x) \tag{3.2.31}$$

siendo $B^{\alpha\beta}$ el tensor simétrico *inverso* del tensor simétrico $A_{\alpha\beta}$, en el sentido de que se satisface

$$B^{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \tag{3.2.32}$$

siendo δ^α_β la función δ de Kronecker (veánse las secciones 11.2.5y 11.7.1). Finalmente el criterio de invertibilidad estaría dado por

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} = A_{\alpha\beta} \neq 0 \tag{3.2.33}$$

y

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} = B^{\alpha\beta} \neq 0 \tag{3.2.34}$$

exigiendo por tanto que todas las componentes tensoriales de A, B, sin excepción, sean distintas de cero.
Un último apunte respecto a la notación tensorial. Como pueden ver en estas expresiones no se introduce en ningún caso un *tensor métrico* (véase la sección 11.7.2). El tensor métrico, digamos $g_{\alpha\beta}$, tiene por objeto *medir* cantidades que son equivalentes, por ejemplo un producto de dos vectores. Como hemos indicado anteriormente, la coordenada (o la velocidad) y el momento no son cantidades compatibles, tienen propiedades distintas, y ésta es la razón de la no presencia del tensor métrico en el Hamiltoniano, y por derivación la geometría *no métrica* del espacio de fases. Únicamente en el caso que estemos trabajando en un espacio cartesiano (coinciden las componentes contravariantes con las componentes covariantes), podremos *simular* métricamente en el espacio de fases productos de vectores, del tipo $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p}$.

3.3. Ecuaciones de Hamilton. Formulación geométrica

Una vez construida la función $H(x, p, t)$ la dinámica del sistema estará gobernada, como hemos visto en el desarrollo del ejercicio 3.9.3, por las ecuaciones de evolución temporal

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{3.3.1}$$

denominadas *ecuaciones de Hamilton*, que pasamos a analizar.

3.3.1. Ecuaciones de Hamilton

Las ecuaciones de Hamilton surgen de la necesidad de aunar dos hechos diferenciados, que hemos establecido previamente:

(1) El Hamiltoniano[1] $H(q, p, t)$ es la cantidad dinámica que determina la evolución del sistema en el espacio de fases, de un modo por determinar, pero que deberá ser análogo a la descripción de la evolución del sistema en el espacio de configuración dentro del formalismo Lagrangiano, descripción que está gobernada por el Lagrangiano $L(q, \dot{q}, t)$ a través de las ecuaciones de movimiento de Euler−Lagrange.

(2) El Hamiltoniano H resulta ser la transformada de Legendre del Lagrangiano.

[1] Utilizaremos la notación habitual q para identificar la coordenada en el espacio de fases, en lugar de la notación particular x ya que la coordenada q no es necesariamente una coordenada de *posición*, como podría interpretarse de x.

Definición Partiendo de estas dos premisas, y de acuerdo con la metodología aplicada en el formalismo Lagrangiano, nos fijamos en la diferencial dH del Hamiltoniano. Por una parte, según el punto (1) deberá estar dada por la expresión en el espacio de fases

$$H = H(q,p,t) \rightarrow \ dH \equiv \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial t}dt \tag{3.3.2}$$

Por otra parte, según el punto (2) debe satisfacer

$$H \equiv p\dot{q} - L \rightarrow \ dH = d\left(p\dot{q}\right) - dL \tag{3.3.3}$$

siendo

$$d\left(p\dot{q}\right) = \dot{q}dp + pd\dot{q} \quad , \quad L = L(q,\dot{q},t) \rightarrow \ dL = \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{3.3.4}$$

Introduciendo aquí la definición Lagrangiana del momento y de su evolución temporal

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad , \quad \frac{dp}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \equiv \frac{\partial L}{\partial q} \tag{3.3.5}$$

donde hemos aplicado la ecuación de Euler−Lagrange en el último término, y agrupando los resultados de los puntos (1) y (2) obtenemos la siguiente condición de equivalencia para la función Hamiltoniano

$$\frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial t}dt \equiv dH \equiv \cancel{p\dot{q}} + \dot{q}dp - \dot{p}dq \cancel{-p\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{3.3.6}$$

Igualando los coeficientes de las diferenciales dq, dp, dt en ambas expresiones, obtenemos las condiciones de *compatibilidad* ó *ecuaciones de Hamilton*

$$\dot{q} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} \equiv -\frac{\partial H}{\partial q} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.3.7}$$

Cuando no exista un formalismo Lagrangiano previo sobre el que se construye el formalismo Hamiltoniano, esta vía de obtención de las ecuaciones de Hamilton deja de ser válida, y deberá utilizarse el denominado *Principio modificado de Hamilton* (sección 3.4), que cumple el papel análogo que tiene el Principio de Hamilton (véase la sección 2.1) para el formalismo Lagrangiano.

Interpretación de las ecuaciones. Papel del tiempo Las dos primeras ecuaciones de Hamilton son las ecuaciones de evolución de las variables (q,p) del sistema en el espacio de fases. Esto es, nos permitirán obtener por integración la trayectoria $(q(t),p(t))$ del sistema en el espacio de fases. Y queda matemáticamente claro que la función H es la cantidad fundamental que determina la dinámica del sistema en dicho espacio.

Siendo así, la tercera ecuación no parece representar la dinámica del sistema, ya fijada por las dos ecuaciones anteriores, y parece en principio sólo una relación entre la dependencia temporal explícita de ambas cantidades, recordando que al menos en el formalismo Lagrangiano el tiempo es un parámetro. Es aquí donde el formalismo Hamiltoniano se separa del formalismo Lagrangiano en su interpretación del papel del tiempo, ya que la cantidad $\partial H/\partial t$ representa la dinámica temporal del propio Hamiltoniano, y tal propiedad característica no está presente (no tiene ninguna vía para hacerlo) en el formalismo Lagrangiano. Para comprobarlo, teniendo en cuenta la dinámica en el espacio de fases definida por las dos primeras ecuaciones de Hamilton, vemos que el propio Hamiltoniano tiene la evolución temporal

$$\frac{dH}{dt} \equiv \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t} = \cancel{\dot{p}\dot{q}} + \cancel{\dot{q}\dot{p}} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{3.3.8}$$

de forma que conjuntamente la tercera ecuación de Hamilton debe leerse

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.3.9}$$

y establece que si H no depende explícitamente del tiempo de por sí, o está derivado de un Lagrangiano que no depende explícitamente del tiempo, en ambos casos, el Hamiltoniano será una constante en la evolución del sistema en el espacio de fases, esto es, será una *constante del movimiento*

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 = -\frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \rightarrow H = \text{cte} \tag{3.3.10}$$

Por esta propiedad de evolución del propio Hamiltoniano, ausente en el formalismo Lagrangiano, es imprescindible que el parámetro t tenga el contenido físico de ser la variable temporal que describe la evolución del sistema, y no sea el simple parámetro que describe la trayectoria Lagrangiana en el espacio de configuración. Por ello podemos decir que el formalismo Hamiltoniano deja de tener sentido cuando t no es el tiempo *físico* del sistema.

Condiciones iniciales del movimiento Consideremos un sistema de n grados de libertad. Entonces las ecuaciones de Hamilton representan un conjunto de $2n$ ecuaciones de evolución para las *coordenadas* del sistema, las variables canónicas q, p. Para resolver dichas ecuaciones, y obtener la solución $(q(t), p(t))$ que describe el movimiento, deberemos aportar las condiciones iniciales del movimiento, esto es, el conjunto de valores q_0, p_0 iniciales tales que $q(0) = q_0, p(0) = p_0$.
Junto a estas ecuaciones, la tercera ecuación de Hamilton determina la evolución temporal del Hamiltoniano, que a efectos prácticos, ya que H puede identificarse con la *energía* del sistema en la mayoría de los casos de estudio, resultará en la ecuación de evolución de la energía, y en particular la ley de conservación de la energía cuando la dinámica del sistema no dependa explícitamente del tiempo. Como ejemplo, para un oscilador armónico simple con frecuencia variable en el tiempo tenemos el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2 \tag{3.3.11}$$

y el momento conjugado

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \tag{3.3.12}$$

y el Hamiltoniano está dado por

$$H(q, p, t) \equiv p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2 \tag{3.3.13}$$

y de aquí obtenemos la ecuación de evolución

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = m\omega(t)\dot{\omega}(t)q^2 \tag{3.3.14}$$

que no es más que la ley de conservación de la energía

$$\frac{dE}{dt} = P \tag{3.3.15}$$

siendo P la potencia suministrada por la acción externa. Para obtener su expresión debemos tener en cuenta que el incremento de energía por la acción externa quedará almacenado en el sistema en forma de energía útil (energía utilizable) o *energía libre de Gibbs* G, que satisface el principio termodinámico

$$dG = \frac{1}{2}q \cdot dF \Rightarrow P \equiv \frac{dG}{dt} = \frac{1}{2}q\frac{dF}{dt} = qm\omega(t)\dot{\omega}(t)q = m\omega(t)\dot{\omega}(t)q^2 \tag{3.3.16}$$

siendo F la fuerza externa sobre el oscilador $F = m\omega^2(t)q$, y donde el factor $1/2$ refleja el hecho de que en la aplicación de la fuerza variable en el tiempo se mantiene un valor constante de q.

Notación simpléctica. Matriz simpléctica J Dada la simetría que muestran las dos primeras ecuaciones de Hamilton, salvo el signo $-$ relativo cuyo origen es la geometría del espacio de fases que se analiza en el apéndice 3.11 y detalla en la sección 3.3.2, resultará conveniente en muchas ocasiones utilizar una notación matricial (la *notacion simpléctica*) para reducir el número de operaciones a realizar y simplificar los resultados.
En particular, se definen las variables canónicas en la forma matricial conjunta

$$\boldsymbol{\xi} \equiv \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \tag{3.3.17}$$

respecto a la cual, las ecuaciones de Hamilton se escriben en la forma

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} \equiv \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \tag{3.3.18}$$

esto es,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = J \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\xi}} \tag{3.3.19}$$

siendo

$$J \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.20}$$

la denominada *matriz simpléctica*, con las propiedades generales, útiles para los desarrollos algebraicos

$$J^2 = -\mathbb{1} \quad , \quad J^{-1} = J^T \quad , \quad \det J = 1 \tag{3.3.21}$$

siendo $\mathbb{1}$ la matriz unidad con la dimensión el espacio de fases, esto es, dimensión $2n$, y donde T denota el símbolo de transposición matricial. En particular, la segunda condición establece que J es una matriz ortogonal.

3.3.2. Consideraciones geométricas. Generadores

Formulación geométrica En el apéndice 3.11 se describe de forma detallada en qué consiste la geometría del espacio de fases, denominada *geometría simpléctica*, que explica en particular la aparición matemática de un signo $-$ relativo en las dos primeras ecuaciones de Hamilton.
Nos centramos aquí brevemente en citar algunas de las consecuencias de este origen *simpléctico* de la dinámica.

- Ya hemos visto que el Hamiltoniano, además de definir la dinámica, es una cantidad conservada en el espacio de fases, esto es, se preserva en la evolución del sistema. Hablaremos así del *flujo Hamiltoniano* en el espacio de fases (véase la sección 6.6), como si fuera equivalente al movimiento de un fluido conservado.

- En el espacio de fases (q, p), el operador gradiente $\boldsymbol{\nabla}$ tiene la representación

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p} \right) \tag{3.3.22}$$

  y por otro lado el campo de velocidad tangente a las trayectorias es directamente la derivada temporal de la *posición* $(q(t), p(t))$, esto es

$$\boldsymbol{v} = (\dot{q}, \dot{p}) \tag{3.3.23}$$

  Con ayuda de las ecuaciones de Hamilton este campo de velocidades se escribe

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right) \tag{3.3.24}$$

y por tanto, se satisface (de nuevo debido al signo − relativo)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} - \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \equiv 0 \tag{3.3.25}$$

lo que indica que, desde el punto de vista del campo de velocidad, el movimiento en el espacio de fases es similar a un fluido incompresible. Y este hecho, aparentemente trivial, tiene como consecuencia el llamado *teorema de Liouville* (sección 6.4), de importancia fundamental en las ramas de la Física donde subyace el formalismo Hamiltoniano.

Generadores p y q Hemos visto en la sección 3.2 que la definición *natural* del momento tiene tensorialmente una naturaleza contraria que la coordenada q. Esto unido al hecho de que las dos variables q, p son dinámicamente equivalentes (como muestran las ecuaciones de Hamilton, salvo el signo menos relativo), da lugar a que q, p sean generadores de sus propias traslaciones en el espacio de fases. En particular p será el generador de la traslación infinitesimal de la variable q en el espacio de fases, y q será el generador de la traslación infinitesimal de la variable p en el espacio de fases (véase la sección 13.2.2 para una explicación completa de los *generadores de transformaciones*).
En particular, en la representación de la variable q (esto es, tomando q como la variable fundamental) el momento p corresponde al generador

$$\boldsymbol{X}_p \equiv \frac{\partial}{\partial q} \tag{3.3.26}$$

y bajo una translación (infinitesimal) de la variable q

$$q' = q + a \tag{3.3.27}$$

siendo a una cantidad infinitesimal, se satisface efectivamente la acción del generador, en la forma (véase la sección 13.2.2)

$$q' \equiv q + a\boldsymbol{X}_p q = q + a\frac{\partial}{\partial q} q = q + a \tag{3.3.28}$$

De forma totalmente análoga tendríamos el generador $\boldsymbol{X}_q$ de la variable q en la representación de la variable p en la forma

$$\boldsymbol{X}_q \equiv \frac{\partial}{\partial p} \tag{3.3.29}$$

que satisface la acción de la traslación del momento p

$$p' \equiv p + b\boldsymbol{X}_q p = p + b\frac{\partial}{\partial p} p = p + b \tag{3.3.30}$$

en la cantidad infinitesimal b.
La posibilidad de asociar a las cantidades clásicas q, p generadores de transformaciones (que se comportan como operadores, en concreto operadores diferenciales), es el punto de partida para la extensión *cuántica* de la dinámica Hamiltoniana, esto es, la Mecánica Cuántica, junto con la aplicación del denominado *Principio de Correspondencia*, que asocia un conmutador cuántico a un corchete de Poisson clásico (véase la sección 5.12 para una explicación detallada de este procedimiento de *cuantización*).

3.3.3. Relación del Hamiltoniano con la energía

En esta sección analizamos la relación del Hamiltoniano con la denominada *energía*, concepto que puede interpretarse como la energía puramente *mecánica* de un sistema mecánica, definida por

$$E \equiv T + V \tag{3.3.31}$$

esto es, la suma de la energía cinética T y la energía potencial V, o con un concepto más amplio, para sistemas Hamiltonianos más generales, como una cantidad conservada en el tiempo.

Sistema mecánico En el caso de un sistema mecánico, cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) La transformación de las coordenadas *cartesianas* $\boldsymbol{r} \equiv (x, y, z)$, a las coordenadas generalizadas q no depende del tiempo, esto es,

$$q = q\left(\boldsymbol{r}\right) \tag{3.3.32}$$

(2) El Lagrangiano[1] no depende explícitamente del tiempo.

(3) El potencial V no depende de las velocidades generalizadas $\dot{q}$, o dicho de otra forma, teniendo en cuenta (2), el potencial sólo depende de las coordenadas q.

entonces, el Hamiltoniano se conserva y es igual a la energía mecánica del sistema, esto es, tenemos la identificación

$$H \equiv E \equiv T + V = \text{cte} \tag{3.3.33}$$

Comprobación Si se cumplen estas condiciones tenemos lo siguiente:

(1)′ La energía cinética depende cuadráticamente de las velocidades. Por ejemplo para la partícula puntual tenemos

$$T \equiv \frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dq}\frac{dq}{dt}\right)^2 \equiv \frac{1}{2}mf^2(q)\dot{q}^2 \tag{3.3.34}$$

siendo $f(q)$ la función exclusiva de q definida en la forma, para una transformación de coordenadas independiente del tiempo,

$$q = q(\boldsymbol{r}) \Rightarrow \ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q) \Rightarrow \ f(q) \equiv \frac{d\boldsymbol{r}}{dq} \tag{3.3.35}$$

(2)′ El Hamiltoniano es una constante del movimiento, al ser aplicando la tercera ecuación de Hamilton

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \ H = \text{cte} \tag{3.3.36}$$

(3)′ El Hamiltoniano coincide con la energía mecánica del sistema. Dado que el potencial V sólo depende de las coordenadas q, la definición del momento conjugado p

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \tag{3.3.37}$$

nos lleva a, sabiendo que T es función cuadrática de $\dot{q}$,

$$p\dot{q} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\dot{q} = 2T \tag{3.3.38}$$

por la propiedad de homogeneidad[2] de grado 2 en $\dot{q}$ para la función T.
Con ello concluimos que el Hamiltoniano, aplicando su definición, está dado por la expresión de la energía mecánica

$$H \equiv p\dot{q} - L = 2T - (T - V) = T + V \equiv E \tag{3.3.39}$$

[1] Ya que estamos tratando específicamente con un sistema mecánico, el Hamiltoniano se define exclusivamente a partir del Lagrangiano, y no se contempla un Hamiltoniano creado de forma independiente. Además el análisis aquí realizado coindice punto por punto, dada la naturaleza mecánica del sistema, con el análisis puramente Lagrangiano de la relación entre el Hamiltoniano y la energía, descrito en la sección 2.4.2.

[2] Detallado en la sección 2.4.2. Véase también el ejercicio 2.6.6.

Sistema Hamiltoniano En el caso de un sistema Hamiltoniano genérico, que no tenga un formalismo Lagrangiano previo, las condiciones anteriores se reducen a la forma trivial:

(1) Si el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo

entonces, H es una constante del movimiento, que podemos asociar a la *energía* del sistema, en su concepto más amplio, de acuerdo con la tercera ecuación de Hamilton

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \; H = \text{cte} \equiv E \tag{3.3.40}$$

3.3.4. Ejemplo. Movimiento de arrastre entre dos masas

En cualquier caso, la descripción, tanto del Hamiltoniano, como la energía del sistema, sobre todo si es un sistema mecánico, depende de las coordenadas elegidas, como vemos en el siguiente ejemplo mecánico.
Consideremos una masa M apoyada en el suelo horizontal moviéndose con una velocidad constante v_0 dada, y por tanto con una ley de movimiento conocida, y soportando una masa m, que permanece unida a ella por un muelle de constante k, fijado a la altura del centro de masas de M, y que se mueve sobre ella sin rozamiento. Apliquemos el análisis de la sección anterior para analizar el movimiento de la masa m desde dos sistemas de coordenadas diferentes.

- **Sistema del laboratorio** Para la coordenada x de la masa m respecto al sistema de referencia fijo en el espacio, el Lagrangiano está dado por

$$L = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k\left(x - x_M\right)^2 \tag{3.3.41}$$

siendo x_M la posición del centro de masas de M, que sigue la ley de movimiento con la velocidad constante v_0, esto es,

$$x_M = v_0 t + x_{M0} \tag{3.3.42}$$

El resultado es, por tanto, que el Lagrangiano en este sistema de coordenadas depende explícitamente del tiempo, y que, ciñéndonos al movimiento de la masa m, tiene la expresión

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k\left(x - v_0 t - x_{M0}\right)^2 \tag{3.3.43}$$

y en consecuencia el Hamiltoniano no será una constante de movimiento. En cualquier caso, la energía cinética es cuadrática en la velocidad generalizada $\dot{x}$, y el potencial no depende de las velocidades, por lo que el Hamiltoniano representa la energía del sistema, en la forma

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \; H \equiv p\dot{x} - L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\left(x - v_0 t - x_{M0}\right)^2 \equiv T + V \equiv E \tag{3.3.44}$$

En conclusión, tenemos para este sistema de coordenadas la relación entre el Hamiltoniano y la energía

$$H \equiv T + V \equiv E \neq \text{cte} \tag{3.3.45}$$

La no conservación de la energía (ó H) es debida al movimiento uniforme de la masa M, a velocidad constante. De forma natural, esto es, sin la acción de una influencia externa, esta velocidad no puede conservarse constante ya que el propio movimiento de m sobre M se traduce por inercia en un movimiento de M. Debe existir por tanto una influencia externa que aporte (ó libere) energía del sistema para eliminar el movimiento adicional de M y así pueda mantener su velocidad constante. Este aporte energético conlleva que la energía E de la masa m no se conserve, y en particular aumente en los tramos del movimiento en los que la velocidad de M se reduce por debajo de v_0, y disminuya en los tramos del movimiento en los que la velocidad de M aumenta por encima de v_0.

- **Sistema ligado a la masa M** En este caso la coordenada de la masa m es su posición relativa x' respecto al centro de masas de M, definida en la forma respecto a x

$$x' \equiv x - x_M = x - v_0 t - x_{M0} \tag{3.3.46}$$

que equivale a la relación entre las velocidades generalizadas

$$\dot{x}' = \dot{x} - v_0 \Longrightarrow \dot{x} = v_0 + \dot{x}' \tag{3.3.47}$$

y la expresión para la energía cinética

$$T \equiv \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \equiv \frac{1}{2} m \left(v_0 + \dot{x}'\right)^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}'^2 + m v_0 \dot{x}' + \frac{1}{2} m v_0^2 \tag{3.3.48}$$

Aplicando esta transformación de coordenadas, el Lagrangiano se escribe ahora

$$L = \frac{1}{2} M \cancelto{0}{v_0'^2} + \frac{1}{2} m \left(v_0 + \dot{x}'\right)^2 - \frac{1}{2} k x'^2 \tag{3.3.49}$$

dado que la velocidad de M en su propio sistema de referencia es nula, $v_0' = 0$.
Con todo ello, vemos que en este sistema de coordenadas el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, la energía cinética no es cuadrática en la velocidad generaliza $\dot{x}'$, y el potencial sólo depende de la coordenada x'.
Y en consecuencia, el Hamiltoniano se conserva

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \; H = \text{cte} \tag{3.3.50}$$

pero no representa la energía del sistema, al ser

$$H \equiv p' \dot{x}' - L = \frac{1}{2} m \dot{x}'^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x'^2 \neq T + V \equiv E \tag{3.3.51}$$

En conclusión, tenemos para este sistema de coordenadas la relación entre el Hamiltoniano y la energía

$$H = \text{cte} \neq T + V \equiv E \tag{3.3.52}$$

- **Equivalencia de los dos sistemas** Los dos sistemas de coordenadas anteriores están representando al mismo sistema *físico*, y por tanto describen el mismo movimiento, desde dos perspectivas diferentes. Esta equivalencia bajo la transformación de coordenadas, en este caso una transformación dependiente del tiempo, es inherente al formalismo Lagrangiano, ya que las ecuaciones de Euler−Lagrange tienen una estructura *covariante*, esto es, mantienen su forma en todos los sistemas de coordenadas (véase también la sección 2.1.2)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \iff \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}\right) = \frac{\partial L}{\partial x'} \tag{3.3.53}$$

Respecto a la formulación Hamiltoniana, la equivalencia de los sistemas mecánicos, como veremos en el siguiente capítulo, va más allá de una mera transformación de coordenadas. En este caso, dado que la transformación de coordenadas (también denominada transformación *puntual*) forma parte del conjunto de las transformaciones admisibles (denominadas transformaciones *canónicas* en su conjunto), la descripción de este sistema físico en ambos sistemas de coordenadas, también dentro del formalismo Hamiltoniano, es totalmente equivalente.

3.4. Principio generalizado de Hamilton

3.4.1. Cálculo variacional

Principio de Hamilton Tratamos de obtener en esta sección el Principio variacional que da lugar, calculando su extremo, a las ecuaciones de Hamilton (3.3.1), del mismo modo que el Principio

de Hamilton

$$\delta S = 0 \quad , \quad S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{3.4.1}$$

da lugar, calculando este extremo, a las ecuaciones de Euler−Lagrange (véase la sección 2.1 para esta descripción Lagrangiana de la Dinámica).

Principio generalizado de Hamilton Recordamos que el formalismo Hamiltoniano está definido en el espacio de fases $(q(t), p(t))$ teniendo t el papel de parámetro temporal, y que considera (q, p) variables independientes con velocidades respectivas $(\dot{q}, \dot{p})$. En este formalismo, definido el Hamiltoniano $H(q, p, t)$, el Lagrangiano queda definido en la forma

$$L(q, \dot{q}, t) \equiv p\dot{q} - H(q, p, t) \tag{3.4.2}$$

Aquí, $\dot{q}$ debe definirse como una variable en el espacio de configuración que es independiente de q, según marca el formalismo Lagrangiano. Utilizando esta transformación (inversa) de Legendre, la acción S tiene la expresión equivalente en el espacio de fases

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - H)\, dt \tag{3.4.3}$$

y el Principio de Hamilton se transforma en el denominado *Principio generalizado de Hamilton* ó también Principio modificado de Hamilton, que establece que el Principio variacional

$$\delta S \equiv \delta \int (p\dot{q} - H)\, dt = 0 \tag{3.4.4}$$

da lugar a las ecuaciones de Hamilton que gobiernan la dinámica del sistema en el espacio de fases.

Comprobación Aplicando el cálculo variacional estándar, tomando las trayectorias del sistema en el espacio de fases parametrizadas por el tiempo, en la forma $(q(t), p(t))$ y considerando variaciones de la trayectoria con condiciones de frontera nulas, $\delta q = 0 = \delta p$, obtenemos la trayectoria real del sistema como la solución de las ecuaciones de Euler−Lagrange para las variables q, p, y con la función *Lagrangiano* definida por la expresión anterior

$$L \equiv p\dot{q} - H \tag{3.4.5}$$

Llegamos por tanto a las ecuaciones dinámicas

- Variable q

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\,(p\dot{q} - H)}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial\,(p\dot{q} - H)}{\partial q} \tag{3.4.6}$$

- Variable p

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\,(p\dot{q} - H)}{\partial \dot{p}}\right) = \frac{\partial\,(p\dot{q} - H)}{\partial p} \tag{3.4.7}$$

Entonces, realizando las derivadas en estas expresiones, y teniendo en cuenta la independencia de $H(q, p, t)$ con las velocidades $(\dot{q}, \dot{p})$, y la independencia de $\dot{q}$ respecto a q, estas ecuaciones se reducen a

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{3.4.8}$$

y

$$0 = \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{3.4.9}$$

que son, como esperabamos, las ecuaciones de Hamilton del movimiento.

Tercera ecuación de Hamilton Constatamos que con la aplicación de este Principio generalizado no hemos podido deducir la tercera ecuación de Hamilton (sección 3.3.1), que se escribe

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.4.10}$$

Como se detalla en la sección 3.3.1, para su deducción hemos utilizado las dos primeras ecuaciones de Hamilton, junto con la definición funcional de H en relación al Lagrangiano L. De las dos primeras se deduce

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{3.4.11}$$

y de la definición funcional deducimos que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.4.12}$$

ecuación última que no tiene un valor dinámico, ya que presenta un resultado trivial, como sucede también con la definición del Routhiano en el método de Routh[1].
Pero, como indicamos, no tenemos a nuestra disposición por ahora un Principio variacional que nos permita obtener esta tercera ecuación. La razón de ello reside en que no hemos tratado al tiempo como una variable más, sólo como un parámetro. Es decir, no hemos permitido la variación δt del tiempo entre trayectorias vecinas, y por tanto, el Principio variacional no puede comparar el efecto de esta variación sobre la dinámica.

Espacio de fases extendido La resolución, que no se detalla aquí, consiste en la introducción de un *tubo* de trayectorias en el *espacio de fases extendido* (espacio formado por las variables canónicas (q, t) y la variable tiempo), y para el cual se define la acción en la forma

$$S \equiv \int (p\dot{q} - H)\, dt \equiv \int (pdq - Hdt) \tag{3.4.13}$$

La resolución detallada de que $\delta S = 0$ en este espacio extendido da lugar a las tres ecuaciones de Hamilton puede verse en el ejercicio (7.5.1), relativo a la denominada *integral de Poincaré−Cartan*

$$K \equiv \oint (pdq - Hdt) \tag{3.4.14}$$

definida sobre un contorno cerrado en este espacio extendido.

Variable canónica H Es interesante destacar aquí, teniendo en cuenta las connotaciones que tendrá en capítulos posteriores, que en este espacio extendido la diferencial en la acción

$$pdq - Hdt \tag{3.4.15}$$

permite identificar a $-H$ como la variable canónica del tiempo, del mismo modo que p es la variable canónica de la coordenada q. Esta interdependencia canónica entre H y t es el aspecto fundamental del formalismo Hamiltoniano, y permite deducir, entre otros resultados, que el Hamiltoniano sea una cantidad conservada cuando no dependa explícitamente del tiempo, o por ejemplo que la dinámica del sistema quede *congelada* cuando el Hamiltoniano sea singular ($H \equiv 0$, apéndice 3.12).

3.4.2. Principio de Acción estacionaria

Definición Comparado con el Principio de Hamilton, el Principio variacional de la Acción estacionaria tiene un caracter más general, ya que no asume una variación nula de la trayectoria en los extremos, $\delta q = 0$, sino que se define una variación más amplia, denotada por el operador de

[1] Método práctico para el análisis dinámico de sistemas mecánicos, a medio camino entre el formalismo Lagrangiano y el formalismo Hamiltoniano, véase la sección 3.5.1

variación Δ, distinguible en este sentido del operador δ, al ser $\Delta q \neq 0$ en los extremos.
De esta forma la variación de la acción se escribe

$$\Delta S \equiv \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt \equiv \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} \Delta L dt \tag{3.4.16}$$

donde Δt es la variación en el parámetro tiempo inicial y final de la trayectoria.

Variación general de la acción Obtenemos la variación general de la Acción aplicando las siguientes condiciones:

(1) Las variaciones de la trayectoria (coordenadas y tiempo) son pequeñas, de forma que

$$\Delta S \simeq L(t_2)\Delta t_2 - L(t_1)\Delta t_1 + \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt \tag{3.4.17}$$

(2) El último término representa el Principio de Hamilton

$$\delta S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt \tag{3.4.18}$$

teniendo en cuenta que ahora la variación δq en los extremos (esto es, para un tiempo constante) será diferente de cero, esto es,

$$\delta q(t_1) \neq 0 \quad , \quad \delta q(t_2) \neq 0 \tag{3.4.19}$$

Aplicando entonces el cálculo variacional a este Principio de Hamilton obtenemos la extensión del resultado (sección 2.1.1) a variaciones no nulas en los extremos, tomadas a tiempo constante:

$$\delta S = p\delta q \Big|_{t_1}^{t_2} \tag{3.4.20}$$

(3) Reuniendo los dos resultados vemos que la variación de la acción satisface

$$\Delta S = (L\Delta t + p\delta q) \Big|_{t_1}^{t_2} \tag{3.4.21}$$

Hemos definido Δq como la variación más general posible de la trayectoria, en la que varía la coordenada (en la cantidad δq) a tiempo constante, y varía el parametro temporal, en la cantidad Δt. Por tanto, para variaciones pequeñas se satisface

$$\Delta q \equiv \delta q + \dot{q}\Delta t \tag{3.4.22}$$

y con esto la variación de la acción tiene la expresión final (con $L = p\dot{q} - H$)

$$\Delta S = (p\Delta q - H\Delta t) \Big|_{t_1}^{t_2} \tag{3.4.23}$$

con la expresión correcta en términos de las variaciones generales de la coordenada y el tiempo.

Principio de Acción estacionaria Obtenemos el Principio de Acción estacionaria (veáse la sección 12.4.4 para una descripción más básica de este Principio)

$$\Delta \int p\dot{q} dt = 0 \tag{3.4.24}$$

cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

- H es una cantidad conservada, y por tanto no depende explícitamente del tiempo. Esta independencia del tiempo lleva necesariamente a que tenga el mismo valor para la trayectoria real y para cualquier trayectoria variada.
- Además la variación de las coordenadas es nula en los extremos

$$\Delta q(t_1) = 0 = \Delta q(t_2) \tag{3.4.25}$$

aunque no puede exigirse a la vez que $\Delta t_1 = 0 = \Delta t_2$ porque esto sería incompatible con tener un H constante.

Comprobación Bajo estas condiciones la variación de la acción está dada por la expresión

$$\Delta S = -H\left(\Delta t_2 - \Delta t_1\right) \tag{3.4.26}$$

pero a su vez, a partir de su definición, también satisface, para un Hamiltoniano constante,

$$S = \int \left(p\dot{q} - H\right) dt \Rightarrow \ \Delta S = \Delta \int p\dot{q}dt - H\Delta \int dt \tag{3.4.27}$$

Comparando ambas expresiones, deducimos la expresión del Principio de Acción estacionaria para una variación arbitraria de las trayectorias[1]

$$\Delta \int p\dot{q}dt = 0 \tag{3.4.28}$$

3.4.3. Otros Principios variacionales relacionados

Principio de Fermat En el caso de un sistema mecánico para el cual la energía cinética sea función cuadrática de las velocidades y el potencial sólo dependa de las coordenadas, tenemos, por definición y aplicando el grado de homogeneidad de T,

$$p\dot{q} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\dot{q} = 2T \tag{3.4.29}$$

de forma que el Principio de Acción estacionaria se expresa en la forma

$$\Delta \int Tdt = 0 \tag{3.4.30}$$

y considerando además que el potencial sea constante,

$$H = T + V = \text{cte} \Rightarrow \ T = \text{cte} \tag{3.4.31}$$

y la ley de variación se lee

$$\Delta \int dt = 0 \tag{3.4.32}$$

que constituye el denominado *Principio de Fermat*[2] ó de tiempo mínimo.

Principio de Jacobi Consideremos de nuevo el caso de un sistema mecánico para el cual la energía cinética sea función cuadrática de las velocidades y el potencial sólo dependa de las coordenadas. Consideremos además que la energía cinética puede expresarse en la forma métrica

$$T \equiv \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \tag{3.4.33}$$

[1] Véase en la sección 12.4.4 la explicación de unos ejemplos sencillos de este Principio.
[2] Véase la sección 12.4.4 para una explicación más directa de este Principio.

siendo ds el *elemento de arco*, definido en la forma

$$ds^2 = g_{ij}dq_i dq_j \tag{3.4.34}$$

Entonces, al ser

$$Tdt = \frac{1}{2}\frac{ds}{dt}ds = \frac{1}{2}\sqrt{T}ds \tag{3.4.35}$$

el Principio de Acción estacionaria se reduce a un Principio puramente geométrico, expresado como

$$\Delta \int \sqrt{T}ds \equiv \Delta \int \sqrt{H - V(q)}ds \tag{3.4.36}$$

que se denomina *Principio de Jacobi*[1] En el caso de un valor constante de la energía cinética, lo que equivale para H constante, a un valor constante del potencial, el Principio se reduce al camino mínimo geodésico para la métrica definida por la energía cinética del sistema

$$\Delta \int ds = 0 \tag{3.4.37}$$

3.4.4. Acción para la partícula libre

Como ejemplo, y a modo de resumen comparativo, presentamos las tres posibles vías que tenemos para determinar la ecuación de movimiento de la partícula libre.

Principio de Acción estacionaria Partiendo de la acción $S[x(t)]$, funcional de la trayectoria $x(t)$ de la partícula, la condición de acción estacionaria se escribe $\delta S = 0$, que también se puede escribir

$$\delta S \equiv \int \frac{\delta S}{\delta x(t)}\delta x(t)dt = 0 \tag{3.4.38}$$

y dado que la variación $\delta x(t)$ es arbitraria, deducimos directamente que

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = 0 \tag{3.4.39}$$

Esto es, la *derivada funcional* de S respecto a $x(t)$ debe ser nula.

Este concepto de derivada funcional se define en analogía a la derivada de una función

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x + \epsilon y) - f(x)}{\epsilon} \equiv y f'(x) \tag{3.4.40}$$

y en consecuencia, esta derivada funcional de S se define en la forma

$$\delta S \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{S[x(t) + \epsilon y(t)] - S[x(t)]}{\epsilon} \equiv \int \frac{\delta S}{\delta x(t)} y(t)dt \tag{3.4.41}$$

Aplicando esta definición a la acción de la partícula libre, $S[x(t)] = \int \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)dt$, obtenemos en primer lugar

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{S[x(t) + \epsilon y(t)] - S[x(t)]}{\epsilon} = \int m\dot{x}(t)\dot{y}(t)dt \tag{3.4.42}$$

Integramos ahora por partes para poder despejar el valor $y(t)$ en el integrando, sabiendo que la variación de la trayectoria, esto es, en nuestro caso la función $y(t)$, se anula en los extremos, esto es, $y(t_1) = 0 = y(t_2)$:

$$\int m\dot{x}(t)\dot{y}(t)dt = m\dot{x}(t)\cancelto{0}{y(t)}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int m\ddot{x}(t)y(t)dt \tag{3.4.43}$$

[1] Véase la sección 12.4.4 para una explicación más directa de este Principio.

Obtenemos por tanto la variación de la acción en la forma

$$\delta S = -\int m\ddot{x}(t)y(t)dt \equiv \int \frac{\delta S}{\delta x(t)}y(t)dt \tag{3.4.44}$$

y de la arbitrariedad de $y(t)$ deducimos la ecuación del movimiento, que corresponde a la acción estacionaria:

$$0 = \frac{\delta S}{\delta x(t)} = -m\ddot{x}(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) = 0 \tag{3.4.45}$$

Formulación Lagrangiana A partir del Lagrangiano de la partícula libre, $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, definido en el espacio de configuraciones $x(t)$, la ecuación de movimiento es la ecuación de Euler−Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dt}m\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x}(t) = 0 \tag{3.4.46}$$

Formulación Hamiltoniana Determinamos en primer lugar Hamiltoniano a partir del Lagrangiano, con la definición de momento

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{3.4.47}$$

con el resultado

$$H \equiv \dot{x}p - L = \frac{p^2}{2m} \tag{3.4.48}$$

que es una función definida en el espacio de fases (x, p). En dicho espacio la ecuación de movimiento está dada por las dos ecuaciones de Hamilton

$$\dot{x} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} \equiv -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{3.4.49}$$

De estas dos ecuaciones, eliminando la variable p, podemos obtener la ecuación de movimiento para la coordenada x, en la forma

$$\ddot{x}(t) = \frac{\dot{p}(t)}{m} = 0 \tag{3.4.50}$$

3.5. Coordenadas cíclicas y Teoremas de conservación

Introducción La diferencia, al menos formal, entre un *Teorema* de conservación y una *Ley* de conservación reside en que el teorema está asociado a una propiedad de simetría del sistema con una cierta naturaleza física, mientras que la ley de conservación se asocia a una propiedad de simetría de naturaleza más matemática, o con un significado físico de menor relevancia. Así hablamos por ejemplo del Teorema de conservación del momento lineal o del momento angular, o de una ley de conservación derivada de la invariancia del sistema bajo cambio de escala.
Estos *aspectos* de simetría se analizan de una forma más sencilla cuando se introducen en la teoría las denominadas *transformaciones infinitesimales*, y se analizan a su vez con los denominados *corchetes de Poisson*. Este análisis se desarrolla y detalla en la sección 4.6, especialmente en su apartado 4.6.4 y siguientes.
En espera, por tanto, de poder tratar las simetrías y los teoremas de conservación asociados con las herramientas más adecuadas, describimos aquí en esta sección las *leyes de conservación* con una visión simple, sin analizar en detalle cómo se originan.

Coordenada cíclica Una coordenada q será cíclica si el Hamiltoniano ó el Lagrangiano es independiente de q. Esto es, la dinámica es independiente del valor concreto de q, y por tanto es independiente de la ley de movimiento de la coordenada $q(t)$, como vemos a continuación.

Para ello, precisamos en mayor profundidad el origen físico del término cíclico. En particular, el término *cíclico* se refiere a una cantidad que se repite en el tiempo. Cuando el momento p se mantiene constante, podemos decir que la integral primera del movimiento

$$p = \text{cte} \tag{3.5.1}$$

es una integral cíclica, ya que se repite su valor para cada instante del tiempo. Y este proceso cíclico se debe a la independencia de la dinámica con la coordenada q:

$$\frac{\partial H}{\partial q} \equiv 0 \quad \rightarrow \quad \dot{p} \equiv 0 \quad \rightarrow \quad p = \text{cte} \tag{3.5.2}$$

Así por extensión, la expresión "coordenada que da lugar a una integral cíclica" se reduce en la práctica a la expresión "coordenada cíclica" subrayando que es q y no p la variable que *genera* esta integral del movimiento.

Podemos entonces verificar que la dinámica es independiente de $q(t)$. En general tenemos lo siguiente (es suficiente con tratar el caso independiente del tiempo):

$$\frac{\partial H}{\partial q} \equiv 0 \quad \rightarrow \quad H = H(p) \tag{3.5.3}$$

y de ello la ecuación de movimiento para q se lee

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dH}{dp} \equiv f(H) = \text{cte} \tag{3.5.4}$$

con la integral directa

$$q(t) = q_0 + f(H)t \tag{3.5.5}$$

que no es más físicamente que una reparametrización del tiempo, utilizando el valor constante $f(H)$. Al ser la dinámica independiente de la reparametrización temporal, será independiente del valor $q(t)$ que describe el movimiento. Como ejemplo, para una partícula libre la coordenada espacial es una coordenada cíclica y la dinámica es independiente de la posición de la partícula, ya que la partícula sigue siendo libre en todo punto del espacio, y que esté en un instante dado en una posición dada sólo depende de la parametrización temporal utilizada.

Leyes de conservación Por su sencillez las leyes de conservación en el formalismo Hamiltoniano se reducen a dos tipos[1]:

(1) Cuando una de las variables canónicas es cíclica, esto es, no aparece explícitamente en el Hamiltoniano, su variable asociada es constante. Este tipo incluye la ley de conservación del momento conjugado a una *coordenada cíclica* dentro del formalismo Lagrangiano

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \equiv 0 \Rightarrow \; p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{cte} \tag{3.5.6}$$

en la forma

$$\dot{p} \equiv -\frac{\partial H}{\partial q} \equiv 0 \Rightarrow \; p = \text{cte} \tag{3.5.7}$$

Dada la equivalencia completa entre sí de las variables canónicas, que como veremos pueden intercambiarse entre sí, esta ley de conservación no queda únicamente ligada a la constancia de la variable p como momento conjugado.
En todo caso, sí se mantienen las mismas leyes usuales de conservación del momento lineal, del momento angular y de la energía para un sistema mecánico que aparecen en el formalismo Lagrangiano (véase la sección 2.3).

[1] Véase también las leyes correspondientes de conservación definidas en el formalismo Lagrangiano, sección 2.3.

(2) Hemos indicado numerosas veces la importancia del parámetro temporal t en el formalismo Hamiltoniano, cuya expresión más explícita es la ley de conservación del propio Hamiltoniano, que se deduce de la tercera ecuación de Hamilton

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{3.5.8}$$

al ser

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \ H = \text{cte} \tag{3.5.9}$$

Esto es, si el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo será una constante del movimiento.

- Explicamos brevemente el origen canónico de esta ley de conservación, con un argumento que desarrollamos con más detalle en el apéndice 4.13:
  La cuestión clave es que en el denominado *espacio de fases extendido* (espacio formado por las variables canónicas y el tiempo) el Hamiltoniano resulta ser la variable canónica asociada a la *coordenada* de tiempo. Así, de la misma forma que el momento p es el generador de la traslación[1] de la coordenada q, H es el generador de la traslación de la *coordenada* t. Y, del mismo modo que si la coordenada q es cíclica, el momento p se conserva en el tiempo, si la *coordenada* t es cíclica (el Hamiltoniano no depende explícitamente de t), su variable canónica, el Hamiltoniano H, se conserva en el tiempo.

3.5.1. Método de Routh

Definiciones El *método de Routh* es la descripción de la dinámica de un sistema *necesariamente* mecánico basada en la definición del denominado *Routhiano*, a medio camino entre el Lagrangiano y el Hamiltoniano. En particular, la dinámica de una parte del sistema, esto es, para un conjunto determinado de las coordenadas del sistema, quedará descrita por el formalismo Lagrangiano, y el resto del sistema, las restantes coordenadas del sistema, quedará descrito por el formalismo Hamiltoniano.
Consideremos que para las N coordenadas (grados de libertad) del sistema, tenemos S gobernadas por el Lagrangiano, y $N-S$ gobernadas por el Hamiltoniano. Estaremos por tanto realizando una transformación de Legendre únicamente las $N-S$ variables, y el Routhiano así construído tendrá de la dependencia funcional

$$R \equiv R(q_i, \dot{q}_i, q_j, p_j; t) \tag{3.5.10}$$

donde $i = 1, .., S$ y $j = S+1, .., N$. Con esta dependencia funcional, el Routhiano actuará como el Lagrangiano L para las primeras S coordenadas y velocidades generalizadas, y actuará como el Hamiltoniano H para las restantes $N-S$ variables canónicas.

Procedimiento La cuestión clave por tanto es cómo construir la función R con tales propiedades. Como hemos indicado, el sistema necesariamente debe ser mecánico, y debe estar dotado de un Lagrangiano L para el conjunto de las N coordenadas y velocidades generalizadas.
Realizamos entonces una transformación de Legendre para las $N-S$ velocidades seleccionadas, definiendo el Routhiano como el *Hamiltoniano* asociado a esta transformación. No será el Hamiltoniano real del sistema, ya que para ello sería necesario la transformación de Legendre de *todas* las velocidades del sistema. Por tanto, por definición tenemos

$$R \equiv \sum_{j=S+1}^{N} p_j \dot{q}_j - L \tag{3.5.11}$$

[1] Véase la sección 3.3.2, y para una explicación completa de los *generadores de transformaciones.*, véase la sección 13.2.2.

Ecuaciones de Routh del movimiento Para obtener las ecuaciones del movimiento del sistema aplicamos el mismo procedimiento estándar que nos llevó a las ecuaciones de Hamilton (véase la sección 3.3.1). En primer lugar, obtenemos la expresión de la diferencial dR definida en el espacio abstracto $(q_i, \dot{q}_i, q_j, p_j; t)$:

$$dR = p_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j - dL = -\dot{p}_j dq_j + \dot{q}_j dp_j - \dot{p}_i dq_i - p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{3.5.12}$$

donde por simplicidad obviamos el sumatorio en i y j, y hemos utilizado

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \equiv \frac{dp_i}{dt} \tag{3.5.13}$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i \tag{3.5.14}$$

Una vez obtenida esta expresión, ajustamos lo obtenido con lo esperado para una función R con la dependencia funcional dada

$$R \equiv R(q_i, \dot{q}_i, q_j, p_j; t) \Longrightarrow\ dR = \frac{\partial R}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial R}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial R}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial R}{\partial t} dt \tag{3.5.15}$$

Identificando los coeficientes de los distintos términos diferenciales, concluímos que las ecuaciones de movimiento en función del Routhiano para las S coordenadas y velocidades generalizadas $q_i, \dot{q}_i$ son

$$p_i \equiv -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial R}{\partial q_i} \tag{3.5.16}$$

que son respectivamente la definición del momento conjugado y la ecuación de Euler−Lagrange propiamente dicha del movimiento.
A su vez, para las variables canónicas (q_j, p_j) del sistema, las ecuaciones del movimiento son

$$\dot{q}_j = \frac{\partial R}{\partial p_j} \quad , \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial R}{\partial q_j} \tag{3.5.17}$$

que son las dos primeras ecuaciones de Hamilton para el Routhiano, junto con la tercera ecuación de Hamilton que se expresa en la forma

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.5.18}$$

que realmente no representa ninguna ley dinámica del sistema, por lo que sería una ecuación trivial cuyo *trivialidad* reside en la resolución de la dinámica bajo los dos formalismos de forma conjunta.

3.5.2. Ejemplos

Para comprender correctamente lo que representan las ecuaciones de movimiento obtenidas en función del Routhiano, trabajaremos con dos ejemplos sencillos.

Coordenada cíclica Consideremos un sistema de N grados de libertad en los cuales uno, digamos q_1 es una coordenada cíclica. Como sabemos, esto indica que el momento conjugado para el formalismo Lagrangiano, o el momento canónico para el formalismo Hamiltoniano, es una constante del movimiento.
Tratemos de obtener esta conclusión aplicando el método de Routh. Elijamos por simplicidad la coordenada cíclica q_1 como coordenada canónica del Routhiano, esto es, definamos la función R en la forma

$$R \equiv p_1 \dot{q}_1 - L \tag{3.5.19}$$

Entonces las ecuaciones de movimiento para las restantes coordenadas y velocidades generalizas, definidas por

$$p_i \equiv -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial R}{\partial q_i} \tag{3.5.20}$$

se reducen a las ecuaciones de Euler−Lagrange para un sistema de $N-1$ grados de libertad, siendo R el Lagrangiano asociado[1]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial R}{\partial q_i} \tag{3.5.21}$$

ecuaciones en las que aparecerá una dependencia en las variables restantes (q_1, p_1) como meros *parámetros*.
Y por otro lado, las variables canónicas satisfacen las leyes de movimiento

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial R}{\partial p_1} \quad , \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial R}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \; p_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial q_1} = \text{cte} \tag{3.5.22}$$

correspondientes a una coordenada cíclica para una dinámica con Hamiltoniano R.

Estabilidad de órbita circular en potencial central $V(r)$ Otro campo de aplicación del método de Routh es el análisis de estabilidad de puntos de equilibrio en la dinámica del sistema. Consideremos como ejemplo una órbita circular de una partícula puntual en el plano cartesiano con coordenadas polares (r, θ), en presencia del potencial central $V(r)$.

(1) Partimos del Lagrangiano de este sistema mecánico, expresado en la forma

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \tag{3.5.23}$$

Dado que θ resulta ser una coordenada cíclica, podemos realizar el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior, y definir el Routhiano en la forma

$$R(p_\theta, r, \dot{r}) \equiv p_\theta\dot{\theta} - L\big(\dot{\theta}, r, \dot{r}\big) \tag{3.5.24}$$

donde el momento conjugado p_θ es una constante, definida por

$$p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \equiv \ell = \text{cte} \tag{3.5.25}$$

En este caso de un sistema de dos grados de libertad, en los que uno de ellos es una coordenada cíclica, el Routhiano sí pasa a ser el Lagrangiano de un sistema con un único grado de libertad, r, en presencia de un potencial efectivo (el potencial *centrífugo*)

$$R(r, \dot{r}) \equiv \ell\frac{\ell}{mr^2} - \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{mr^2} + V(r) - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \equiv V_{ef}(r) - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \tag{3.5.26}$$

siendo

$$V_{ef}(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2} \tag{3.5.27}$$

(2) Una vez obtenido el Lagrangiano[2] R determinamos la condición para tener una órbita circular, para pasar posteriormente a analizar su estabilidad.
La órbita circular de radio r_0 corresponde a la condición conjunta para la variable radial

$$\dot{r} = 0 \quad , \quad r = r_0 \tag{3.5.28}$$

[1] Debe notarse que en *ningún caso* hemos reducido el número de grados de libertad, esto es, este Lagrangiano R sigue dependiendo de N grados de libertad, y la $N-1$ ecuaciones de Euler−Lagrange obtenidas dependerán *paramétricamente* de las variables restantes (q_1, p_1). Dicho de otra forma, el método de Routh no *desacopla* en general el movimiento del sistema en un movimiento Lagrangiano y un movimiento Hamiltoniano.

[2] Podríamos haber aplicado el procedimiento en el otro sentido, definir el Hamiltoniano para las variables r, p_r, y obtener el Lagrangiano para las variables $\theta, \dot{\theta}$. La diferencia para priorizar un método sobre otro estriba en que el análisis de estabilidad resulta más sencillo dentro del formalismo Lagrangiano, al tener una única ecuación de movimiento, aunque los procedimientos son equivalentes en los dos casos dando lugar a los mismos resultados.

Esta condición debe ser compatible con la ecuación del movimiento, dada por la ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial R}{\partial r} \tag{3.5.29}$$

por lo que la condición de órbita circular se reduce a

$$\frac{\partial R}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = 0 \tag{3.5.30}$$

esto es, los valores r_0 soluciones de

$$V'_{ef}(r_0) = 0 \Rightarrow\ V'(r_0) = \frac{\ell^2}{mr_0^3} \tag{3.5.31}$$

ó en función de la fuerza, $f(r) = -dV/dr$

$$f(r_0) = -\frac{\ell^2}{mr_0^3} \tag{3.5.32}$$

(3) Finalmente queremos analizar la estabilidad de esta órbita circular, entendiendo por estabilidad el movimiento del sistema cuando se ve perturbado desde su posición $r = r0$, esto es, para un valor de la coordenada radial

$$r \equiv r_0 + \varepsilon \tag{3.5.33}$$

considerando entonces el desplazamiento ε como la variable radial del sistema, y por tanto con la ecuación de movimiento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\varepsilon}}\right) = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \Rightarrow\ m\ddot{\varepsilon} = -V'(r_0+\varepsilon) + \frac{\ell^2}{m\left(r_0+\varepsilon\right)^3} \tag{3.5.34}$$

Considerando entonces un desplazamiento pequeño respecto a la posición de equilibrio radial, $r = r_0$

$$|\varepsilon| \ll r_0 \tag{3.5.35}$$

podemos desarrollar los términos de la ecuación de movimiento en serie de potencias en ε quedándonos con el primer término de menor orden, para $\varepsilon \to 0$. Obtenemos la ecuación de movimiento en particular en orden ε

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{V''(r_0) + \frac{3\ell^2}{mr_0^4}}{m}\varepsilon = 0 \tag{3.5.36}$$

(4) Como conclusión, vemos que el factor que multiplica a ε actúa como la frecuencia al cuadrado de un oscilador armónico, con el valor

$$\ddot{\varepsilon} + \omega^2\varepsilon = 0 \quad , \quad \omega^2 \equiv \frac{V''(r_0) + \frac{3\ell^2}{mr_0^4}}{m} \tag{3.5.37}$$

Analizando esta ecuación diferencial vemos que ε tendrá un comportamiento oscilatorio, y por tanto, la posición radial de la partícula oscilará en torno al valor $r = r_0$, esto es, la órbita será estable, si la cantidad ω^2 es positiva. Concluimos por tanto que la estabilidad de la órbita circular exige que el potencial central cumpla las condiciones conjuntas

$$V'_{ef}(r_0) \equiv V'(r_0) - \frac{\ell^2}{mr_0^3} = 0 \quad , \quad V''(r_0) + \frac{3\ell^2}{mr_0^4} > 0 \tag{3.5.38}$$

(5) Como ejemplo final, si expresamos esta condición en términos de la fuerza, y eliminamos el término centrífugo en las dos expresiones anteriores, obtenemos la condición directa

$$f'(r_0) + 3\frac{f(r_0)}{r_0} > 0 \tag{3.5.39}$$

y de forma muy sencilla podemos verificar por ejemplo que una fuerza central del tipo

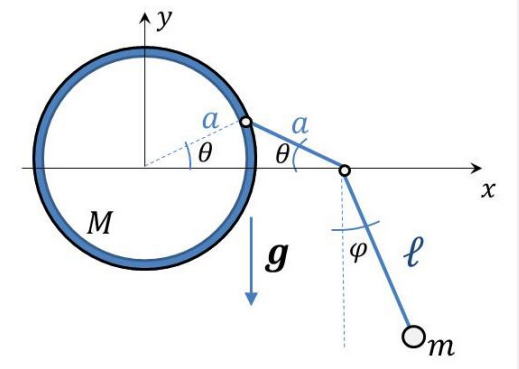
$$f(r) = \frac{k}{r^n} \tag{3.5.40}$$

sólo podrá tener órbitas circulares estables para $n < 3$. Una extensión muy importante de este resultado es el denominado *teorema de Bertrand*, que no desarrollamos aquí, y que establece que entre los potenciales con órbitas estables, esto es, con $n < 3$, sólo el potencial de Kepler $V(r) = -k/r$ $(n = 1)$ y el potencial armónico $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ $(n = -2)$ tienen todas las órbitas cerradas (esto es, no sufren precesión).

3.6. Ejercicios resueltos

3.6.1. Pendulo ligado a un volante (M)

El punto de suspensión de un péndulo simple de masa m y longitud ℓ está obligado a moverse a lo largo de una recta horizontal, y está conectado a un punto de la periferia de un volante de masa M y radio a, como indica la figura. El volante gira libremente alrededor del eje perpendicular a la figura y que pasa por su centro de masa.



(a) Determine el Lagrangiano del sistema.

(b) Determine el Hamiltoniano del sistema, y analice si es una cantidad conservada, y si coincide con la energía. Por comodidad, utilice una notación matricial para simplificar los cálculos (véase el Apéndice 3,10,1).

(c) Determine las ecuaciones de Hamilton correspondientes, también en notación matricial.

(a) Como coordenadas generalizadas, tomamos los dos ángulos (θ, φ) de la figura. El ángulo θ define la posición angular del volante, y el ángulo φ es el ángulo de giro del péndulo. La energía potencial del volante es, por definición, constante e igual a cero tomando como referencia el plano horizontal $y = 0$ que pasa por el centro del volante. El Lagrangiano del sistema está dado entonces por

$$L\left(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}\right) = T_v + T_m - V_m \tag{3.6.1}$$

siendo T_v la energía cinética del volante, y T_m, V_m la energía cinética y potencial de la masa m. Por un lado, la energía cinética del volante, debida a su rotación, es

$$T_v = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Ma^2\omega^2 \tag{3.6.2}$$

siendo $I = Ma^2$ su momento de inercia. Dado que el volante gira libremente no existe ligadura externa que determine el valor de la velocidad angular, dada por la variación respecto al tiempo del ángulo que define la orientación del volante respecto a los ejes (x, y) fijos en el espacio. Esto es,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow T_v = \frac{1}{2} M a^2 \dot{\theta}^2 \tag{3.6.3}$$

Por otro lado, dado que la masa de péndulo es puntual, su energía cinética se deberá a su movimiento de traslación y tiene la expresión

$$T_m = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2 \right) \tag{3.6.4}$$

donde (x_m, y_m) son sus coordenadas respecto a los ejes fijos en el espacio. Esto es, tomando los ángulos de la figura,

$$x_m = x_S + \ell \operatorname{sen} \varphi = 2a \cos\theta + \ell \operatorname{sen} \varphi \quad , \quad y_m = -\ell \cos\varphi \tag{3.6.5}$$

donde x_S es la localización horizontal del punto de suspensión del péndulo. Derivando estas coordenadas respecto al tiempo, obtenemos la velocidad de la masa m en la forma

$$\dot{x}_m = -2a\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta + \ell\dot{\varphi}\cos\varphi \quad , \quad \dot{y}_m = \ell\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi \tag{3.6.6}$$

y de aquí

$$v_m^2 \equiv \dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2 = 4a^2\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \ell^2\dot{\varphi}^2 - 4a\ell\dot{\varphi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \tag{3.6.7}$$

Con esto T_m tiene la expresión

$$T_m = 2ma^2\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\varphi}^2 - 2ma\ell\dot{\varphi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \tag{3.6.8}$$

Finalmente su energía potencial V_m tiene la expresión usual

$$V_m = mgy_m = -mg\ell\cos\varphi \tag{3.6.9}$$

Teniendo en cuenta estas expresiones, el Lagrangiano del sistema está dado por

$$\begin{aligned} L &= T_v + T_m - V_m \\ &= \frac{1}{2}\left(M + 4m\operatorname{sen}^2\theta\right) a^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\varphi}^2 - 2ma\ell\dot{\varphi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + mg\ell\cos\varphi \end{aligned} \tag{3.6.10}$$

(b) Para obtener la formulación Hamiltoniana del problema, debemos definir previamente los momentos generalizados (p_θ, p_φ) en la forma

$$p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \left(M + 4m\operatorname{sen}^2\theta\right) a^2\dot{\theta} - 2ma\ell\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \tag{3.6.11}$$

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m\ell^2\dot{\varphi} - 2ma\ell\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \tag{3.6.12}$$

ecuaciones que deben invertirse para dar las velocidades generalizadas $\left(\dot{\theta}, \dot{\varphi}\right)$ en función de los momentos generalizados. Dada la complejidad de las ecuaciones, es más conveniente reescribir los momentos generalizados utilizando una notación matricial en la forma

$$p \equiv \begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \tag{3.6.13}$$

donde $\mathcal{A}$ es la matriz 2×2

$$\mathcal{A} \equiv \begin{pmatrix} \left(M + 4m\operatorname{sen}^2\theta\right) a^2 & -2ma\ell\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ -2ma\ell\operatorname{sen}\theta\cos\varphi & m\ell^2 \end{pmatrix} \tag{3.6.14}$$

En este caso, el Lagrangiano tiene además la expresión matricial

$$L = \frac{1}{2} v^T \cdot \mathcal{A} \cdot v - V \tag{3.6.15}$$

donde las velocidades generalizadas v se obtienen aplicando la inversión matricial, que da lugar a

$$v \equiv \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1} \cdot p = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \begin{pmatrix} m\ell^2 & 2ma\ell \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ 2ma\ell \operatorname{sen}\theta \cos\varphi & \left(M + 4m \operatorname{sen}^2\theta\right) a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix} \tag{3.6.16}$$

dado que $\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \left(\mathcal{A}^{\mathtt{ad}}\right)^T$, donde $\mathtt{ad}$ denota la matriz adjunta, T es la transposición de los elementos de matriz, y el determinante de la matriz tiene el valor

$$\det \mathcal{A} = mMa^2\ell^2 + 4m^2a^2\ell^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi \tag{3.6.17}$$

Finalmente, el Hamiltoniano está dado, también en forma matricial, por la fórmula usual

$$H = v^T \cdot p - L = \frac{1}{2} p^T \cdot \mathcal{A}^{-1} \cdot p + V \tag{3.6.18}$$

con el desarrollo

$$H = \frac{1}{2 \det \mathcal{A}} \left(m\ell^2 p_\theta^2 + 4ma\ell \operatorname{sen}\theta \cos\varphi\, p_\theta p_\varphi + \left(M + 4m \operatorname{sen}^2\theta\right) a^2 p_\varphi^2\right) - mg\ell\cos\varphi \tag{3.6.19}$$

Dado que en virtud de su definición, se satisface

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.6.20}$$

y ya que el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, el Hamiltoniano es una constante del movimiento

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \rightarrow H = \text{cte} \tag{3.6.21}$$

Además como la expresión de la energía cinética es cuadrática en las velocidades generalizadas, esto es, $T = T_2(x, v)$, dicho Hamiltoniano coincide con la energía total del sistema, definida en la forma

$$L = T_2(x, v) - V(x) \rightarrow H = v\frac{\partial L}{\partial v} - L = 2T_2 - (T_2 - V) = T_2 + V \equiv E \tag{3.6.22}$$

(c) Finalmente, las ecuaciones de Hamilton se escriben en notación matricial

$$v \equiv \frac{\partial H}{\partial p} \equiv \begin{pmatrix} \partial H/\partial p_\theta \\ \partial H/\partial p_\varphi \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1} \cdot p \tag{3.6.23}$$

con el desarrollo

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \left(m\ell^2 p_\theta + 2ma\ell \operatorname{sen}\theta \cos\varphi\, p_\varphi\right) \tag{3.6.24}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \left(2ma\ell \operatorname{sen}\theta \cos\varphi\, p_\theta + \left(M + 4m \operatorname{sen}^2\theta\right) a^2 p_\varphi\right) \tag{3.6.25}$$

y

$$\dot{p} \equiv -\frac{\partial H}{\partial x} \equiv -\begin{pmatrix} \partial H/\partial\theta \\ \partial H/\partial\varphi \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} p^T \cdot \begin{pmatrix} \partial \mathcal{A}^{-1}/\partial\theta \\ \partial \mathcal{A}^{-1}/\partial\varphi \end{pmatrix} \cdot p - \begin{pmatrix} \partial V/\partial\theta \\ \partial V/\partial\varphi \end{pmatrix} \tag{3.6.26}$$

que dejamos sin desarrollar explícitamente, al tener una expresión más extensa.

3.6.2. Hamiltoniano dependiente del tiempo (M)

El Hamiltoniano de un sistema con un grado de libertad tiene la expresión

$$H(q,p,t) = \frac{p^2}{2A} - Bqpe^{-At} + \frac{1}{2}q^2\left(ABe^{-At}\left(A + Be^{-At}\right) + C\right) \tag{3.6.27}$$

donde A, B, C son constantes.

(a) Determine el Lagrangiano del sistema, y obtenga a partir de éste, un nuevo Lagrangiano del sistema que no dependa explícitamente del tiempo.

(b) Hallar el nuevo Hamiltoniano del sistema y discuta la relación de éste con el Hamiltoniano inicial.

(a) Partiendo de la definición de Hamiltoniano

$$H(q,p,t) \equiv \dot{q}(q,p,t)\cdot p - L(q,p,t) \tag{3.6.28}$$

aplicamos el procedimiento inverso para obtener el Lagrangiano a partir del Hamiltoniano en la forma

$$L(q,\dot{q},t) \equiv \dot{q}\cdot p(q,\dot{q},t) - H(q,\dot{q},t) \tag{3.6.29}$$

donde $p = p(q,\dot{q},t)$ es la forma funcional del momento canónico, que debe obtenerse a partir de la resolución de la primera ecuación de Hamilton

$$\dot{q} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} \tag{3.6.30}$$

En este caso particular llegamos a la relación

$$\dot{q} = \frac{p}{A} - Bqe^{-At} \tag{3.6.31}$$

que invertimos en la forma

$$p = A\left(\dot{q} + Bqe^{-At}\right) \tag{3.6.32}$$

En el siguiente paso debemos obtener el Hamiltoniano en la forma funcional $H(q,\dot{q},t)$ haciendo uso de esta dependencia entre el momento y la velocidad generalizada, con el resultado

$$H(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}A\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\left(A^2Be^{-At} + C\right)q^2 \tag{3.6.33}$$

Y de aquí, obtenemos directamente el Lagrangiano en la forma

$$\begin{aligned} L(q,\dot{q},t) &= A\dot{q}\left(\dot{q} + Bqe^{-At}\right) - \frac{1}{2}A\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\left(A^2Be^{-At} + C\right)q^2 \\ &= \frac{1}{2}A\dot{q}^2 + ABq\dot{q}e^{-At} - \frac{1}{2}\left(A^2Be^{-At} + C\right)q^2 \end{aligned} \tag{3.6.34}$$

Para obtener un nuevo Lagrangiano, vemos ahora que cualquier Lagrangiano adicional en la forma

$$L' = L + \frac{df}{dt} \tag{3.6.35}$$

siendo f una función de las coordenadas y el tiempo, dará lugar a la misma ecuación de movimiento del sistema (la ecuación de Euler−Lagrange), y por tanto será también un Lagrangiano del sistema. En este caso, como se requiere de antemano que L' no dependa explícitamente del tiempo, con una simple inspección se comprueba que debemos elegir f tal que df/dt sea igual a los términos dependientes del tiempo en el Lagrangiano L, cambiados de signo. Esto es,

$$\frac{df}{dt} = -ABq\dot{q}e^{-At} + \frac{1}{2}A^2Be^{-At}q^2 \tag{3.6.36}$$

Dado que

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}ABe^{-At}q^2\right) = -ABe^{-At}q\dot{q} + \frac{1}{2}A^2Be^{-At}q^2 \tag{3.6.37}$$

deducimos que la función f debe ser de la forma

$$F = -\frac{1}{2}ABe^{-At}q^2 + \text{cte} \tag{3.6.38}$$

siendo en este caso el nuevo Lagragiano

$$L'(q,\dot{q}) = L + \frac{df}{dt} = \frac{1}{2}A\dot{q}^2 - \frac{1}{2}Cq^2 \tag{3.6.39}$$

independiente del tiempo, que además corresponde al oscilador armónico unidimensional.

(b) Antes de obtener la expresión particular del nuevo Hamiltoniano, analizamos el tipo de Hamiltoniano que se obtiene a partir del Lagrangiano modificado en la forma anterior

$$L' = L + \frac{df}{dt} \tag{3.6.40}$$

Para ello, determinamos en primer lugar el nuevo momento generalizado, definido en la forma

$$p' = \frac{\partial L'}{\partial q} \tag{3.6.41}$$

que satisface

$$p' = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{df}{dt}\right) = p + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{df}{dt}\right) \tag{3.6.42}$$

Podemos simplificar el segundo término aún más teniendo en cuenta que la función f sólo depende de (q,t), no de la velocidad generalizada $\dot{q}$. Por tanto, de la expresión derivada de la regla de la cadena para la derivada temporal

$$\frac{df(q,t)}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dq}{dt}\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} \tag{3.6.43}$$

deducimos que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{\partial f}{\partial q} \tag{3.6.44}$$

con lo cual, la relación entre los momentos generalizados se escribe

$$p' = p + \frac{\partial f}{\partial q} \tag{3.6.45}$$

Y de aquí, por la definición del Hamiltoniano, obtenemos la relación buscada entre los Hamiltonianos, al ser

$$H'(q,p') \equiv p'\dot{q} - L' = p\dot{q} - L + \dot{q}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{df}{dt} \tag{3.6.46}$$

que queda simplificada en la forma

$$H' = p\dot{q} - L + \dot{q}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{df}{dt} = H - \frac{\partial f}{\partial t} \tag{3.6.47}$$

que es la fórmula que buscábamos.
Una vez analizado el caso general, nos planteamos la resolución exacta. Ya que el nuevo Lagrangiano corresponde a un oscilador armónico, el Hamiltoniano estará dado directamente por la expresión correspondiente

$$H'(q,p') = \frac{1}{2A}p'^2 + \frac{1}{2}Cq^2 \tag{3.6.48}$$

donde

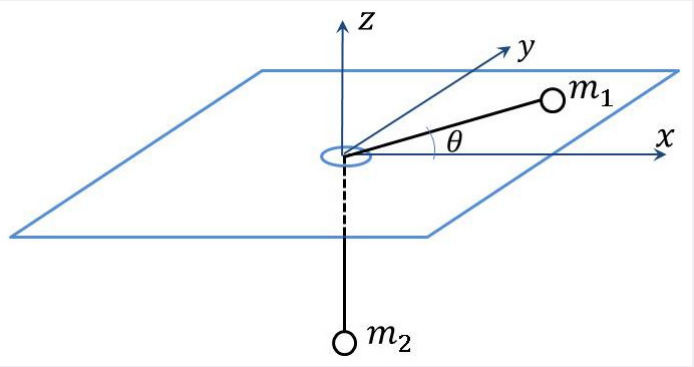
$$p' = p + \frac{\partial f}{\partial q} = p - ABe^{-At}q \tag{3.6.49}$$

Y el nuevo Hamiltoniano, que se conserva por ser independiente del tiempo, se relaciona con el Hamiltoniano inicial por la fórmula

$$H'(q,p') = H(q,p,t) + \frac{1}{2}A^2Be^{-At}q^2 \tag{3.6.50}$$

3.6.3. Masas puntuales unidas por una cuerda (M)

Dos masas puntuales m_1, m_2 están unidas por una cuerda de longitud constante ℓ, de forma que la primera partícula puede moverse libremente sin rozamiento sobre una mesa horizontal mientras que la segunda partícula cuelga verticalmente desde un orificio practicado en la superficie horizontal, como muestra la figura.



(a) Obtenga el Lagrangiano y el Hamiltoniano del sistema, y discuta su conservación o no, y su relación con la energía.

(b) Exprese la solución a la ecuación de movimiento en forma de cuadratura (véase el Apéndice 3.10.2).

(a) El sistema tiene dos coordenadas generalizadas, que podemos tomar como las coordenadas polares (r,θ) de la masa m_1 en el plano horizontal. En este caso, la energía cinética de m_1 es

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \tag{3.6.51}$$

Su energía potencial es constante, e igual a cero, tomando como referencia este plano $z = 0$. Para la masa m_2, la coordenada de posición es vertical en todo momento, con el valor

$$z_2 = -\left(\ell - r\right) \tag{3.6.52}$$

dada la ligadura que establece que la distancia entre las masas sea constante e igual a ℓ, y por tanto su energía cinética es, de forma directa

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 = \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 \tag{3.6.53}$$

mientras que su energía potencial es, también de forma directa

$$V_2 = m_2gz_2 = -m_2g\left(\ell - r\right) \tag{3.6.54}$$

Con todo ello, el Lagrangiano del sistema se expresa como

$$L = T - V = T_1 + T_2 - V_1 - V_2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2 + m_2g\left(\ell - r\right) \tag{3.6.55}$$

Para obtener ahora la formulación Hamiltoniana del problema, debemos definir previamente los momentos generalizados (p_r, p_θ) en la forma

$$p_r \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (m_1 + m_2)\,\dot{r} \quad , \quad p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_1 r^2 \dot{\theta} \tag{3.6.56}$$

ecuaciones que deben invertirse para dar las velocidades generalizadas $(\dot{r}, \dot{\theta})$ en función de los momentos generalizados, en la forma

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m_1 + m_2} \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m_1 r^2} \tag{3.6.57}$$

Con ayuda de estas ecuaciones, el Lagrangiano puede expresarse en función de las coordenadas y momentos generalizados en la forma

$$L = \frac{p_r^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{p_\theta^2}{2m_1 r^2} + m_2 g(\ell - r) \tag{3.6.58}$$

Finalmente, haciendo uso de su definición, el Hamiltoniano para este sistema bidimensional está dado por

$$H \equiv \dot{r} p_r + \dot{\theta} p_\theta - L = \frac{p_r^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{p_\theta^2}{2m_1 r^2} - m_2 g(\ell - r) \tag{3.6.59}$$

y ya que la energía cinética es cuadrática en las velocidades coincide con la energía del sistema. Además por no depender el Lagrangiano explícitamente del tiempo, es constante del movimiento. Esto es, se satisface

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{cte} \equiv E \tag{3.6.60}$$

(b) En el formalismo Hamiltoniano, las ecuaciones del movimiento son las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\theta} \equiv \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m_1 r^2} \quad , \quad \dot{r} \equiv \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m_1 + m_2} \tag{3.6.61}$$

y

$$\dot{p}_\theta \equiv -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \dot{p}_r \equiv -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{m_1 r^3} - m_2 g \tag{3.6.62}$$

Dado que tenemos dos grados de libertad, el sistema podrá ser resoluble por cuadraturas si podemos hallar una primera integral del movimiento. Utilizando el hecho de que la coordenada angular θ es cíclica, y por tanto, su momento conjugado es constante del movimiento,

$$p_\theta = \text{cte} \tag{3.6.63}$$

esto es, físicamente se conserva el momento angular en torno al eje z

$$p_\theta \equiv L_z = \text{cte} \tag{3.6.64}$$

podemos integrar por cuadraturas el movimiento en la dirección radial, y a partir de éste el movimiento de rotación en torno al eje vertical z.
Para ello, o podemos integrar directamente las ecuaciones de Hamilton, o utilizar indirectamente la conservación de la energía. En este último caso, obtenemos la relación para la coordenada radial

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2m_1 r^2} - m_2 g\,(\ell - r) = E \tag{3.6.65}$$

quedando resuelta por cuadraturas en la forma

$$t = \int dt = \int \frac{dr}{\dot{r}} = \pm\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E + m_2 g(\ell - r) - \frac{L_z^2}{2m_1 r^2}}} \tag{3.6.66}$$

Una vez integrado el movimiento en la coordenada radial, esto es, una vez obtenida, aunque sea de forma implícita la función $r(t)$, integramos la ecuación correspondiente para el ángulo θ, en la forma

$$\dot{\theta} = \frac{L_z}{m_1 r^2} \rightarrow \theta = \int d\theta = \int \dot{\theta} dt = \frac{L_z}{m_1} \int \frac{dt}{r^2(t)} \tag{3.6.67}$$

La existencia de una coordenada cíclica reduce en dos (no en uno) el orden del sistema a integrar, al desaparecer tanto la coordenada como su momento conjugado de la integración de la ecuación del movimiento. La situación resultante no tan es obvia si en vez del formalismo Hamiltoniano utilizamos únicamente el formalismo Lagrangiano.

3.6.4. Formulación de Hamilton para función $G(\dot{q}, \dot{p}, t)$ (M)

A partir de la formulación de Lagrange para un sistema unidimensional descrito por la coordenadas generalizadas q,

(a) Construya una función del tipo $G(\dot{q}, \dot{p}, t)$ en analogía con el Hamiltoniano del sistema, que sea función de las variables independientes $\dot{q}, \dot{p}$.

(b) Deduzca las correspondientes ecuaciones de Hamilton para el movimiento del sistema.

(a) A partir del Lagrangiano $L(q, \dot{q}, t)$ construimos la función pedida haciendo uso de la transformación de Legendre correspondiente

$$G(\dot{q}, \dot{p}, t) \equiv q \cdot \dot{p} - L(q, \dot{q}, t) \tag{3.6.68}$$

donde debemos utilizar la dependencia funcional para la variable dependiente q

$$q = q(\dot{q}, \dot{p}, t) \tag{3.6.69}$$

que se deduce de la inversión de la ecuación de Euler−Lagrange del sistema

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \Rightarrow \dot{p} \equiv \frac{dp}{dt} = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \tag{3.6.70}$$

y vemos que la función G así definida tiene la dependencia exigida.
A partir de su definición, tomando diferenciales obtenemos

$$dG = \dot{p}dq + qd\dot{p} - dL = \left(\dot{p} - \frac{\partial L}{\partial q}\right) dq + qd\dot{p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{3.6.71}$$

Haciendo uso de la definición de momento el término entre paréntesis se anula idénticamente, y llegamos a

$$dG = qd\dot{p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{3.6.72}$$

que demuestra que efectivamente $\dot{q}, \dot{p}, t$ es el conjunto de variables independientes de la función G.
(b) Comparando la última expresión con la diferencial de la función $G(\dot{q}, \dot{p}, t)$, deducida de su dependencia funcional

$$dG = \frac{\partial G}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial G}{\partial \dot{p}} d\dot{p} + \frac{\partial G}{\partial t} dt \tag{3.6.73}$$

podemos deducir la expresión de las ecuaciones de Hamilton correspondientes

$$q = \frac{\partial G}{\partial \dot{p}} \quad , \quad p = -\frac{\partial G}{\partial \dot{q}} \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.6.74}$$

3.6.5. Partícula puntual bajo la acción de la gravedad (M)

En un sistema de n grados de libertad, el cálculo de $2n$ constantes del movimiento del tipo $f_i(q,p,t) = \text{cte} \equiv C_i$ permite, en principio, integrar el problema. Considere el caso de una partícula puntual de masa m que se mueve en un plano cartesiano vertical de coordenadas (q_1, q_2) bajo la acción de la gravedad.

(a) Sin realizar una integración de las ecuaciones de Hamilton, determine cuatro constantes del movimiento independientes.

(b) Obtenga a partir las constantes de movimiento anteriores, la solución general conocida del movimiento de la partícula, en la forma

$$q_1 = c_1 + c_2 t \quad , \quad q_2 = c_3 + c_4 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{3.6.75}$$

(a) Para que una función de las coordenadas y los momentos $f(q,p,t)$ sea constante del movimiento en dichas variables, se debe satisfacer la condición

$$\frac{df}{dt} \equiv \dot{q}\frac{\partial f}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{3.6.76}$$

Tomando q_1 como coordenada espacial horizontal y q_2 como la coordenada espacial vertical, el Hamiltoniano de la partícula es

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + mgq_2 \tag{3.6.77}$$

Utilizando ahora las ecuaciones de Hamilton del sistema, podemos identificar los coeficientes de las derivadas parciales de f, que resultan ser

$$\dot{q}_1 \equiv \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m} \quad , \quad \dot{q}_2 \equiv \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m} \tag{3.6.78}$$

junto a

$$\dot{p}_1 \equiv -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0 \quad , \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -mg \tag{3.6.79}$$

Con ello, la ecuación de conservación para la constante f tiene la expresión

$$\frac{p_1}{m}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{p_2}{m}\frac{\partial f}{\partial q_2} - mg\frac{\partial f}{\partial p_2} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{3.6.80}$$

Las constantes del movimiento que buscamos serán cualquier conjunto de cuatro cantidades independientes que satisfagan dicha ecuación.
En primer lugar, podemos ver que cualquier función exclusivamente del momento p_1 es constante del movimiento. Por simplicidad, podemos elegir

$$c_1 = p_1 \tag{3.6.81}$$

Buscamos ahora una segunda constante del tipo $f(q_1, p_1, t)$, que en este caso satisface

$$\frac{c_1}{m}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{3.6.82}$$

con una solución directa en la forma

$$f = q_1 - \frac{c_1}{m} t \equiv c_2 \tag{3.6.83}$$

Para la siguiente constante, dado que los coeficientes de las derivadas parciales de f respecto al tiempo y al momento p_2 son constantes, resulta fácil obtener una solución asumiendo una función del tipo $f(p_2, t)$. De ahí que

$$-mg\frac{\partial f}{\partial p_2} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{3.6.84}$$

con una solución directa en la forma

$$f = p_2 + mgt \equiv c_3 \tag{3.6.85}$$

Finalmente para una última constante independiente en la forma $f(q_2, p_2, t) = q_2 + F(p_2, t)$, hacemos uso de la constante anterior y llegamos a la ecuación diferencial para la función F

$$\frac{p_2}{m} - mg\frac{\partial F}{\partial p_2} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{3.6.86}$$

y asumiendo $F = A(t)p_2 + B(t)$ obtenemos

$$\frac{p_2}{m} - mgA(t) + \dot{A}(t)p_2 + \dot{B}(t) = 0 \tag{3.6.87}$$

con la solución directa, igualando los coeficientes a ambos lados de las potencias de p_2,

$$\frac{1}{m} + \dot{A}(t) = 0 \rightarrow\ A(t) = -\frac{t}{m} \tag{3.6.88}$$

y

$$-mgA(t) + \dot{B}(t) = 0 \rightarrow\ B(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{3.6.89}$$

Por tanto, podemos escribir la cuarta función constante en la forma

$$f = q_2 - \frac{p_2}{m}t - \frac{1}{2}gt^2 \equiv c_4 \tag{3.6.90}$$

(b) Una vez resueltas las cuatro constantes del movimiento, despejando las coordenadas y momentos de las ecuaciones resultantes, obtenemos la trayectoria del móvil en la forma

$$q_1 = c_2 + \frac{p_1}{m}t \quad , \quad p_1 = c_1 \tag{3.6.91}$$

y

$$q_2 = c_4 + \frac{c_3}{m}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad , \quad p_2 = c_3 - mgt \tag{3.6.92}$$

ecuaciones del movimiento que se corresponden con el tiro parabólico. En particular, $c_1 = mv_0\cos\alpha$, siendo v_0 el módulo de la velocidad inicial, y α el ángulo que forma la trayectoria inicialmente con el eje horizontal, c_2 es el valor inicial de la coordenada q_1, $c_3 = mv_0\,\mathrm{sen}\,\alpha$, y finalmente c_4 es el valor de la coordenada q_2 en el instante inicial.

3.6.6. Deslizamiento de una masa a lo largo de un alambre (M)

La ley de movimiento de una masa m que se desliza sin rozamiento, y bajo la influencia de la gravedad, a lo largo de un alambre en posición vertical y con la forma de la curva suave $y = f(x)$, siendo x la coordenada horizontal e y la coordenada vertical, viene dada por la solución $(x(t), f(x(t)))$ de la ecuación de movimiento

$$\ddot{x}\cosh^2 x + \dot{x}^2\,\mathrm{senh}\,x\cosh x + g\,\mathrm{senh}\,x = 0 \tag{3.6.93}$$

(a) Demuestre que la simple definición del momento en la forma $p \equiv m\dot{x}$ lleva a un representación de la ecuación de movimiento anterior en las variables canónicas (x, p) que no es Hamiltoniana.

(b) Obtenga la elección apropiada del momento que sí da lugar a una representación Hamiltoniana de la ecuación del movimiento. Determine en este caso el Hamiltoniano.

(a) En primer lugar escribimos la ecuación de movimiento en la forma

$$\ddot{x} + \dot{x}^2 \tanh x + g\frac{\tanh x}{\cosh x} = 0 \tag{3.6.94}$$

Aplicando la definición usual del momento $p = m\dot{x}$, la ecuación de movimiento, siendo de orden dos, puede desdoblarse en dos ecuaciones diferenciales de orden uno, en la forma

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} \equiv m\ddot{x} = -\frac{1}{m}p^2 \tanh x - mg\frac{\tanh x}{\cosh x} \tag{3.6.95}$$

que dentro del formalismo Hamiltoniano deberían corresponder a las dos ecuaciones de Hamilton

$$\dot{x} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} \equiv -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{3.6.96}$$

en función del Hamiltoniano dado $H(x, p)$ aún por determinar. Comparando ambas expresiones deducimos en primer lugar que el Hamiltoniano debe ser de la forma

$$H = \frac{p^2}{2m} + g(x) \tag{3.6.97}$$

pero substituyendo esta definición en la segunda ecuación de Hamilton vemos que no existe tal solución, ya que llegaríamos a la ecuación para la función $g(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{m}p^2 \tanh x + mg\frac{\tanh x}{\cosh x} \tag{3.6.98}$$

donde el término del lado derecho introduce una dependencia en p que no es posible eliminar. Debemos concluir entonces que la mera definición $p = m\dot{x}$ lleva a un representación de la ecuación de movimiento en las variables canónicas que no es Hamiltoniana.

(b) Para encontrar la definición correcta del momento p, recurrimos de nuevo a las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{x} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} \equiv -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{3.6.99}$$

considerando esta vez que sólo pueden ser válidas para una dependencia funcional del momento en la forma $p = p(x, \dot{x})$, en cuyo caso derivando esta función respecto al tiempo, se debe satisfacer

$$\dot{p} \equiv \frac{dp}{dt} \equiv \frac{\partial p}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial p}{\partial \dot{x}}\ddot{x} \equiv -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{3.6.100}$$

y sólo nos queda reordenar esta ecuación de forma similar a la ecuación de movimiento para identificar los distintos términos. En particular, debemos exigir que

$$\frac{\partial p}{\partial \dot{x}} = m\cosh^2 x \tag{3.6.101}$$

con la solución

$$p = m\dot{x}\cosh^2 x \tag{3.6.102}$$

Con esto, la primera ecuación de Hamilton se escribe

$$\frac{p}{m\cosh^2 x} = \frac{\partial H}{\partial p} \rightarrow H = \frac{p^2}{2m\cosh^2 x} + F(x) \tag{3.6.103}$$

Para determinar de forma unívoca esta función arbitraria $F(x)$, introducimos este perfil en la segunda ecuación de Hamilton, con el resultado

$$\dot{p} = m\dot{x}^2 \operatorname{senh} x \cosh - F'(x) \tag{3.6.104}$$

Pero según la definición anterior del momento, y la ecuación de movimiento, $\dot{p}$ estaría dado por

$$\dot{p} = m\dot{x}^2 \operatorname{senh} x \cosh x - mg \operatorname{senh} x \tag{3.6.105}$$

Comparando ambos resultados, deducimos que

$$F'(x) = mg \operatorname{senh} x \rightarrow F(x) = mg \cosh x \tag{3.6.106}$$

con lo cual, el Hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{p^2}{2m \cosh^2 x} + mg \cosh x \tag{3.6.107}$$

Finalmente sabiendo que existe la identificación del Hamiltoniano con el correspondiente a una partícula puntual en presencia de la gravedad, deducimos que el término independiente de la velocidad corresponde a la energía potencial gravitatoria, con la expresión general $V = mgy$, de forma que

$$V = mgy = mg \cosh x \tag{3.6.108}$$

esto es, $y = \cosh x$ representa la curva geométrica en el plano vertical formada por el alambre sobre el que desliza la partícula puntual.

3.6.7. Sistema en rotación uniforme

Para una partícula puntual de masa m que se desplaza libremente sobre un disco horizontal que gira con una velocidad angular constante ω en torno al eje vertical,

(a) Determine el Lagrangiano L y el Hamiltoniano H en el sistema de ejes fijos del laboratorio.

(b) Obtenga el Lagrangiano L' y el Hamiltoniano H' en el sistema de referencia no inercial ligado al disco, y establezca la relación entre H y H'. Deberá deducir en primer lugar la ley de transformación correspondiente de coordenadas y velocidades.

(c) Obtenga de nuevo la relación entre los Hamiltonianos de una forma más directa considerando la variación de energía de rotación que debe suministrarse al sistema no inercial manteniendo constante su velocidad angular.

(a) En el sistema de referencia del laboratorio (sistema inercial), el Lagrangiano de la partícula libre está dado por

$$L = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \tag{3.6.109}$$

donde $\boldsymbol{v} \equiv (\dot{x}, \dot{y})$ es la velocidad de la partícula medida en los ejes fijos (x, y) del laboratorio, con el origen de coordenadas situado en el centro (inmóvil) del disco. El Hamiltoniano para la partícula libre es directamente

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \quad , \quad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{3.6.110}$$

siendo $\boldsymbol{p}$ su momento lineal.

(b) El sistema de ejes no inercial (x', y'), fijo en el disco, se encuentra en rotación con velocidad angular ω respecto a los ejes fijos en el laboratorio, y por ello se satisface la ley de transformación

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y &= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{aligned} \tag{3.6.111}$$

siendo θ el ángulo de giro, dado por

$$\theta = \omega t \tag{3.6.112}$$

junto con la ley de transformación inversa

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y' &= -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{3.6.113}$$

Derivando respecto al tiempo estas expresiones, obtenemos la ley de transformación de las componentes de la velocidad

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}'\cos\theta - \dot{y}'\,\mathrm{sen}\,\theta - \omega\left(x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta\right) \\ \dot{y} &= \dot{x}'\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{y}'\cos\theta + \omega\left(x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta\right) \end{aligned} \tag{3.6.114}$$

Aplicando estas transformaciones, vemos que

$$\boldsymbol{v}^2 \equiv \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \omega^2\left(x'^2 + y'^2\right) + 2\omega\left(\dot{y}'x' - \dot{x}'y'\right) \tag{3.6.115}$$

y de aquí obtenemos el valor del Lagrangiano en el sistema de referencia no inercial

$$L' = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x'^2 + y'^2\right) + m\omega\left(\dot{y}'x' - \dot{x}'y'\right) \tag{3.6.116}$$

Ahora, a partir de la definición del nuevo Lagrangiano, deducimos la expresión de los momentos en el sistema no inercial aplicando la definición usual

$$p'_x \equiv \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'} = m\left(\dot{x}' - \omega y'\right) \quad , \quad p'_y \equiv \frac{\partial L'}{\partial \dot{y}'} = m\left(\dot{y}' + \omega x'\right) \tag{3.6.117}$$

y de aquí se construye el Hamiltoniano en el sistema no inercial

$$H' = \dot{x}'p'_x + \dot{y}'p'_y - L \tag{3.6.118}$$

con la expresión final

$$H' = \frac{p'^2_x + p'^2_y}{2m} + \omega\left(p'_x y' - p'_y x'\right) \tag{3.6.119}$$

Nótese la identidad entre los dos Hamiltonianos cuando la velocidad angular es cero, esto es, si coinciden en todo instante de tiempo los dos sistemas de referencia. Por tanto,

$$\omega = 0 \Rightarrow H' = H \tag{3.6.120}$$

esto es, para este término independiente de ω, H' tendrá la misma dependencia funcional en momentos y coordenadas que H. Introduciendo ahora el valor del momento angular del giro respecto al eje z

$$L'_z \equiv \left(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{p}'\right)_z = p'_y x' - p'_x y' \tag{3.6.121}$$

llegamos a la expresión final

$$H' = H - \omega L'_z \tag{3.6.122}$$

(c) Como indica el enunciado, una forma más directa de obtener este último resultado consiste en calcular la variación de energía del sistema no inercial cuando se mantiene la rotación con velocidad angular constante. Sea M' el torque generado por la variación del momento angular de la partícula en el sistema no inercial inducida por su rotación respecto al sistema inercial. Esto es,

$$M' \equiv \frac{dL'_z}{dt} \tag{3.6.123}$$

y dado que el sistema no inercial rota a una velocidad angular constante, el trabajo diferencial realizado por este torque cuando este sistema gira un ángulo $d\theta$ respecto a los ejes fijos es

$$dW' = M'd\theta = \frac{dL'_z}{dt}d\theta = \frac{d\theta}{dt}dL'_z \equiv \omega dL'_z \tag{3.6.124}$$

Integrando esta expresión, teniendo en cuenta que la velocidad angular es constante, obtenemos el trabajo neto realizado, en la forma

$$W' = \int dW' = \omega L'_z \tag{3.6.125}$$

Finalmente, aplicando el principio de conservación de la energía, al pasar del sistema inercial al sistema no inercial la variación de la energía será

$$\Delta E' \equiv H' - H = -W' \tag{3.6.126}$$

de forma que se satisface

$$H' = H - W = H - \omega L'_z \tag{3.6.127}$$

Físicamente esta energía perdida puede interpretarse como la energía que debe gastar el observador en rotación para ser capaz de seguir *correctamente* el movimiento de la partícula libre. De forma similar, por ejemplo en el caso de una transformación de Galileo unidimensional

$$x = x' + Vt \quad , \quad v = V + v' \tag{3.6.128}$$

la relación entre los Hamiltonianos sería

$$H' = H - Vp' \tag{3.6.129}$$

que equivale de nuevo a la condición de energía

$$\begin{aligned} &\Delta E' = H' - H = -W \\ &W = \int F' ds = \int \frac{dp'}{dt} ds = \int \frac{ds}{dt} dp' = V \int dp' = Vp' \end{aligned} \tag{3.6.130}$$

que debe gastar el observador en movimiento uniforme para poder seguir correctamente el movimiento de la partícula libre.

3.6.8. Teorema de Larmor

Haciendo uso del resultado del ejercicio 3.6.7, demuestre el denominado *teorema de Larmor*, que establece que puede eliminarse el efecto en primer orden de un campo magnético estacionario uniforme que actúa sobre una partícula cargada en movimiento, cuando el observador se encuentra ligado a un sistema de referencia en rotación uniforme con una velocidad angular específica.

(a) Para ello, utilizando la expresión conocida del Lagrangiano de una partícula cargada en un campo electromagnético, determine en primer lugar el Hamiltoniano del sistema, identificando cuál es el término que representa el efecto de una rotación, y que es dependiente del momento angular de la partícula.

(b) Demuestre entonces de forma directa el teorema de Larmor, determinando el valor de la velocidad angular de rotación (la llamada *frecuencia de Larmor*) que permite eliminar en el Hamiltoniano el efecto del campo magnético uniforme.

(a) El Lagrangiano de una partícula puntual con carga (digamos q) en un campo electromagnético está dado por (véase el ejercicio 2.6.5)

$$L = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 - q\phi + \frac{q}{c} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} \tag{3.6.131}$$

donde ϕ es el potencial eléctrico, y $\boldsymbol{A}$ el potencial vector, dado por

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r} \tag{3.6.132}$$

en el caso de un campo magnético $\boldsymbol{B}$ constante. El momento conjugado de la partícula está dado por

$$\boldsymbol{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{v} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A} \tag{3.6.133}$$

y aplicando su definición, el Hamiltoniano del sistema en el sistema inercial (sistema de ejes fijos en el laboratorio) es

$$H \equiv \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p} - L = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + q\phi \tag{3.6.134}$$

Desarrollando el término al cuadrado, obtenemos en la expresión anterior

$$\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 = \boldsymbol{p}^2 + \frac{q^2}{c^2}\boldsymbol{A}^2 - 2\frac{q}{c}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A} \tag{3.6.135}$$

y el último término, en el caso de un campo magnético constante, tiene la expresión, reordenando los factores,

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{L} \tag{3.6.136}$$

siendo $\boldsymbol{L}$ el vector momento angular de la partícula. Con esto, el Hamiltoniano en el sistema inercial incorpora un término de rotación (dependiente del momento angular) en la forma

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{q^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}^2 - \frac{q}{2mc}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{L} + q\phi \tag{3.6.137}$$

(b) De forma explícita, si elegimos ahora el eje z en la dirección del campo magnético presente, esto es, $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{u}_z$, tenemos las componentes del potencial vector

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}B\boldsymbol{u}_z\times(x,y,z) = \frac{1}{2}B\,(y,-x,0) \tag{3.6.138}$$

junto a

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{L} = BL_z \quad , \quad \boldsymbol{A}^2 = \frac{1}{4}B^2\left(x^2+y^2\right) \tag{3.6.139}$$

Con esto, el Hamiltoniano en el sistema inercial se escribe

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{q^2}{8mc^2}B^2\left(x^2+y^2\right) + q\phi - \frac{q}{2mc}BL_z \tag{3.6.140}$$

Y si comparamos este resultado con el resultado del ejercicio 3.6.7, vemos que será posible elegir un sistema de referencia en rotación respecto al cual se elimine en el Hamiltoniano el efecto del campo magnético, al menos linealmente (el efecto cuadrático proporcional a B^2 debe ser considerado despreciable, como una aproximación de campo débil). Entonces, si aplicamos la relación

$$H' = H - \omega L'_z \tag{3.6.141}$$

esto es, en la aproximación del campo débil, tenemos la condición

$$H' = \frac{\boldsymbol{p}'^2}{2m} + q\phi - \left(\frac{q}{2mc}B + \omega\right)L'_z \tag{3.6.142}$$

y por tanto eligiendo el valor de la *frecuencia de Larmor* en la forma

$$\omega_L = -\frac{q}{2mc}B \tag{3.6.143}$$

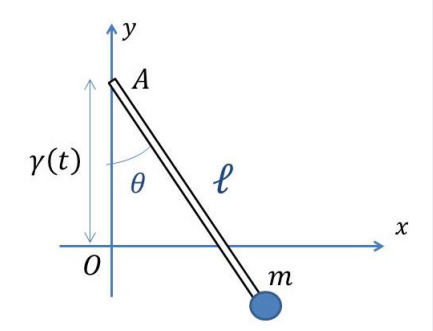
para la rotación del sistema no inercial, el Hamiltoniano resultante, y por tanto el movimiento de la partícula cargada,

$$H' = \frac{\boldsymbol{p}'^2}{2m} + q\phi \tag{3.6.144}$$

es independiente del campo magnético.

3.6.9. Péndulo con punto de suspensión libre

Sea un péndulo de masa m que consta de una varilla rígida AB sin masa, de longitud ℓ, libre para moverse en el plano vertical, como muestra la figura. El extremo A de la varilla sólo puede moverse en dirección vertical, y su desplazamiento respecto al origen de coordenadas está fijado por la función del tiempo $\gamma(t)$.



(a) Determine el Lagrangiano y el Hamiltoniano cuando el movimiento es libre, esto es, no existe restricción sobre el movimiento vertical del extremo A. Utilice la notación matricial cuando sea conveniente. ¿Se conserva el Hamiltoniano? ¿Es el Hamiltoniano igual a la energía total del sistema?

(b) Considere ahora que el movimiento no es libre, es decir, que existe una aceleración vertical del punto A fijada externamente. Demuestre que la aceleración del extremo A, esto es, $\ddot{\gamma}(t)$, tiene el mismo efecto sobre la ecuación de movimiento que un campo gravitacional dependiente del tiempo. Para ello, utilice el método de Lagrange para obtener la ecuación del movimiento. ¿Se conserva en este caso el Hamiltoniano? ¿Es el Hamiltoniano igual a la energía total del sistema?

(a) Para el movimiento libre las dos coordenadas generalizadas del sistema son (θ, γ). Dado que la masa de péndulo es puntual, su energía cinética será únicamente de traslación

$$T = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) \tag{3.6.145}$$

donde (x, y) son sus coordenadas respecto a los ejes fijos en el espacio. Esto es, según la figura,

$$x = \ell \operatorname{sen} \theta \quad , \quad y = y_A - \ell \cos \theta = \gamma - \ell \cos \theta \tag{3.6.146}$$

y donde y_A es la posición vertical en cada instante del punto de suspensión del péndulo. Derivando respecto al tiempo estas expresiones, obtenemos la velocidad de la masa m en la forma

$$\dot{x} = \ell \dot{\theta} \cos \theta \quad , \quad \dot{y} = \dot{\gamma} + \ell \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \tag{3.6.147}$$

y de aquí

$$\boldsymbol{v}^2 \equiv \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \ell^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\gamma}^2 + 2 \ell \dot{\theta} \dot{\gamma} \operatorname{sen} \theta \tag{3.6.148}$$

Por tanto,

$$T = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\gamma}^2 + m \ell \dot{\theta} \dot{\gamma} \operatorname{sen} \theta \tag{3.6.149}$$

y su energía potencial tiene la expresión usual

$$V = mgy = mg \left(\gamma - \ell \cos \theta \right) \tag{3.6.150}$$

Teniendo en cuenta estas expresiones, el Lagrangiano del sistema está dado por

$$L(\theta, \gamma, \dot{\theta}, \dot{\gamma}) = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\gamma}^2 + m \ell \dot{\theta} \dot{\gamma} \operatorname{sen} \theta - mg \left(\gamma - \ell \cos \theta \right) \tag{3.6.151}$$

Ahora, para obtener la formulación Hamiltoniana del problema, debemos definir previamente los momentos generalizados (p_θ, p_γ) en la forma

$$p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta} + m\ell\dot{\gamma}\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad p_\gamma \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} = m\dot{\gamma} + m\ell\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{3.6.152}$$

ecuaciones que deben invertirse para dar las velocidades generalizadas $(\dot{\theta}, \dot{\gamma})$ en función de los momentos generalizados. Dada la complejidad de las ecuaciones, es más conveniente utilizar una notación matricial en la forma

$$\boldsymbol{p} \equiv \begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\gamma \end{pmatrix} = \mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \tag{3.6.153}$$

donde $\mathcal{A}$ es la matriz simétrica 2×2

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} m\ell^2 & m\ell\,\mathrm{sen}\,\theta \\ m\ell\,\mathrm{sen}\,\theta & m \end{pmatrix} \tag{3.6.154}$$

En este caso, la inversión matricial da lugar a

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{p} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \begin{pmatrix} m & -m\ell\,\mathrm{sen}\,\theta \\ -m\ell\,\mathrm{sen}\,\theta & m\ell^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\gamma \end{pmatrix} \tag{3.6.155}$$

y el determinante de la matriz toma el valor

$$\det \mathcal{A} = m^2\ell^2 \cos^2\theta \tag{3.6.156}$$

Con esto, el Lagrangiano tiene la expresión matricial

$$L = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathcal{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} - V \tag{3.6.157}$$

y además el Hamiltoniano está dado por, en forma matricial,

$$H = \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \boldsymbol{p} - L = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^T \cdot \mathcal{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{p} + V \tag{3.6.158}$$

con el desarrollo

$$H = \frac{1}{2m^2\ell^2\cos^2\theta}\left(mp_\theta^2 - 2m\ell\,\mathrm{sen}\,\theta p_\theta p_\gamma + m\ell^2 p_\gamma^2\right) + mg(\gamma - \ell\cos\theta) \tag{3.6.159}$$

Dado que en virtud de su definición, se satisface

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.6.160}$$

y ya que el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, el Hamiltoniano es una constante del movimiento

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \rightarrow H = \mathrm{cte} \tag{3.6.161}$$

Además como la expresión de la energía cinética es cuadrática en las velocidades generalizadas, esto es, $T = T_2$, dicho Hamiltoniano coincide con la energía total del sistema, definida en la forma

$$L = T_2 - V \rightarrow H = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = 2T_2 - (T_2 - V) = T_2 + V \equiv E \tag{3.6.162}$$

Lo comprobamos directamente utilizando el formalismo Lagrangiano para la función Hamiltoniana

$$\begin{aligned} h &\equiv \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\gamma}\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} - L \\ &= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\gamma}^2 + m\ell\dot{\theta}\dot{\gamma}\,\mathrm{sen}\,\theta + mg\,(\gamma - \ell\cos\theta) = T + V \equiv E \end{aligned} \tag{3.6.163}$$

(b) Para el movimiento forzado, el sistema sólo tiene una coordenada generalizada, el ángulo θ formado por la varilla con el eje vertical. El movimiento del punto de suspensión está fijado externamente, por la función dependiente del tiempo $\gamma(t)$. Dado que la masa de péndulo es puntual, su energía cinética será de traslación

$$T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \tag{3.6.164}$$

donde (x, y) son sus coordenadas respecto a los ejes fijos en el espacio. Esto es, según la figura,

$$x = \ell \operatorname{sen}\theta \quad , \quad y = y_A - \ell\cos\theta = \gamma(t) - \ell\cos\theta \tag{3.6.165}$$

y donde y_A es la posición vertical en cada instante del punto de suspensión del péndulo. Derivando respecto al tiempo estas expresiones, obtenemos la velocidad de la masa m en la forma

$$\dot{x} = \ell\dot{\theta}\cos\theta \quad , \quad \dot{y} = \dot{\gamma}(t) + \ell\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta \tag{3.6.166}$$

y de aquí

$$\boldsymbol{v}^2 \equiv \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \ell^2\dot{\theta}^2 + \dot{\gamma}^2(t) + 2\ell\dot{\theta}\dot{\gamma}(t)\operatorname{sen}\theta \tag{3.6.167}$$

Por tanto,

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\gamma}^2(t) + m\ell\dot{\theta}\dot{\gamma}(t)\operatorname{sen}\theta \tag{3.6.168}$$

y su energía potencial tiene la expresión usual

$$V = mgy = mg\left(\gamma(t) - \ell\cos\theta\right) \tag{3.6.169}$$

Teniendo en cuenta estas expresiones, el Lagrangiano del sistema está dado por

$$L(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\gamma}^2(t) + m\ell\dot{\theta}\dot{\gamma}(t)\operatorname{sen}\theta - mg\left(\gamma(t) - \ell\cos\theta\right) \tag{3.6.170}$$

La ecuación del movimiento para este péndulo forzado se obtiene a partir de la ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\theta} \tag{3.6.171}$$

con el resultado

$$\frac{d}{dt}\left(m\ell^2\dot{\theta} + m\ell\dot{\gamma}(t)\operatorname{sen}\theta\right) = m\ell\dot{\theta}\dot{\gamma}(t)\cos\theta - mg\ell\operatorname{sen}\theta \tag{3.6.172}$$

Desarrollando esta ecuación obtenemos

$$\ell\ddot{\theta} = -\left(g + \ddot{\gamma}(t)\right)\operatorname{sen}\theta \tag{3.6.173}$$

o que demuestra que la aceleración del punto de suspensión tiene el mismo efecto que el campo gravitatorio efectivo dependiente del tiempo

$$g_{ef}(t) \equiv g + \ddot{\gamma}(t) \tag{3.6.174}$$

Por último, para obtener la formulación Hamiltoniana del péndulo forzado, debemos definir previamente el momento generalizado p_θ en la forma

$$p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta} + m\ell\dot{\gamma}(t)\operatorname{sen}\theta \tag{3.6.175}$$

ecuación que debe invertirse para dar la velocidad generalizada $\dot{\theta}$ en función del momento generalizado, con el resultado

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta - m\ell\dot{\gamma}(t)\operatorname{sen}\theta}{m\ell^2} \tag{3.6.176}$$

Con esto, la expresión del Lagrangiano en las variables canónicas queda escrito en la forma

$$L(\theta, p_\theta, t) = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} + \frac{1}{2}m\dot{\gamma}^2(t)\cos^2\theta - mg\left(\gamma(t) - \ell\cos\theta\right) \tag{3.6.177}$$

y el Hamiltoniano a partir de su definición, toma la expresión

$$H \equiv \dot{\theta}p_\theta - L(\theta, p_\theta, t) = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} - \frac{\dot{\gamma}(t)}{\ell}p_\theta \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}m\dot{\gamma}^2(t)\cos^2\theta + mg\left(\gamma(t) - \ell\cos\theta\right) \tag{3.6.178}$$

que difiere como vemos, del valor de la energía, definido por

$$E \equiv T + V = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} + \frac{1}{2}m\dot{\gamma}^2(t)\cos^2\theta + mg\left(\gamma(t) - \ell\cos\theta\right) \tag{3.6.179}$$

Finalmente, dado que el Lagrangiano depende explícitamente del tiempo, a través de la dependencia en t de la función $\gamma(t)$, el Hamiltoniano no es una constante del movimiento, esto es,

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0 \rightarrow H \neq \text{cte} \tag{3.6.180}$$

3.7. Ejercicios resueltos adicionales

3.7.1. Hamiltoniano a partir de la ley de movimiento

Determine el Hamiltoniano $H(q,p)$ a partir de la ley de movimiento $(q(t), p(t))$ del sistema, dada por

$$q(t) = q_0 e^{\alpha t} \quad , \quad p(t) = p_0 e^{\beta t} \tag{3.7.1}$$

con la integración directa de las ecuaciones de Hamilton.

Partimos de las ecuaciones de Hamilton, definidas en la forma

$$\dot{q}(t) \equiv \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p}(t) \equiv -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{3.7.2}$$

(1) En el caso particular $\alpha + \beta = 0$, se satisface a partir de la ley de movimiento

$$\alpha + \beta = 0 \rightarrow qp = \text{cte} = q_0 p_0 \Rightarrow H \equiv f(qp) \tag{3.7.3}$$

y dado que según el enunciado el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, es constante del movimiento, por lo que necesariamente tendrá la dependencia funcional

$$H \equiv f(qp) \tag{3.7.4}$$

siendo f una función por determinar. Para ello introducimos este tipo de Hamiltoniano en las ecuaciones de Hamilton, y tenemos la identificación, a partir de la ley de movimiento,

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) = \alpha q \quad , \quad \dot{q} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{df}{d(qp)}\frac{\partial(qp)}{\partial p} = f'q \Rightarrow f' = \alpha \\ \dot{p}(t) = -\alpha p \quad , \quad \dot{p} \equiv -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{df}{d(qp)}\frac{\partial(qp)}{\partial q} = -f'p \Rightarrow f' = \alpha \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

con la solución

$$\Rightarrow f' = \alpha \rightarrow f = \alpha \cdot qp \tag{3.7.6}$$

Esto es, el Hamiltoniano buscado en el caso $\alpha + \beta = 0$ está dado por

$$H = \alpha qp \tag{3.7.7}$$

(2) En el caso general $\alpha+\beta \neq 0$, tenemos, mediante una integración directa de la primera ecuación de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial p} \equiv \dot{q} = \alpha q \tag{3.7.8}$$

donde debemos substituir en el lado derecho la coordenada q por su valor expresado en términos del momento p, eliminando el parámetro temporal, en la forma

$$q = q_0 e^{\alpha t} \ , \ p = p_0 e^{\beta t} \rightarrow q = q_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \tag{3.7.9}$$

en cuyo caso debemos integrar la ecuación

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \alpha q_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \tag{3.7.10}$$

con el resultado parcial

$$H = \int \alpha q_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} dp + F(q) = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} q_0 p_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}} + F(q) \tag{3.7.11}$$

donde $F(q)$ es una función exclusivamente de q por determinar.
Haciendo el mismo procedimiento con la segunda ecuación de Hamilton, obtenemos el resultado parcial complementario

$$H = -\int \beta p_0 \left(\frac{q}{q_0}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} dq + G(p) = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} q_0 p_0 \left(\frac{q}{q_0}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} + G(p) \tag{3.7.12}$$

donde $G(p)$ es una función exclusivamente de p por determinar. Comparando ambas expresiones del Hamiltoniano, identificamos la expresión de las funciones F, G y obtenemos el Hamiltoniano completo en el caso $\alpha + \beta \neq 0$

$$H = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} q_0 p_0 \left(\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}} - \left(\frac{q}{q_0}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} \right) \tag{3.7.13}$$

3.7.2. Hamiltoniano del movimiento periódico

Para el Hamiltoniano de un sistema unidimensional de la forma

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + A(q)p + B(q) \tag{3.7.14}$$

resuelva la ley de movimiento por cuadraturas, y analice bajo qué condiciones el movimiento podría ser periódico.

La ley de movimiento para la coordenada y el momento está dada por las ecuaciones de Hamilton, que tienen la expresión concreta

$$\dot{q} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} + A(q) \tag{3.7.15}$$

$$\dot{p} \equiv -\frac{\partial H}{\partial q} = -A'(q)p - B'(q) \tag{3.7.16}$$

A partir de aquí, obtenemos la ecuación de movimiento para la coordenada q, que tiene la expresión

$$\begin{aligned} \ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} + A'(q)\dot{q} =& A'(q)\dot{q} - A'(q)\frac{p}{m} - \frac{1}{m}B'(q) \\ =& A'(q)\dot{q} - A'(q)\left(\dot{q} - A(q)\right) - \frac{1}{m}B'(q) \\ =& A'(q)A(q) - \frac{1}{m}B'(q) = \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{2}A^2(q) - \frac{1}{m}B(q)\right) \end{aligned} \tag{3.7.17}$$

y por tanto, al poder definir $\ddot{q}$ en la forma

$$\ddot{q} \equiv \frac{1}{2}\frac{d\dot{q}^2}{dq} \tag{3.7.18}$$

podemos resolver la ecuación de movimiento resultante

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d\dot{q}^2}{dq} = \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{2}A^2(q) - \frac{1}{m}B(q)\right) \tag{3.7.19}$$

con la cuadratura

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}A^2(q) + \frac{1}{m}B(q) = \text{cte} \equiv C \\ &\frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{A^2(q) - \frac{2}{m}B(q) + C} \\ &t = \pm\int \frac{dq}{\sqrt{A^2(q) - \frac{2}{m}B(q) + C}} \end{aligned} \tag{3.7.20}$$

expresión esta última que determina implícitamente la solución $q(t)$ del movimiento.
Para poder analizar si el movimiento es periódico, nos basta aplicar la formulación Lagrangiana de una partícula puntual en presencia de un potencial efectivo, expresada en términos de la ley de conservación de la *energía*:

$$\frac{1}{2}\dot{q}^2 + V_{ef}(q) = C \quad , \quad V_{ef}(q) = \frac{1}{m}B(q) - \frac{1}{2}A^2(q) \tag{3.7.21}$$

Como sabemos de la Mecánica Newtoniana el movimiento será periódico si se realiza entorno a un mínimo de la energía potencial. Será necesario por tanto que la función $V_{ef}(q)$ tenga un mínimo, esto es, que

$$V'_{ef}(q_0) = 0 \ , \ V''_{ef}(q_0) > 0 \tag{3.7.22}$$

y que el movimiento se realice entorno al valor de la coordenada q_0.

3.7.3. Partícula en caída libre

Una partícula de masa m se mueve en una dimensión bajo la acción de la gravedad con el Hamiltoniano

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq \tag{3.7.23}$$

(a) Integre las ecuaciones de Hamilton obteniendo la ley de movimiento $(q(t), p(t))$.

(b) Determine el Hamiltoniano de la partícula respecto a un sistema de referencia en caída libre (esto es, con aceleración $-g$), las nuevas ecuaciones de movimiento y la nueva ley de movimiento.

(a) Partimos de las ecuaciones de Hamilton, que tienen la expresión

$$\dot{q} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} \equiv -\frac{\partial H}{\partial q} = -mg \tag{3.7.24}$$

cuya solución corresponde a la ley del movimiento

$$p(t) = p_0 - mgt \rightarrow \dot{q} = \frac{p_0}{m} - gt \Rightarrow q(t) = q_0 + \frac{p_0}{m}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.7.25}$$

(b) En el caso de la caída libre, la partícula no nota la aceleración de la gravedad, por lo que su Hamiltoniano será

$$g' = 0 \rightarrow H' = \frac{P^2}{2m} \tag{3.7.26}$$

siendo P su momento. Aplicando a este Hamiltoniano las ecuaciones de Hamilton obtenemos

$$\dot{Q} \equiv \frac{\partial H'}{\partial P} = \frac{P}{m} \quad , \quad \dot{P} \equiv -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0 \tag{3.7.27}$$

cuya solución corresponde a la ley del movimiento

$$\dot{P} = 0 \rightarrow P(t) = \text{cte} \equiv P_0 \Rightarrow \dot{Q} = \frac{P_0}{m} \rightarrow Q(t) = Q_0 + \frac{P_0}{m}t \tag{3.7.28}$$

3.7.4. Partícula libre con variable temporal

Determine el Hamiltoniano en una dimensión de una partícula libre en el caso de que el parámetro temporal t deba considerarse una variable dinámica adicional, con el mismo estatus que la coordenada q, y ambos sean función de un parámetro de tiempo propio, τ.

(a) En primer lugar analizamos la modificación del Lagrangiano. Sabiendo que la partícula es libre, tenemos a partir de la definición de $L = 1/2mv^2$ y al ser $v = dq/dt$, la relación

$$L \equiv \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \tag{3.7.29}$$

Dado que el tiempo propio τ actúa como el parámetro temporal de la trayectoria, debemos definir las velocidades generalizadas

$$\frac{dq}{d\tau} \equiv q' \quad , \quad \frac{dt}{d\tau} \equiv t' \tag{3.7.30}$$

de forma que el Lagrangiano adquiere la expresión

$$L = \frac{1}{2}m\frac{q'^2}{t'^2} \equiv L(q', t') \tag{3.7.31}$$

No obstante, debemos notar que este Lagrangiano no será el Lagrangiano del nuevo sistema, ya que al modificarse el parámetro temporal también se ve modificada la acción S. En particular, si $\tilde{L}$ es el nuevo Lagrangiano, tenemos la identificación

$$S \equiv \int L dt \equiv \int \tilde{L} d\tau \tag{3.7.32}$$

Esto es, el nuevo Lagrangiano tendrá la expresión

$$\tilde{L} = L\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{2}m\frac{q'^2}{t'} \tag{3.7.33}$$

(b) A partir de aquí, obtenemos los momentos generalizados y el Hamiltoniano asociado, aplicando sus definiciones

$$\tilde{p} \equiv \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q'} = m\frac{q'}{t'} \quad , \quad \tilde{p}_t \equiv \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t'} = -\frac{1}{2}m\frac{q'^2}{t'^2} \tag{3.7.34}$$

$$\tilde{H} \equiv q' \cdot \tilde{p} + t' \cdot \tilde{p}_t - \tilde{L} = 2\tilde{L} - \tilde{L} - \tilde{L} \equiv 0 \tag{3.7.35}$$

3.8. Autoevaluación

Ejercicios

3.8.1. Lagrangiano dependiente del tiempo (R)

El Lagrangiano de un sistema con un grado de libertad puede escribirse en la forma

$$L(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}m\left((\dot{q}\,\mathrm{sen}\,\omega t + \omega q\cos\omega t)^2 - (\omega q\,\mathrm{sen}\,\omega t)^2\right) \tag{3.8.1}$$

(a) Determine el Hamiltoniano del sistema, y analice si se trata de una cantidad conservada.

(b) Introduciendo una nueva coordenada Q, definida por

$$Q = q\,\mathrm{sen}\,\omega t \tag{3.8.2}$$

determine el nuevo Lagrangiano, y el nuevo Hamiltoniano, y analice si es una cantidad conservada.

3.8.2. Hamiltoniano con fuerza de rozamiento dependiente de la velocidad (R)

[a] Considere el Hamiltoniano de una partícula de masa m en un sistema unidimensional, dado por

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m}e^{-q/a} \tag{3.8.3}$$

(a) Resuelva las ecuaciones de Hamilton y obtenga la ley de movimiento para $q(t)$ y $p(t)$. Demuestre que para $p > 0$, el sistema es equivalente a una partícula sometida a una fuerza de rozamiento proporcional a $\dot{q}^2$.

(b) Obtenga la solución particular para el movimiento con las condiciones iniciales

$$q(0) = 0 \quad , \quad p(0) = mv \tag{3.8.4}$$

siendo $v > 0$. Obtenga los valores de (q,p), y de $\dot{q}$ en el límite $t \to \infty$ e interprete físicamente el resultado.

(c) Determine cuál es la relación existente entre el Hamiltoniano y la energía cinética $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$, y a partir de ésta obtenga la tasa de disipación de T en el tiempo.

[a] Problema 5.2 del libro de Jose y Saletan

Cuestionarios en línea

3.8.3. Solución a las ecuaciones de Hamilton

- Enlace al cuestionario

3.8.4. Constantes de movimiento

- Enlace al cuestionario

3.8.5. Apéndice. Soluciones por cuadratura

- Enlace al cuestionario

3.9. Apéndice A. Transformada de Legendre

3.9.1. Propiedades de una curva convexa

Considere una curva formada por los puntos $(x, y(x))$ con la propiedad de ser *convexa*, esto es, la derivada segunda $y''(x)$ es positiva en todo el intervalo x. Con ello se asegura que su pendiente en cada punto, dada por la derivada $y'(x)$, es función creciente en x.

(a) Demuestre mediante un ejemplo gráfico que la curva, representada por los puntos $(x_i, y(x_i))$, también queda representada por la envolvente de las rectas tangentes que pasan por cada uno de sus puntos, representadas paramétricamente por las ecuaciones

$$y^*(x) = px + y^*(0) \tag{3.9.1}$$

siendo $p \equiv y'(x_i)$, e $y^*(0)$ el punto de corte de la recta con el eje $x = 0$. Dado que $y^*(x) = y(x)$ sobre los puntos de la curva, se satisface la relación

$$y(x_i) = px_i + y^*(0) \tag{3.9.2}$$

para cada punto de la curva.

(b) La expresión anterior indica que el par de valores $(p, y^*(0))$ es igualmente válido para caracterizar completamente la curva $(x, y(x))$, es decir, aporta la misma información. Demuestre que si define la función del parámetro p

$$f(p) \equiv -y^*(0) \tag{3.9.3}$$

definida en cada punto de la curva, el proceso inverso está bien definido. Esto es, la curva $(p, f(p))$ en el espacio de *coordenadas* p tiene la representación análoga respecto a las rectas tangentes que pasan por cada uno de sus puntos, representadas paramétricamente por las ecuaciones

$$f^*(x) = xp + f^*(0) \tag{3.9.4}$$

siendo $x \equiv f'(p)$, e $f^*(0)$ el punto de corte de la recta con el eje $p = 0$.

Determine la expresión de la función $f(p)$ asociada a la función $y(x)$ utilizada para la representación gráfica del apartado anterior.

(c) Demuestre las siguientes propiedades

$$y'(f'(p)) = p \quad , \quad f'(y'(x)) = x \tag{3.9.5}$$

y

$$f^*(x) \equiv y(x) \tag{3.9.6}$$

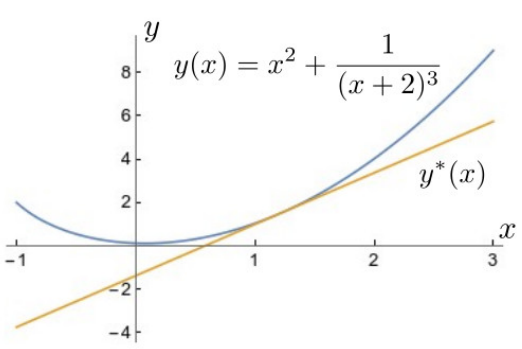
(a) Como ejemplo, elegimos la función convexa

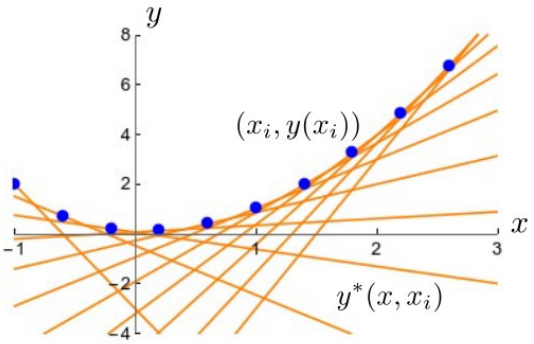
$$y(x) = x^2 + \frac{1}{(x+2)^3} \tag{3.9.7}$$

en el intervalo $x \in [-1, 3]$, representada junto a una de sus rectas tangentes en la parte izquierda de la figura. El conjunto de estas rectas tangentes está dado por las ecuaciones

$$y^*(x, x_i) \equiv p(x_i)x + y^*(0) = p(x_i)x + y(x_i) - p(x_i)x_i = p(x_i)(x - x_i) + y(x_i) \tag{3.9.8}$$

donde $(x_i, y(x_i))$ es cada uno de los puntos de la curva, con $p(x_i) \equiv y'(x_i)$.





(b) Si definimos el parámetro p como una variable continua, tal que la función $f(p)$ determine cada punto de corte de la recta tangente correspondiente con el eje $x = 0$, para que el proceso inverso (esto es, definir la curva $(p, f(p))$ a través de sus tangentes) esté bien definido, es necesario que la función $f(p)$ cumpla las mismas propiedades que la función $y(x)$, esto es, que sea convexa. Lo comprobamos.

Vemos en primer lugar que $f(p)$ tendrá la definición

$$f(p) = -y^*(0) = px_i - y(x_i) \tag{3.9.9}$$

para cada uno de los puntos de la curva $(x_i, y(x_i))$, donde la presencia del signo $-$ nos asegura que esta función sea convexa si $y(x)$ lo es. Recordando que para una curva convexa la recta entre dos puntos cualquiera siempre se sitúa por encima de la curva, la definición anterior debe entenderse en la forma

$$f(p) = \sup_{x_i \in I} (px_i - y(x_i)) \tag{3.9.10}$$

siendo I el intervalo de variación de x, y el símbolo sup indica el valor supremo. Y ahora por la propiedad de convexidad de la propia función $y(x)$ tal valor supremo de la expresión anterior se alcanza en el punto de tangencia, tal que $p = y'(x)$. Por tanto, como función de p, debemos definir

$$f(p) = \sup_{x_i \in I} (px_i - y(x_i)) \equiv (px - y(x))_{x=(y'(p))^{-1}} \tag{3.9.11}$$

Una vez definida la función convexa $f(p)$ es directo obtener su descripción en términos de sus rectas tangentes, al ser, por definición

$$f^*(p) = xp + f^*(0) \tag{3.9.12}$$

donde $x \equiv f'(p)$. Si ahora realizamos la segunda parte del procedimiento, partimos de

$$g(x) = -f^*(0) = xp_i - f(p_i) \tag{3.9.13}$$

que debe entenderse en la forma

$$g(x) = \sup_{p_i \in I^*} (xp_i - f(p_i)) \equiv (xp - f(p))_{p=(f'(x))^{-1}} \tag{3.9.14}$$

siendo I^* el intervalo de variación de p.

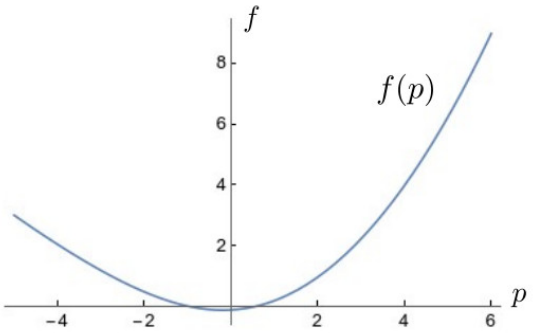
Para obtener la expresión explícita de $f(p)$ para la función $y(x)$ elegida, basta aplicar su definición, con el resultado

$$f(p) \equiv (px - y(x))_{x=y'^{-1}(p)} \equiv \big(xy'(x) - y(x)\big)_{p=y'(x)} \tag{3.9.15}$$

Esto es,

$$f(p) = \left(x^2 - \frac{3x}{(x+2)^4} - \frac{1}{(x+2)^3}\right)_{p=2x-\frac{3}{(x+2)^4}} \tag{3.9.16}$$

cuya representación gráfica de la figura adjunta se ha realizado mediante cálculo numérico, y donde se observa con claridad la convexidad de la función.



Vista la expresión obtenida, no hemos podido obtener $f(p)$ en forma analítica, pero en todo caso, el problema está bien definido ya que la pendiente $p(x)$ es creciente, por ser $y(x)$ convexa, y por tanto la función $p(x)$ es univaluada, y permite obtener de forma unívoca el valor $x(p)$, necesario para construir $f(p)$ según la expresión anterior.

(c) La demostración de estas propiedades es directa. Por definición tenemos

$$p \equiv y'(x) \quad , \quad x \equiv f'(p) \tag{3.9.17}$$

de forma que, de forma conjunta,

$$p = y'(f'(p)) \Rightarrow \; y' \circ f' \equiv \mathbb{1} \tag{3.9.18}$$

$$x = f'(y'(x)) \Rightarrow \; f' \circ y' \equiv \mathbb{1} \tag{3.9.19}$$

donde $\circ$ denota la composición de las funciones y $\mathbb{1}$ denota la función identidad. Aplicando ahora este resultado a la definición de la función $g(x)$, y utilizando la definición de la función $f(p)$, encontramos que

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv (xp - f(p))_{p=(f'(x))^{-1}} \\ &= x\left(f'(x)\right)^{-1} - \left(f'(x)\right)^{-1}\left(y'\left(\left(f'(x)\right)^{-1}\right)\right)^{-1} + y\left(\left(y'\left(\left(f'(x)\right)^{-1}\right)\right)^{-1}\right) \\ &= x\left(f'(x)\right)^{-1} - x\left(f'(x)\right)^{-1} + y(x) \equiv y(x) \end{aligned} \tag{3.9.20}$$

3.9.2. Transformación geométrica de Legendre

Visto el resultado del ejercicio 3.9.1, podemos concluir que la *transformación de Legendre* de la función convexa $y(x)$ a la función convexa $f(p)$, definida por

$$f(p) \equiv (xp - y(x))_{x=y'^{-1}(p)} \tag{3.9.21}$$

es invertible, por lo que la función transformada $f(p)$ contiene toda la información de la función original $y(x)$. De hecho es un tipo de transformación denominada *involución* ya que la transformada de la transformada es la función original, como se demuestra en el ejercicio 3.9.1, con la propiedad adicional de que las derivadas de $y(x)$ y $f(p)$ son inversas entre sí. Dotada de estas propiedades, esta transformación tiene la misma relevancia, en su campo de aplicación, que otras transformaciones más conocidas como la transformación de Fourier o la transformación de Laplace.

(a) Una propiedad poco mencionada en la literatura es que la transformación de Legendre también puede hacerse extensiva a funciones que no sean convexas, aunque en este caso aumenta la complejidad del procedimiento. Considere que $y(x)$ es una función *no convexa*, y que la transformada de Legendre se define en la forma del supremo

$$f(p) \equiv \sup_{x \in I} (px - y(x)) \tag{3.9.22}$$

Dado que $y(x)$ no es convexa este valor supremo no se producirá necesariamente en el punto de tangencia $p = y'(x)$, por lo que la expresión anterior deberá evaluarse por separado en cada uno de los puntos x del intervalo. Demuestre no obstante que la función transformada $f(p)$ sí es convexa utilizando la siguiente propiedad: $f(p)$ es convexa si el cociente

$$\frac{f(p_2) - f(p_1)}{p_2 - p_1} \tag{3.9.23}$$

no es extrictamente decreciente (no decrece siempre) como función de p_2, tomando p_1 constante.

(b) Consideremos ahora la extensión a una función de dos variables $f(x, y)$ respecto a una de las cuales, digamos x, la función f es convexa. No existe ningún impedimento para aplicar la transformación de Legendre de la función f respecto a esta variable x. La diferencia básica es que la condición para una variable $p = y'(x)$ deberá ser sustituída por una condición más general que englobe también la variable y. Analizamos aquí las propiedades de esta transformación y sus consecuencias.
Demuestre que la transformada de Legendre de $f(x, y)$ es la función de dos variables $g(p, y)$ definida en la forma

$$g(p, y) \equiv px - f(x, y) \tag{3.9.24}$$

y que satisface las relaciones

$$x \equiv \frac{\partial g}{\partial p} \quad , \quad p \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \tag{3.9.25}$$

Interprete el significado de estas dos últimas relaciones.

(a) Si aplicamos el criterio de convexidad a la función $f(p)$ definida por el valor del supremo, vemos directamente que

$$\begin{aligned} f(p_2) - f(p_1) &= \sup_{x \in I} (p_2 x - y(x)) - \sup_{x \in I} (p_1 x - y(x)) \\ &\equiv \sup_{x \in I} (p_2 x - p_1 x) = (p_2 - p_1) \sup_{x \in I} x \end{aligned} \tag{3.9.26}$$

por lo que

$$\frac{f(p_2) - f(p_1)}{p_2 - p_1} = \sup_{x \in I} x \equiv \text{cte} \tag{3.9.27}$$

y dado que una función constante no es extrictamente decreciente, $f(p)$ resulta convexa. Habiendo confirmado que $f(p)$ es convexa también lo sería su transformada $y(x)$, en este caso, dada por la relación funcional

$$y(x) \equiv (xp - f(p))_{p = f'^{-1}(x)} \tag{3.9.28}$$

por lo que el hecho de que la función inicial $y(x)$ sea convexa o no sólo implica una mayor o menor dificultad para obtener la función $f(p)$, cuya existencia está garantizada.

(b) Hemos visto en el caso de una variable, que la transformada de Legendre conserva las propiedades de la curva, argumento que deja de ser válido para funciones de varias variables, digamos $f(x, y)$. En este caso, la información geométrica de una función viene dada por sus derivadas parciales, o por extensión, por su diferencial en este caso

$$f = f(x, y) \quad , \quad df \equiv \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \tag{3.9.29}$$

Dado que la función f es convexa, y queremos obtener una función convexa, ya que estamos tratando con una transformación involutiva, necesariamente $g(p, y)$ estará definida respecto a la

variable p, la variable *conjugada* de x, en la forma ya conocida

$$g(p,y) \equiv px - f(x,y) \tag{3.9.30}$$

Esto nos permite asegurar que g es convexa en p si f es convexa en x. La diferencia reside ahora en cómo determinar la variable p. En el caso de una variable p era la pendiente de la recta tangente, puesto que las rectas tangentes permitían *reconstruir* completamente la curva $(x, y(x))$ en el espacio $(p, f(p))$. Para una función de dos variables no tenemos este proceso de reconstrucción por tangentes, pero sí podemos *reconstruir* la diferencial df a partir de la diferencial dg. Es decir, ajustando las derivadas parciales y definiendo correctamente la relación entre variables podemos reconstruir df en el espacio (p, y).

Iniciamos la identificación relacionando las diferenciales de ambas funciones, respecto a sus variables independientes:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{3.9.31}$$

$$g = px - f \Rightarrow\ dg = d(px) - df = pdx + xdp - \frac{\partial f}{\partial x}dx - \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{3.9.32}$$

Este resultado es más fácil de interpretar que en el caso de una variable. Si pretendemos que $g(p, y)$ sea *imagen* de $f(x, y)$ en el espacio (p, y) necesariamente la diferencial anterior dg debe corresponder a una función g en dicho espacio, y por tanto debe tener la expresión general

$$dg = \frac{\partial g}{\partial p}dp + \frac{\partial g}{\partial y}dy \tag{3.9.33}$$

y por tanto debe existir la equivalencia

$$\left(p - \frac{\partial f}{\partial x}\right)dx - \frac{\partial f}{\partial y}dy + xdp \equiv dg \equiv \frac{\partial g}{\partial p}dp + \frac{\partial g}{\partial y}dy \tag{3.9.34}$$

Identificando entre sí los términos del mismo diferencial obtenemos las relaciones pedidas, en la forma

$$p - \frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0 \rightarrow\ p \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \tag{3.9.35}$$

$$x \equiv \frac{\partial g}{\partial p} \tag{3.9.36}$$

junto a

$$\frac{\partial g}{\partial y} \equiv -\frac{\partial f}{\partial y} \tag{3.9.37}$$

Aunque se omite a menudo por simplicidad es importante recordar que en la derivación parcial debe indicarse o al menos tener en cuenta las variables independientes que se conservan constantes en la derivación. En particular las expresiones anteriores tienen la forma más correcta

$$p \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \quad , \quad x \equiv \left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_y \tag{3.9.38}$$

junto a

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_p \equiv -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \tag{3.9.39}$$

La última relación es trivial ya que se satisface siempre, y sólo indica que la variable y que tienen en común $f(x, y), g(p, y)$ es una variable *independiente*, y donde el signo $-$ relativo proviene de la relación de definición entre ambas funciones.

Y para ver el significado de las dos relaciones restantes, lo mejor es analizar el procedimiento general a llevar a cabo para pasar de f a g. En primer lugar aplicando su definición, obtenemos

$$p \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \ p = p(x, y) \tag{3.9.40}$$

Debemos considerar que la relación funcional obtenida $p = p(x, y)$ es invertible en x, esto es, podemos obtener la relación inversa en la forma

$$x = x(p, y) \tag{3.9.41}$$

De esta forma, construimos la función g según la expresión desarrollada

$$g(p, y) = p \cdot x(p, y) - f\left(x(p, y), y\right) \tag{3.9.42}$$

y con esto estaría completada la transformación de Legendre de $f(x, y)$.

Analizando la segunda de las relaciones, vemos de forma directa que corresponde al procedimiento inverso (la transformada de Legendre de la función g), dado por la definición

$$f(x, y) = x \cdot p(x, y) - g\left(p(x, y), y\right) \tag{3.9.43}$$

donde la función $p(x, y)$ está dada por la relación inversa de

$$x \equiv \frac{\partial g}{\partial p} \Rightarrow \ x = x(p, y) \tag{3.9.44}$$

Como hemos indicado anteriormente, las derivadas en la transformación de Legendre son inversas entre sí, lo que corresponde trivialmente en este caso a que las funciones $x(p, y)$ y $p(x, y)$, obtenidas por separado, sean inversas entre sí, esto es,

$$x(p, y), p(x, y) \Rightarrow \ x\left(p(x, y), y\right) = x \quad , \quad p\left(x(p, y), y\right) = p \tag{3.9.45}$$

3.9.3. Definición geométrica del Hamiltoniano

Hasta ahora hemos analizado la transformación de Legendre desde un punto de vista puramente matemático, para caracterizar las mismas propiedades de funciones de una o varias variables respecto a un conjunto distinto de variables independientes. El resultado es la misma información pero obtenida de formas distintas. Esta elección o no de la transformada de Legendre dependerá de la facilidad de interpretar la información relevante en términos de las variables seleccionadas. Las propiedades ligadas a la continuidad de la curva se verán más fácilmente en el espacio $(x, y(x))$ mientras que las propiedades asociadas al crecimiento o decrecimiento se verán más fácilmente en el espacio $(p, f(p))$.
Incorporamos ahora las propiedades *mecánicas* a la transformada de Legendre. La descripción mecánica de un sistema está basada en el formalismo Lagrangiano, con un Lagragiano dependiente de coordenadas y velocidades, y posiblemente del tiempo que actúa como un parámetro, que escribimos por simplicidad $L = L(x, v, t)$. Recordando su expresión más habitual

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - V(x) \tag{3.9.46}$$

ó, en forma matricial,

$$L = \frac{1}{2}v^T \cdot \mathcal{A} \cdot v - V(x) \tag{3.9.47}$$

siendo $\mathcal{A}$ una matriz simétrica, comprobamos que en general la función L es cuadrática en las velocidades, y por tanto convexa en v.

(a) Utilice el modelo matricial del Lagrangiano, introduzca el momento p definido en la forma estándar

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial v} \tag{3.9.48}$$

y analice la descripción de las leyes de conservación del sistema en el espacio (x, v) y en el espacio (x, p).

(b) Demuestre que el momento así definido corresponde a la *variable conjugada* de v para la transformada de Legendre de la función Lagrangiano, recordando que es una función convexa en v. Obtenga la transformada del Lagrangiano, denominado el *Hamiltoniano*, y determine su expresión para el modelo matricial anterior.

(c) Una vez obtenido el Hamiltoniano, analice cuál debe ser la ley de movimiento para el espacio (x, p) en función del Hamiltoniano que esté de acuerdo con la ley de conservación del momento p, obtenida anteriormente. Discuta las diferencias apreciadas con el formalismo basado en el Lagrangiano.

(a) De acuerdo con lo indicado en el Apéndice 3.10.1, en notación matricial el momento para este tipo de sistemas está dado por

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial v} = \mathcal{A} \cdot v \tag{3.9.49}$$

Por otro lado, en el formalismo Lagrangiano las leyes de conservación se obtienen con la aplicación directa de la ecuación de movimiento de Euler−Lagrange, expresada en la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{3.9.50}$$

esto es,

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{A} \cdot v\right) = \frac{\partial V}{\partial x} \tag{3.9.51}$$

donde $\frac{\partial V}{\partial x}$ denota la matriz formada por las entradas $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ para cada una de las coordenadas x_i del sistema. Ésta es la ley de movimiento válida para el espacio (x, v), mientras que para el espacio (x, p) la ley de movimiento es directamente

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \tag{3.9.52}$$

recordando que p es un matriz con entradas p_i, una para cada coordenada. Comparando ambas *interpretaciones* del mismo movimiento, queda claro que, en relación a las leyes de conservación, la descripción en el espacio (x, p) es mucho más sencilla al ser

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \; p_i = \text{cte} \tag{3.9.53}$$

mientras que en el espacio (x, v) la ley de conservación no tiene una expresión tan aclaratoria

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \; \mathcal{A}_{ij} v_j = \text{cte} \tag{3.9.54}$$

(b) Aplicando ahora de forma genérica la transformada de Legendre de la función $L(x, v)$, convexa en v, tenemos la definición

$$H(x, p) \equiv pv - L(x, v) \equiv p \cdot v(x, p) - L\left(x, v(x, p)\right) \tag{3.9.55}$$

donde v debe interpretarse como la variable dependiente $v = v(x, p)$ cuya relación funcional se obtiene invirtiendo la definición de p

$$p \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)_x \Rightarrow \; v = v(x, p) \tag{3.9.56}$$

La transformada de Legendre del Lagrangiano es la función definida $H(x,p)$, y es la función que determina la dinámica del sistema en el espacio (x,p) y se denomina el *Hamiltoniano*. En el modelo matricial tenemos la inversión (véase también el Apéndice 3.10.1)

$$p = \mathcal{A}\cdot v \Rightarrow\ v = \mathcal{A}^{-1}\cdot p \tag{3.9.57}$$

y por tanto el Hamiltoniano en la forma matricial (siendo T la transposición matricial)

$$\begin{aligned} H(x,p) &= p^T\cdot\mathcal{A}^{-1}\cdot p - \left(\frac{1}{2}p^T\mathcal{A}^{-1,T}\cdot\mathcal{A}\cdot\mathcal{A}^{-1}\cdot p - V(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}p^T\cdot\mathcal{A}^{-1}\cdot p + V(x) \end{aligned} \tag{3.9.58}$$

comprobando de forma directa que es una función convexa de p, como establece la transformación de Legendre.

(c) Dada la ley de conservación del momento p

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{3.9.59}$$

la única forma que esté expresada en función del Hamiltoniano $H(x,p)$ es mediante la definición

$$\frac{dp}{dt} \equiv -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{3.9.60}$$

lo que indica, dado que p es una variable del movimiento en este caso, que en el formalismo basado en el Hamiltoniano, existe una ecuación de movimiento para cada variable del sistema (x,p). Para obtener la ley de movimiento para la coordenada x partimos de la definición de la velocidad, y encontramos

$$\frac{dx}{dt} \equiv v = \mathcal{A}^{-1}\cdot p \tag{3.9.61}$$

y de forma análoga, la única forma que esté expresada en función del Hamiltoniano $H(x,p)$ es mediante la definición

$$\frac{dx}{dt} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} = \mathcal{A}^{-1}\cdot p \tag{3.9.62}$$

Hemos podido definir así las dos ecuaciones del movimiento para un sistema descrito por el Hamiltoniano en el espacio (x,p), al menos para este modelo matricial. Dado que las ecuaciones de Euler−Lagrange se derivan del Principio de Acción estacionaria, las ecuaciones de movimiento en función del Hamiltoniano deberán tener el mismo origen, teniendo en cuenta además que la acción $S = \int L dt$ deberá establecer un Principio para las trayectorias del sistema en el espacio (x,p), en lugar de las trayectorias en el espacio (x,v) con $v \equiv \dot{x}$.

3.10. Apéndice B. Notas matemáticas adicionales

3.10.1. Notación matricial

La notación matricial en la aplicación del formalismo Hamiltoniano es estándar.

Coordenada y velocidad generalizada Como ejemplo característico tomamos un sistema con un espacio de configuración de dimensión 2, con las variables digamos

$$\theta, \varphi \rightarrow\ x \equiv \begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix} \tag{3.10.1}$$

En este caso x será un matriz columna, siendo x^T la matriz traspuesta, dada por

$$x^T = (\theta\ \varphi) \tag{3.10.2}$$

La variable de configuración x es función del tiempo, y su derivada temporal, la velocidad generalizada $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \equiv v$, está dada directamente por

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = v \quad , \quad \dot{x}^T = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = v^T \tag{3.10.3}$$

Derivación respecto a X Para obtener la expresión del operador de derivación respecto a la coordenada, $\partial/\partial x$, partimos de la relación tensorial de sus componentes

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \tag{3.10.4}$$

que se traduce en la notación matricial

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot x^T = \mathbb{1} \tag{3.10.5}$$

siendo en este caso $\mathbb{1}$ la matriz unidad 2×2. Desarrollando la expresión anterior vemos que tenemos la identificación matricial

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot (\theta \ \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \ \frac{\partial}{\partial x} \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial\theta \\ \partial/\partial\varphi \end{pmatrix} \tag{3.10.6}$$

Lagrangiano cuadrático en las velocidades La expresión matricial de un Lagrangiano cuadrático en las velocidades en este espacio de configuración de dimensión dos será de la forma general

$$L\left(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \ \dot{\varphi} \end{pmatrix} - V(\theta, \varphi) \tag{3.10.7}$$

donde A, B, C son funciones de (θ, ϕ). Esto es, en notación matricial

$$L(x, v) = \frac{1}{2} v^T \cdot \mathcal{A} \cdot v - V(x) \quad , \quad \mathcal{A} \equiv \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} \tag{3.10.8}$$

donde la matriz $\mathcal{A}$ por definición (al ser L una forma cuadrática en v) es simétrica, esto es,

$$\mathcal{A}^T = \mathcal{A} \tag{3.10.9}$$

Definición del momento generalizado Aplicando su definición

$$p \equiv \begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\varphi \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \equiv \begin{pmatrix} \partial L/\partial\dot{\theta} \\ \partial L/\partial\dot{\varphi} \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial L}{\partial v} \tag{3.10.10}$$

obtenemos directamente

$$p = \mathcal{A} \cdot v \tag{3.10.11}$$

al ser

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v} &= \frac{1}{2} \frac{\partial v^T}{\partial v} \cdot \mathcal{A} \cdot v + \frac{1}{2} v^T \cdot \mathcal{A} \cdot \frac{\partial v}{\partial v} \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{1} \cdot \mathcal{A} \cdot v + \frac{1}{2} v^T \cdot \mathcal{A} \cdot \frac{\partial v}{\partial v} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{A} \cdot v + \frac{1}{2} \mathcal{A}^T \cdot v = \frac{1}{2} \left(\mathcal{A} + \mathcal{A}^T\right) \cdot v = \mathcal{A} \cdot v \end{aligned} \tag{3.10.12}$$

donde hemos utilizado en la segunda igualdad el siguiente resultado parcial. Definiendo la norma v^2 del vector v obtenemos

$$v^T \cdot v \equiv v^2 \rightarrow \ \frac{\partial}{\partial v} \left(v^T \cdot v\right) = 2v \rightarrow \ v^T \frac{\partial v}{\partial v} = v \tag{3.10.13}$$

Esta fórmula es igualmente válida para cualquier vector lineal en v, en particular, para $\mathcal{A}^T \cdot v$; esto es,

$$\left(\mathcal{A}^T \cdot v\right)^T \frac{\partial v}{\partial v} = \mathcal{A}^T \cdot v \tag{3.10.14}$$

y aplicando las propiedades de la matriz traspuesta, llegamos al resultado parcial utilizado anteriormente

$$v^T \cdot \mathcal{A} \cdot \frac{\partial v}{\partial v} = \mathcal{A}^T \cdot v \tag{3.10.15}$$

Notación tensorial En ocasiones la notación tensorial puede simplificarnos los cálculos matriciales a desarrollar. En particular, para la fórmula anterior obtenemos de forma más directa

$$\begin{aligned} L \equiv \frac{1}{2} v_i \mathcal{A}_{ij} v_j - V \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial v_k} &= \frac{1}{2}\frac{\partial v_i}{\partial v_k}\mathcal{A}_{ij} v_j + \frac{1}{2} v_i \mathcal{A}_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial v_k} \\ &= \frac{1}{2}\delta_{ik}\mathcal{A}_{ij} v_j + \frac{1}{2} v_i \mathcal{A}_{ij}\delta_{jk} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{kj} v_j + \frac{1}{2}\mathcal{A}_{jk} v_j \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{A}_{kj} + \mathcal{A}_{jk}\right) v_j = \mathcal{A}_{kj} v_j \end{aligned} \tag{3.10.16}$$

3.10.2. Resolución por cuadraturas

A continuación se resumen los métodos principales para obtener la solución a las ecuaciones de movimiento de Hamilton mediante las denominadas *cuadraturas*, esto es, expresando la solución en forma de integral indefinida, o integral definida cuando se conocen las condiciones iniciales del movimiento.

Sistema unidimensional Para un Hamiltoniano que no dependa explícitamente del tiempo, la condición

$$H(x,p) = \text{cte} \equiv C \tag{3.10.17}$$

nos permite encontrar el momento en función de la coordenada

$$H(x,p) = C \rightarrow p = p(x,C) \tag{3.10.18}$$

resolver las ecuaciones del movimiento en la forma

$$\dot{x} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} \equiv f(x,C) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = f(x,C) \rightarrow \int \frac{dx}{f(x,C)} = \int dt = t \tag{3.10.19}$$

que nos permite obtener, al menos implícitamente, la solución $x(t)$ y con ello $p(t) \equiv p(x(t), C)$.

Sistema bidimensional De nuevo tratamos con un Hamiltoniano independiente del tiempo, de forma que

$$H(x, p_x, y, p_y) = \text{cte} \equiv C \tag{3.10.20}$$

Hay dos posibles opciones que nos permitan resolver por cuadraturas:

- **Coordenada cíclica** En el caso de que una de las coordenadas, digamos y, sea cíclica, su momento conjugado es constante, al ser

$$\dot{p}_y \equiv -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow p_y = \text{cte} \equiv D \tag{3.10.21}$$

  Con ello, el Hamiltoniano sólo depende de las variables canónicas (x, p_x) y de dos constantes C, D, por lo que estamos potencialmente en el caso de un sistema unidimensional, con la solución por cuadraturas ya conocida:

$$H(x, p_x, D) = C \rightarrow p_x = p_x(x, C, D) \tag{3.10.22}$$

$$\dot{x} \equiv \frac{\partial H}{\partial p_x} \equiv f(x,C,D) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = f(x,C,D) \rightarrow \int \frac{dx}{f(x,C,D)} = \int dt = t \quad (3.10.23)$$

que nos permite obtener, al menos implícitamente, la solución $x(t)$ y con ello $p_x(t) \equiv p_x(x(t),C,D)$.

- **Sistema separable** El sistema será *separable* si el Hamiltoniano independiente del tiempo se escribe como la suma

$$H(x,p_x,y,p_y) = H_1(x,p_x) + H_2(y,p_y) \quad (3.10.24)$$

por lo que formalmente el sistema bidimensional se comporta como la unión independiente de dos sistemas unidimensionales. En este caso, podemos aplicar la solución por cuadraturas por separado, con el resultado ya conocido

$$H_1(x,p_x) = C \rightarrow p_x = p_x(x,C) \quad , \quad H_2(y,p_y) = D \rightarrow p_y = p_y(y,D) \quad (3.10.25)$$

que nos permite resolver el sistema en la forma

$$\dot{x} \equiv \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{\partial H_1}{\partial p_x} \equiv f(x,C) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = f(x,C) \rightarrow \int \frac{dx}{f(x,C)} = \int dt = t \quad (3.10.26)$$

y al menos implícitamente, obtener la solución $x(t)$ y con ello $p_x(t) \equiv p_x(x(t),C)$. De forma similar llegamos a

$$\dot{y} \equiv \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{\partial H_2}{\partial p_y} \equiv g(y,D) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = g(y,D) \rightarrow \int \frac{dy}{g(y,D)} = \int dt = t \quad (3.10.27)$$

y al menos implícitamente, obtenemos la solución $y(t)$ y con ello $p_y(t) \equiv p_y(y(t),D)$.

Sistemas integrables en general Nos reducimos al caso bidimensional. Cuando el Hamiltoniano independiente del tiempo no es separable, para poder resolver por cuadraturas debemos analizar si existen de dos cantidades conservadas independientes, una de ellas siendo el Hamiltoniano. En el caso de que sea así, por ejemplo en la forma

$$H = H(x,p_x,y,p_y) = \text{cte} = C \quad , \quad I = I(x,p_x,y,p_y) = \text{cte} \equiv D \quad (3.10.28)$$

la solución por cuadraturas pasará por encontrar a partir de estas dos funciones constantes, dos cantidades *separables* constantes, que nos permitan resolver por separado las cuadraturas para las dos coordenadas independientes, que no serán necesariamente las coordenadas originales x, y. Debemos tener en cuenta además que la ley de conservación del Hamiltoniano (derivada de la tercera ecuación de Hamilton)

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{cte} \quad (3.10.29)$$

se diferencia de la ecuación de conservación de cualquier cantidad adicional, dada simplemente por

$$\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow I = \text{cte} \quad (3.10.30)$$

En particular I puede depender explícitamente del tiempo.

3.11. Apéndice C. Geometría simpléctica

3.11.1. Geometría en el espacio de fases

Como complemento a la interpretación de la descripción temporal de la trayectoria $(q(t),p(t))$ en el espacio de fases (q,p), presentamos brevemente aquí el origen de la propia *geometría simpléctica* (la geometría del espacio de fases).

Coordenadas y momentos En general, para poder predecir el comportamiento del sistema debemos ser capaces de correlacionar entre sí los valores q, p en el espacio de fases, y para ello es necesario introducir una estructura métrica en el espacio de fases. Este espacio tiene dos particularidades esenciales: su dimensión es siempre par y sus variables (q, p) tienen propiedades distintas por separado, o son coordenadas o son momentos, pero no ambos. Difiere en esto del espacio euclídeo, cuya dimensión puede ser arbitraria, y está dotado de coordenadas equivalentes. Al ser de dimensión par, a diferencia del espacio euclídeo en el que medimos longitudes y ángulos a partir de las definiciones de la norma y el producto interior, $u^2 \equiv |\boldsymbol{u}|^2$, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = uv\cos\theta$, en el espacio de fases las medidas físicamente relevantes (esto es, medidas que caracterizan el movimiento) son las áreas (o proyecciones de áreas) sobre los planos qp. Su definición fundamental será

$$\int\int dpdq \equiv \oint pdq \tag{3.11.1}$$

Y dado que aquí aparece una integral de contorno $\oint$ será necesario fijar, de forma unívoca, una orientación.

Medida En el espacio euclídeo sabemos que esta orientación está dada por la dirección del vector normal $\boldsymbol{n}$ al área. La cuestión clave es que esta medida de área en el espacio euclídeo sólo puede hacerse introduciendo, junto con el tensor métrico, un objeto métrico adicional. Esta métrica adicional determina el denominado *producto exterior* $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \equiv \epsilon_{ijk} a_j b_k$, siendo ϵ_{ijk} el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita (véase la sección 11.2.5). Con ayuda de este tensor, el área del paralelogramo generado por los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ satisface la relación

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = S\boldsymbol{n} \tag{3.11.2}$$

siendo S la magnitud del área, y $\boldsymbol{n}$ el vector normal, perpendicular a $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, y cuyo sentido (la orientación del área) está dado por la regla de la mano derecha, en este caso. Además si permutamos los vectores, la normal tendrá el signo opuesto (esto es, orientación contraria)

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = S\boldsymbol{n}' = -S\boldsymbol{n} \tag{3.11.3}$$

Introducimos ahora este tipo de métrica en el espacio de fases, teniendo en cuenta que en este espacio no tenemos vectores (desaparece la notación $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n}$), ni tenemos la noción métrica de longitud. En su lugar, la noción métrica equivalente en el espacio de fases se escribe, por definición

$$\int dq \wedge dp \equiv \int\int dqdp = \oint pdq \equiv S \tag{3.11.4}$$

siendo $\wedge$ el símbolo del producto exterior (que sustituye al tensor ϵ), con la propiedad antisimétrica $a \wedge b = -b \wedge a$, que asegura el cambio de signo en el cambio de orientación del área. El resultado (el área S) no será necesariamente positivo, y su signo dependerá de la orientación (el sentido en el que se recorre la integral cíclica). La aparición de los símbolos integrales es debido a la inexistencia de la nocion métrica de longitud. En la expresión anterior, el lado izquierdo corresponde a la integración sobre la región Ω dada del espacio de fases y el siguiente término a la integración doble sobre los intervalos de q, p que delimitan Ω.

Producto exterior $\wedge$ Esta estructura simpléctica, definida por el *producto exterior* $\wedge$, es independiente del Hamiltoniano, y es la que determina la dinámica Hamiltoniana. En particular, si H es la variable dinámica que gobierna la evolución del sistema, función de las variables canónicas q, p y posiblemente del tiempo, dicha evolución debe preservar la estructura simpléctica (sería equivalente a decir que las leyes de Newton deben preservan la estructura del espacio euclídeo, esto es, deben ser invariantes bajo traslaciones y rotaciones). Y para preservar la estructura simpléctica, la dinámica Hamiltoniana debe estar gobernada por las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} \equiv -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{3.11.5}$$

El signo menos relativo de estas ecuaciones proviene directamente de la propiedad de antisimetría de la estructura simpléctica bajo el cambio $q \leftrightarrow p$, esto es,

$$dq \wedge dp = -dp \wedge dq \tag{3.11.6}$$

estructura que debe preservarse.

3.11.2. Forma simpléctica ω. Evolución Hamiltoniana

Derivada exterior d. Forma simpléctica ω Vamos a introducir un nuevo objeto geométrico en el espacio de fases, la denominada *derivada exterior* d, definida de tal forma que la acción sobre una función f, dependiente de las variables canónicas, y posiblemente del parámetro tiempo,

$$d(f) \equiv df \tag{3.11.7}$$

da lugar a la diferencial de la función, siendo por ejemplo $d(q) = dq$ la diferencial de la coordenada. A estos diferenciales, y a su expresión más general gdf siendo f, g funciones, se les denomina $1-$formas. Así las funciones propiamente dichas serían $0-$formas, y la estructura simpléctica vista en la sección anterior

$$dq \wedge dp \equiv \omega \tag{3.11.8}$$

que recibe en particular el nombre de *forma simpléctica*, es un ejemplo de lo que se denomina una $2-$forma. Continuando así, por ejemplo $df \wedge dg \wedge dh$, con f, g, h funciones, sería una $3-$forma definida en el espacio de fases.
Con estas *formas* lo que podemos obtener es una manera de *medir* la variación *diferencial* de las funciones definidas en el espacio de fases. Básicamente, podemos ver cómo cambian a medida que evoluciona el sistema en el espacio de fases.

Evolución temporal. Generador X Cuando hablamos de evolución en el espacio de fases estamos indicando la evolución del sistema respecto al parámetro temporal t, y por tanto, hablamos de su *evolución temporal*. Y esta evolución, tomándola como infinitesimal, está marcada por la traslación del sistema desde su estado en el tiempo t a su estado en el tiempo $t+dt$. Esta traslación temporal es una transformación continua, y como tal desde el punto de vista infinitesimal queda *completamente* caracterizada por el denominado *generador* temporal $\boldsymbol{X}_t$, definido específicamente por la expresión[1]

$$\boldsymbol{X}_t = \frac{d}{dt} \tag{3.11.9}$$

La acción del generador $\boldsymbol{X}_t$ sobre cualquier función está dada por la ley de transformación, por ejemplo, para la coordenada q:

$$q(t+dt) = q(t) + dt\boldsymbol{X}_t q(t) \equiv q(t) + dt\frac{d}{dt}q(t) \equiv q(t) + \dot{q}(t)dt \tag{3.11.10}$$

obteniendo el resultado esperado, y que se correspondería con la expresión más genérica

$$q' = q + \varepsilon \boldsymbol{X} q \tag{3.11.11}$$

siendo q' la variable transformada, $\boldsymbol{X}$ el generador de la transformación infinitesimal, y ε el denominado *parámetro* infinitesimal de la transformación, es decir, en qué cantidad infinitesimal cambia el parámetro de la transformación. En el caso anterior, $\varepsilon = dt$ indica que el parámetro temporal cambia infinitesimalmente de acuerdo con la ley $t' = t + dt$.

[1] Véase en la sección 13.2.2 la descripción general de estos generadores para las transformaciones continuas infinitesimales.

Evolución Hamiltoniana Analizamos ahora en que consiste específicamente la evolución temporal en el espacio de fases, cuyas coordenadas son las variables canónicas (q, p). En este espacio el generador temporal admite el desarrollo

$$\boldsymbol{X}_t \equiv \frac{d}{dt} = \frac{dq}{dt}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{dp}{dt}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial t} \equiv \dot{q}\frac{\partial}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{3.11.12}$$

Introduciendo entonces las ecuaciones de Hamilton que gobiernan la dinámica del sistema en el espacio de fases

$$\dot{q} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{3.11.13}$$

podemos ver que el generador temporal se expresa en la forma

$$\boldsymbol{X}_t = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{3.11.14}$$

y de su aplicación sobre cualquier función $f(q, p, t)$ definida en el espacio de fases obtenemos la ley de variación temporal

$$\frac{df}{dt} \equiv \lim_{dt\to 0}\frac{f(t+dt) - f(t)}{dt} = \boldsymbol{X}_t f = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{3.11.15}$$

En esta ecuación, la parte dependiente del Hamiltoniano tiene una estructura muy concreta que se denomina *corchete de Poisson* de la función f, denotado por $[f, H]$, y que será objeto de estudio en detalle en las secciones 4.6 y siguientes, y que anticipamos aquí su expresión

$$[f, H] \equiv \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} \tag{3.11.16}$$

y su significado, al ser

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{3.11.17}$$

el corchete de Poisson $[f, H]$ es la medida de la variación temporal de la función f *inducida* por la propia evolución *Hamiltoniana* del sistema.

Tercera ecuación de Hamilton Utilizando el desarrollo del parágrafo anterior, podemos deducir[1], aplicando el resultado al propio Hamiltoniano, que

$$\frac{dH}{dt} = \cancelto{0}{[H, H]} + \frac{\partial H}{\partial t} \equiv \frac{\partial H}{\partial t} \tag{3.11.18}$$

lo que constituye la tercera ecuación de Hamilton, y que implica que si H no depende explícitamente del tiempo será una constante del movimiento

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = \text{cte} \tag{3.11.19}$$

3.11.3. Ecuaciones de Hamilton

Previamente en esta sección hemos utilizado, sin deducirlas, las ecuaciones de Hamilton para obtener la expresión del generador temporal en función del denominado *corchete de Poisson*, explicando el significado físico de éste. Sin embargo, este procedimiento no es extrictamente necesario, ya que, de hecho, las propias ecuaciones de Hamilton se encuentran enmarcadas dentro de la geometría simpléctica, y ahora detallamos su deducción, lo que nos aportará la visión completa de la geometría y dinámica del espacio de fases. Para ello retomamos el contenido inicial de esta sección, en relación a la derivada exterior d y la forma simpléctica ω (aspectos geométricos)

[1] Esta deducción se basa en la aplicación previa de las dos primeras ecuaciones de Hamilton, por lo que no puede entenderse como una deducción independiente de éstas. Más bien, se trata de una confirmación.

uniéndolo con el generador temporal $\boldsymbol{X}_t$ (aspectos dinámicos).

La cuestión clave es que existe una relación funcional entre ellos, que permite unificar la descripción dinámica y geométrica, y que es el denominado *Hamiltoniano* la función definida en el espacio de fases la responsable de esta unificación.
Para ello, y como punto de partida, introducimos un nexo puramente geométrico entre la $1-$forma df generada por la derivada exterior y los generadores $\boldsymbol{X}$, y que se define mediante el denominado *producto interior* i entre el generador $\boldsymbol{X}$ y la $1-$forma. Su acción fundamental se expresa con la notación

$$i_{\frac{\partial}{\partial q}} dq \equiv \left\langle dq, \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle = 1 \tag{3.11.20}$$

Esto es, este producto interior expresa la *dualidad* entre las $1-$formas dq y los vectores $\partial/\partial q$, en el sentido de que su producto interior genera un número, en este caso, la unidad, pudiendo interpretar de forma gruesa que son geométricamente inversos entre sí[1]. Y como todo producto interior es lineal en sus operadores, en el sentido que

$$\boldsymbol{X} \equiv X_q \frac{\partial}{\partial q} \rightarrow \; i_{\boldsymbol{X}} dq \equiv i_{X_q \frac{\partial}{\partial q}} dq = X_q i_{\frac{\partial}{\partial q}} dq = X_q \cdot 1 = X_q \tag{3.11.21}$$

donde X_q es una función dada, coeficiente del vector $\partial/\partial q$. Además, este producto interior puede extenderse a *formas* de mayor orden. Esto es, el producto interior de un vector y una $1-$forma es un número, el producto interior de un vector y una $2-$forma es una $1-$forma, y demás.
No entramos en más detalle en la descripción geométrica, y pasamos a evaluar este producto interior del generador temporal $\boldsymbol{X}_t$ y la $2-$forma simpléctica ω, que dará lugar a una $1-$forma y que necesariamente nos aportará información del nexo entre la dinámica y la geometría. Evaluando su expresión, obtenemos

$$\begin{aligned} i_{\boldsymbol{X}_t}\omega \equiv i_{\dot{q}\frac{\partial}{\partial q}+\dot{p}\frac{\partial}{\partial p}+\frac{\partial}{\partial t}} (dq \wedge dp) &= \dot{q}\; i_{\frac{\partial}{\partial q}} (dq \wedge dp) - \dot{p}\; i_{\frac{\partial}{\partial p}} (dp \wedge dq) \\ &= \dot{q}dp - \dot{p}dq \end{aligned} \tag{3.11.22}$$

donde la parte temporal de $\boldsymbol{X}_t$, aunque formalmente no es necesaria en el espacio de fases desde el punto de vista geométrico (t no forma parte de las variables del sistema), da un resultado nulo ya que la geometría simpléctica (definida por ω) es un invariante.

Viendo este resultado, si definimos ahora en el espacio de fases la función $H(q,p,t)$ tal que su derivada exterior[2] cumpla este resultado

$$dH \equiv \dot{q}dp - \dot{p}dq \equiv \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp \tag{3.11.23}$$

habremos obtenido las ecuaciones de Hamilton del movimiento

$$\dot{q} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} \equiv -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{3.11.24}$$

para la dinámica del sistema *asociada* a la geometría simpléctica subyacente:

$$i_{\boldsymbol{X}_t}\omega \equiv \left\langle \omega, \boldsymbol{X}_t \right\rangle \equiv dH \tag{3.11.25}$$

[1] Este resultado puede extenderse fácilmente a $\left\langle dq_i, \frac{\partial}{\partial q^j} \right\rangle = \delta_{ij}$ que indica que la *base* de $1-$formas dq_i es dual a la base de vectores $\partial/\partial q^i$.

[2] Esta definición es independendiente del parámetro temporal, ya que no está ligado al espacio de fases, y ésta es la diferencia esencial entre la derivada exterior dH y la mera diferencial de la función H. Recordamos aquí que la tercera ecuación de Hamilton sólo puede entenderse geométricamente en el espacio de fases extendido, que incluye las variables canónicas y el tiempo, como queda explicado en la resolución del ejercicio 7.5.1.

3.11.4. Invariancia de la forma simpléctica

De aquí se deduce además la invariancia de la forma simpléctica para la evolución Hamiltoniana. Para verlo utilizamos la identidad para la derivada exterior d

$$d^2\,(\cdot) = 0 \;\longrightarrow\; d^2 \equiv 0 \tag{3.11.26}$$

que se satisface en virtud de su caracter antisimétrico; por ejemplo, para la función $f(q)$ tenemos

$$d\,(f) = f'(q)dq \;\longrightarrow\; d^2(f) \equiv d(d(f)) = f''(q)dq \wedge dq = -f''(q)dq \wedge dq \equiv 0 \tag{3.11.27}$$

De esta forma se satisface la derivación

$$d\,(i_{\boldsymbol{X}_t}\omega) = d\,(dH) \equiv d^2\,(H) \equiv 0 \quad\Longrightarrow\quad i_{\boldsymbol{X}_t}\omega = \text{inv.} \tag{3.11.28}$$

esto es, la forma simpléctica se conserva bajo la evolución Hamiltoniana. Además la propia forma simpléctica, por su definición, satisface

$$d\omega = d\,(dq \wedge dp) = d^2(q) \wedge dp + dq \wedge d^2(p) \equiv 0 \tag{3.11.29}$$

al ser $d^2(q) \equiv 0 \equiv d^2(p)$. Esta propiedad de ω nos permite introducir una forma definida de orden inferior, digamos ξ, aplicando la identificación

$$\omega \equiv d\,(\xi) \quad\Longrightarrow\quad d\omega = d^2\,(\xi) = 0 \tag{3.11.30}$$

que caracteriza también la estructura geométrica del espacio de fases. Para el espacio de fases genérico (q, p) tendremos

$$\xi = qdp \quad\Longrightarrow\quad d\,(\xi) = d(qdp) = dq \wedge dp \equiv \omega \tag{3.11.31}$$

3.11.5. Ejemplo. Billar circular

La interpretación geométrica del espacio de fases realizada hasta aquí es bastante abstracta, y puede clarificarse con un ejemplo sencillo, en este caso el billar circular. En el apéndice 6.11, dedicado a los denominados billares mecánicos, se describen las características principales de estos sistemas dinámicos. Aquí nos centraremos en el billar circular (véase la sección 6.11.3), formado por un círculo de radio R, donde se mueve una partícula puntual libre que colisiona elásticamente con las paredes de la circunferencia que la rodea.

Elección de coordenadas Dado que la partícula es libre su dinámica en el círculo quedará descrita por la sucesión de puntos sobre la frontera sobre los que colisiona a lo largo del tiempo. Podemos caracterizar cada colisión individual sobre la frontera con dos variables: la posición del punto sobre la circunferencia y el ángulo de incidencia en el impacto. Éstas serán las dos coordenadas q del espacio de fases. La primera coordenada, el valor s que define la longitud de arco sobre la circunferencia desde un origen arbitrario, y que por tanto define de forma unívoca la posición sobre la circunferencia, dentro del conjunto de valores posibles $0 \leq L \equiv 2\pi R$. Y la segunda coordenada, el ángulo α formado por la trayectoria de la partícula con la tangente a la circunferencia en el punto del impacto, que estará dentro del rango $0 < \alpha < \pi$.

Conservación del momento Respecto a estas dos coordenadas, una distancia y un ángulo, las dos componentes del momento de la partícula, y por tanto las dos componentes del momento en cada colisión, quedan definidos como p_s, el momento lineal a lo largo de la circunferencia, y p_α, el momento angular dirigido según el eje perpendicular al plano del círculo que pasa por el punto de impacto. Se satisface en cada colisión (al ser una colisión elástica que conserva la energía $E = \boldsymbol{p}^2/2m$)

$$\boldsymbol{p}^2 \equiv p_n^2 + p_t^2 = \left\{ \begin{array}{c} p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{R^2} \\ \left(\frac{p_\alpha}{R}\,\text{sen}\,\alpha\right)^2 + \left(p_s + \frac{p_\alpha}{R}\cos\alpha\right)^2 \end{array} \right\} = \text{cte} \tag{3.11.32}$$

donde los subíndices (n,t) indican la componente normal y tangencial del momento (respecto a la frontera), y siendo en este caso (p_r, p_φ) los momentos canónicos respecto a las coordenadas polares (r,φ) con origen en el centro del círculo que se utilizan en la descripción del billar circular dada en 6.11.3. Ambas descripciones son equivalentes, y mientras que las coordenadas polares, como explicamos en 6.11.3, nos permiten analizar de forma directa el movimiento en el interior del círculo, la descripción que estamos aquí planteando, basadas en las coordenadas (s,α) definidas sobre la propia frontera del círculo, nos permite analizar de forma más sencilla la geometria del espacio de fases de este billar circular.

Forma simpléctica Para ello, y recordando que la forma simpléctica $\omega \equiv dq \wedge dp$ es la medida del área elemental en el espacio de fases, tenemos la definición directa

$$\omega = \operatorname{sen}\alpha \, d\alpha \wedge ds \wedge dp_\alpha \wedge dp_s \tag{3.11.33}$$

recordando que α es un ángulo de tipo polar, con $0 < \alpha < \pi$, de ahí la necesidad de introducir el prefactor $\operatorname{sen}\alpha > 0$ para obtener la medida correcta.

Análisis de la invariancia de ω Por la conservación del momento, la parte en ω dependiente del producto de momentos será invariante de por sí bajo la evolución Hamiltoniana, por lo que podemos reducir nuestro estudio de invariancia a la $2-$forma simpléctica reducida

$$\omega = \operatorname{sen}\alpha \, d\alpha \wedge ds \tag{3.11.34}$$

que escribimos en la forma

$$\omega = d\left(-\cos\alpha ds\right) \quad \Longrightarrow \quad \omega = d\left(\xi\right) \quad , \quad \xi \equiv -\cos\alpha ds \tag{3.11.35}$$

siendo ξ la $1-$forma correspondiente. Analicemos entonces su variación a lo largo del tiempo, esto es, cómo varía con las sucesivas colisiones. En particular, si (α, s) es el valor de las coordenadas en una colisión dada arbitraria y (α', s') sus valores en la siguiente colisión, tendremos la variación neta

$$\xi(\alpha', s') - \xi(\alpha, s) = -cos(\alpha')ds' + \cos(\alpha)ds \tag{3.11.36}$$

Función generadora f La cuestión clave es si esta variación de la $1-$forma ξ, que se produce a lo largo del tiempo, esto es, con la evolución Hamiltoniana del sistema, y de la cual puede deducirse la propia evolución de la $2-$forma simpléctica ω, está representada por la $1-$forma de una función dada f. Esto es, si podemos identificar una función f en el espacio de fases tal que

$$\xi(\alpha', s') - \xi(\alpha, s) = -\cos(\alpha')ds' + \cos(\alpha)ds \equiv d(f) \tag{3.11.37}$$

Dicha función f, si existe, se denomina *función generadora* para la evolución del sistema. Ya que para el billar la evolución temporal se describe como el conjunto de colisiones sucesivas, en este caso f resultará ser simplemente la función generadora de una aplicación discreta, digamos $\mathcal{T}$, que determina la transición colisión a colisión

$$(\alpha, s) \quad \overset{\mathcal{T}}{\Longrightarrow} \quad (\alpha', s') \tag{3.11.38}$$

ó también de forma esquemática

$$\xi' = \mathcal{T}\left(\xi\right) \tag{3.11.39}$$

La consecuencia es directa: Si existe f tendremos directamente la invariancia de la $2-$forma simpléctica, al ser

$$\mathcal{T}\left(\xi\right) - \xi \equiv \xi' - \xi \equiv d(f) \quad \Longrightarrow \quad d\left(\mathcal{T}\left(\xi\right) - \xi\right) = 0 \tag{3.11.40}$$

y dado que el operador de derivación d sobre la trayectoria es independiente de la aplicación discreta $\mathcal{T}$ sobre la frontera, esto es,

$$d\left(\mathcal{T}\left(\xi\right)\right) \equiv \mathcal{T}\left(d\xi\right) = d\xi \Longrightarrow \quad \mathcal{T}\left(\omega\right) = \omega \tag{3.11.41}$$

Esta relación de invariancia es el equivalente discreto de la evolución temporal para la forma simpléctica obtenida en el caso general y en función del Hamiltoniano H (cuya versión discreta sería la función generadora f),

$$i_{\boldsymbol{X}_t}\omega = \text{inv.} \tag{3.11.42}$$

Determinación de la función generadora f Para ello lo que debemos plantear es la integrabilidad de la expresión

$$df = -\cos(\alpha')ds' + \cos(\alpha)ds \tag{3.11.43}$$

esto es, lo que sería en el cálculo ordinario la comprobación de que la diferencial df así definida es una diferencial exacta. El resultado es directo (la relación se transforma en una identidad) con la identificación

$$\begin{aligned} f &\equiv f(s,s') \\ \cos(\alpha) &= \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{s'} \\ -\cos(\alpha') &= \left(\frac{\partial f}{\partial s'}\right)_{s} \end{aligned} \tag{3.11.44}$$

Recordando que los ángulos α se definen sobre la tangente a la circunferencia y que los dos puntos s y s' se sitúan sobre la circunferencia, y teniendo en cuenta que esta relación es válida para cualquier valor de los ángulos, podemos situar los dos puntos s, s' infinitesimalmente cerca entre sí, de tal forma que su segmento de unión (esto es, la trayectoria de la partícula) sea paralela a la circunferencia, y por tanto $\alpha, \alpha' \to 0$, en cuyo caso el problema

$$\begin{aligned} f &\equiv f(s,s') \\ 1 &= \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{s'} \\ -1 &= \left(\frac{\partial f}{\partial s'}\right)_{s} \end{aligned} \tag{3.11.45}$$

tiene la solución evidente

$$f(s,s') = s - s' \tag{3.11.46}$$

cuya expresión para ángulos finitos será

$$f(s,s') = ||s - s'|| \tag{3.11.47}$$

siendo $||\cdot||$ la norma del vector $s - s'$ en el espacio de fases correspondiente.

Corolario Hemos mostrado por tanto que el billar circular tiene una evolución temporal descrita por una aplicación discreta $\mathcal{T}$ y generada por la función generadora $f(s,s') = ||s - s'||$, y de ello deducimos que la forma simpléctica ω se mantiene invariante en dicha evolución temporal. Este resultado no es general; cualquier modificación substancial de la dinámica en el interior del billar podría generar una evolución no Hamiltoniana (esto es, no existe función generadora para la aplicación $\mathcal{T}$) y con ello, una forma simpléctica (una medida) en el espacio de fases no conservada. Este tipo de modelos más complejos incluyen por ejemplo billares con fronteras no convexas (no existen trayectorias directas entre pares de puntos en la frontera), o billares en presencia de fuerzas externas en su interior (el más estudiado, un campo magnético) que determina que las trayectorias no sean rectilíneas en el interior (los ángulos α de incidencia dependen tanto del punto de partida como de la trayectoria seguida en el interior).

3.12. Apéndice D. Hamiltonianos singulares

Se presentan en esta sección ejemplos prácticos de Hamiltonianos singulares, sin entrar en detalle en el formalismo Hamiltoniano que aborda este tipo de problemas singulares, desarrollado por Dirac, cuya resolución se basa fundamentalmente en la incorporación al formalismo de las ligaduras dinámicas responsables del carácter singular del problema abordado. Además nos centraremos primero en ejemplos exclusivamente mecánicos, de forma que el Hamiltoniano se obtiene a partir

de un Lagrangiano, tratando dos casos por separado: cuando el Lagrangiano de origen no es singular, como es el caso de las transformaciones gauge, y cuando el Lagrangiano de origen es singular. Posteriormente, con lo ya aprendido, trataremos el Hamiltoniano singular general, sin características mecánicas.

3.12.1. Lagrangiano no singular

Consideremos de nuevo el ejercicio 3.7.4, que estudia el Hamiltoniano en una dimensión de una partícula libre en el caso de que el parámetro temporal t deba considerarse una variable dinámica adicional, con el mismo estatus que la coordenada q, y ambos sean función de un parámetro de tiempo propio, τ.

Expresión del Lagrangiano Sabiendo que la partícula es libre, tenemos a partir de la definición de $L = 1/2mv^2$ y al ser $v = dq/dt$, la relación

$$L \equiv \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \tag{3.12.1}$$

Dado que el tiempo propio τ actúa como el parámetro temporal de la trayectoria, debemos definir las velocidades generalizadas

$$\frac{dq}{d\tau} \equiv q' \quad , \quad \frac{dt}{d\tau} \equiv t' \tag{3.12.2}$$

de forma que el Lagrangiano adquiere la expresión

$$L = \frac{1}{2}m\frac{q'^2}{t'^2} \equiv L(q', t') \tag{3.12.3}$$

No obstante, debemos notar que este Lagrangiano no será el Lagrangiano del nuevo sistema, ya que al modificarse el parámetro temporal también se ve modificada la acción S. En particular, si $\tilde{L}$ es el nuevo Lagrangiano, tenemos la identificación

$$S \equiv \int L dt \equiv \int \tilde{L} d\tau \tag{3.12.4}$$

Esto es, el nuevo Lagrangiano tendrá la expresión

$$\tilde{L} = L\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{2}m\frac{q'^2}{t'} \equiv \tilde{L}(q', t') \tag{3.12.5}$$

y comprobamos que se trata de un Lagrangiano no singular, y que satisface la condición de invertibilidad

$$\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial v_i \partial v_j} \neq 0 \tag{3.12.6}$$

de forma que los momentos generalizados quedan bien definidos en términos de las velocidades generalizadas.

Momentos generalizados y Hamiltoniano A partir de aquí, obtenemos los momentos generalizados y el Hamiltoniano asociado, aplicando sus definiciones

$$\tilde{p} \equiv \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q'} = m\frac{q'}{t'} \quad , \quad \tilde{p}_t \equiv \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t'} = -\frac{1}{2}m\frac{q'^2}{t'^2} \tag{3.12.7}$$

$$\tilde{H} \equiv q' \cdot \tilde{p} + t' \cdot \tilde{p}_t - \tilde{L} = 2\tilde{L} - \tilde{L} - \tilde{L} \equiv 0 \tag{3.12.8}$$

Dinámica Hamiltoniana del sistema La situación que se ha producido, que nos lleva a un Hamiltoniano idénticamente nulo, es la existencia de una ligadura entre los momentos del sistema, en la forma

$$\frac{p^2}{2m} + p_t \equiv 0 \tag{3.12.9}$$

cuando (p, p_t) deben ser, por definición, cantidades independientes entre sí. Ésta es la fuente de singularidad de nuestro problema. Que el Hamiltoniano H sea idénticamente nulo indica que la dinámica del sistema, respecto a H, queda *congelada*: no existe la información necesaria sobre el observador físico para discriminar, respecto a todas las trayectorias posibles, la trayectoria real de la partícula libre. Esta información relevante consiste en seleccionar un observador particular, fijando la función tiempo $t(\tau)$ correspondiente. Una vez fijada esta función, t pasa a ser un parámetro temporal (posiblemente función de otro parámetro temporal τ) y deja de ser una variable del sistema, recuperándose la dinámica usual para la partícula libre y el observador de referencia.

Hamiltoniano alternativo Independientemente de la reducción trivial del problema eligiendo un observador particular, nos interesa la formulación del problema desde el punto de vista Hamiltoniano previa a esa elección. Dado que H no es útil, al ser $H \equiv 0$, debe existir una cantidad alternativa, digamos C, que determine la verdadera dinámica del sistema, y que tenga las mismas propiedades que un Hamiltoniano, en este caso en particular, que sea una constante del movimiento. La opción natural es seleccionar la propia ligadura (idénticamente nula) como el nuevo Hamiltoniano. La diferencia entre $H \equiv 0$ y $C \equiv 0$ es que sí contamos con una expresión explícita para C:

$$C = \frac{p^2}{2m} + p_t \equiv C(p, p_t) \tag{3.12.10}$$

A partir de aquí, si incorporamos las ecuaciones de Hamilton correspondientes para C tenemos

$$\frac{dC}{d\tau} = \frac{\partial C}{\partial \tau} = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = \text{cte} \equiv 0 \tag{3.12.11}$$

junto a

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= -\frac{\partial C}{\partial q} = 0 \quad \Longrightarrow \quad p(\tau) = \text{cte} \\ \frac{dq}{d\tau} &= \frac{\partial C}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \Longrightarrow \quad q(\tau) = q(0) + \frac{p}{m}\tau \end{aligned} \tag{3.12.12}$$

y finalmente

$$\begin{aligned} \frac{dp_t}{d\tau} &= -\frac{\partial C}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_t(\tau) = \text{cte} \\ \frac{dt}{d\tau} &= \frac{\partial C}{\partial p_t} = 1 \quad \Longrightarrow \quad t(\tau) = t(0) + \tau \end{aligned} \tag{3.12.13}$$

Trayectoria de la partícula Vemos así que la elección de C ha sido la correcta: la dinámica de la partícula libre corresponde a un movimiento con velocidad uniforme en el tiempo, siendo el tiempo un parámetro temporal arbitrario

$$q(t) = q(0) + \frac{p(0)}{m}t \quad , \quad p(t) = p(0) \tag{3.12.14}$$

3.12.2. Lagrangiano singular

Del estudio del caso de un Lagrangiano no singular hemos extraido la conclusión de que en presencia de un Hamiltoniano singular son las ligaduras del sistema las responsables de la dinámica del sistema. Desarrollamos con más detalle este procedimiento tomando el caso de un Lagrangiano que sea singular.

Partícula libre sobre un círculo. Ligaduras Consideremos una partícula libre en dos dimensiones que se mueve sobre una circunferencia de radio r_0. Sabemos por la formulación Lagrangiana que podemos tratar la partícula como un sistema bidimensional de coordenadas (x, y) sujeto a la ligadura $x^2+y^2 = r_0^2$, siendo λ la *fuerza* de ligadura asociada, definiendo el Lagrangiano modificado

$$L' = L + \lambda\left(x^2 + y^2 - r_0^2\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - r_0^2\right) \tag{3.12.15}$$

donde la velocidad al cuadrado de la partícula está dada, en componentes,

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \tag{3.12.16}$$

Hacemos un inciso aquí para recordar que la *fuerza* λ representará una fuerza *física*, esto es, con unidades de fuerza (N), cuando la ligadura esté representada en términos de una distancia, lo que correspondería en este caso a la expresión directa $\sqrt{x^2+y^2} - r_0 \equiv 0$. Y de esta forma, λ sería positiva en la dirección creciente de la distancia $\sqrt{x^2+y^2}$, esto es, positiva en la dirección radial en el plano del movimiento. Pero por una mayor simplicidad matemática, evitaremos el uso de la raiz cuadrada, y definiremos la ligadura en términos de una distancia al cuadrado, esto es, $x^2 + y^2 - r_0^2 \equiv 0$, en cuyo caso λ no será identificada con una fuerza física, aunque por generalidad entenderemos que es la *fuerza* de ligadura asociada a esta ligadura, positiva en la dirección creciente de la distancia al cuadrado $x^2 + y^2$, que corresponde de nuevo a la dirección radial en el plano del movimiento.
Y podríamos prescindir, de forma alternativa, de la ligadura y analizar el movimiento unidimensional de la partícula sobre la circunferencia definiendo como única coordenada, digamos s, la longitud de arco recorrida, pero aquí nos interesa únicamente la descripción bidimensional con ligadura, puesto que es la presencia de la ligadura la que genera un Hamiltoniano singular para el sistema.

• Antes de pasar al formalismo Hamiltoniano, revisamos cuáles son las ligaduras en el formalismo Lagrangiano, para poder realizar la comparativa. En primer lugar tenemos la ligadura *estática*

$$x^2 + y^2 = r_0^2 \equiv \text{cte} \tag{3.12.17}$$

y si analizamos su evolución temporal obtendremos una ligadura dinámica[1] adicional

$$\frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2\right) \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad x\dot{x} + y\dot{y} \equiv 0 \tag{3.12.18}$$

Aquí ya no tiene sentido derivar de nuevo respecto al tiempo esperando encontrar una nueva ligadura dinámica, ya que obtendríamos en cualquier caso una ecuación para $\ddot{x}, \ddot{y}$ que sería dependiente de la propia ecuaciones de Euler-Lagrange del movimiento. Pero precisamente esa dependencia necesaria nos permite obtener el valor *dinámico* de la fuerza de ligadura, en la forma

$$\left.\begin{array}{c} E[L']_x = 0 \;\rightarrow\; m\ddot{x} = 2\lambda x \\ E[L']_y = 0 \;\rightarrow\; m\ddot{y} = 2\lambda y \\ m\left(x\dot{x} + y\dot{y}\right) \equiv 0 \;\rightarrow\; m\left(x\ddot{x} + y\ddot{y}\right) + m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\lambda(x^2+y^2) + m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = 0 \tag{3.12.19}$$

esto es,

$$\lambda = -\frac{m}{2}\frac{v^2}{r^2} \tag{3.12.20}$$

que corresponde, como esperabamos, a la *fuerza* centrípeta necesaria para equilibrar la *fuerza* centrífuga debido al giro de la partícula respecto al origen de coordenadas y mantener así su movimiento sobre la circunferencia de radio $r = r_0$.

[1] Sin querer entrar en detalle en la nomenclatura de Dirac, hablamos aquí de ligadura *dinámica* como la ligadura generada por la propia dinámica del sistema a diferencia de la ligadura *estática* inicial, $x^2 + y^2 = r_0^2$, que determina el movimiento de la partícula sobre la *superficie* de la circunferencia de radio r_0.

Recopilando los resultados, vemos que aunque el Lagrangiano de partida es formalmente idéntico al Lagrangiano de una partícula libre

$$L' = \frac{1}{2}mv^2 + \lambda \cancelto{0}{\left(x^2 + y^2 - r_0^2\right)} \equiv \frac{1}{2}mv^2 \tag{3.12.21}$$

las ecuaciones del movimiento son distintas, puesto que en la práctica son las ligaduras dinámicas las que caracterizan la dinámica de la partícula sobre la circunferencia. Y como veremos, dentro del formalismo Hamiltoniano los resultados son totalmente análogos, y la búsqueda de esta analogía es la que permite definir el procedimiento a seguir en el formalismo Hamiltoniano. El primer paso que debemos dar es la construcción del Lagrangiano singular del sistema.

Construcción del Lagrangiano singular En este punto, de forma análoga al problema de la partícula libre con variable temporal (ejercicio 3.7.4), vamos a considerar la *fuerza* λ como una variable dinámica más del sistema. Allí la variable temporal t representaba el observador genérico del sistema, aquí λ representa la interacción genérica de la partícula con su *medio* exterior. Y de esta forma, el término $\lambda\left(x^2 + y^2 - r_0^2\right)$ deja de representar una ligadura sobre el movimiento de la partícula, y sí, como hemos indicado, un término de interacción. En resumen, tenemos entonces el Lagragiano del sistema ampliado

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \lambda\left(x^2 + y^2 - r_0^2\right) \equiv L(\dot{x}, \dot{y}, x, y, \lambda) \tag{3.12.22}$$

que es singular ya que no contiene la velocidad generalizada $\dot{\lambda}$, que debería aparecer al estar asociada a la coordenada λ.

Hamiltoniano de la partícula. Primera ligadura dinámica Como hemos visto, con la incorporación de λ como variable del sistema desaparece la ligadura estática inicial, pero surge en su lugar la siguiente ligadura dinámica

$$p_\lambda \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \equiv 0 \tag{3.12.23}$$

Éste es el origen del Hamiltoniano singular, dado que determina el valor estrictamente nulo del momento conjugado p_λ. En todo caso, para obtener la expresión del Hamiltoniano utilizamos su definición general para este sistema ampliado

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_\lambda\dot{\lambda} - L \tag{3.12.24}$$

siendo además

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad , \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \tag{3.12.25}$$

Aplicando el procedimiento habitual para invertir estas definiciones y determinar las velocidades generalizadas en función de los momentos conjugados, desarrollamos la expresión del Hamiltoniano obteniendo su expresión en la forma

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + p_\lambda\dot{\lambda} - \lambda\left(x^2 + y^2 - r_0^2\right) \equiv H(x, y, \lambda, p_x, p_y, p_\lambda) \tag{3.12.26}$$

Al no haber podido eliminar la dependencia en $\dot{\lambda}$, dado que no aparece esta velocidad generalizada en el Lagragiano de partida, lo que nos encontramos aquí es una expresión de un Hamiltoniano *modificado*, en la forma

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) - \lambda\left(x^2 + y^2 - r_0^2\right) + \dot{\lambda}\cdot p_\lambda \tag{3.12.27}$$

donde $\dot{\lambda}$ puede interpretarse como la *fuerza* de ligadura (multiplicador de Lagrange) de la ligadura dinámica $p_\lambda \equiv 0$.

Utilizamos en esta definición la expresión *modificado* en analogía con el concepto de Lagrangiano modificado, cuando se introduce en el propio Lagrangiano la acción de una ligadura. No obstante, existe una diferencia fundamental: mientras que en el formalismo Lagrangiano una ligadura restringe la trayectoria de la partícula, en el formalismo Hamiltoniano no pueden existir ligaduras que limiten las variables independientes en el espacio de fases, ya que por definición el espacio de fases es completo, esto es, tiene las dimensiones correctas para la descripción completa de la dinámica del sistema. Lo que subyace en estos casos es el carácter singular del Hamiltoniano, y por tanto el comportamiento singular de la dinámica del sistema.

Ligaduras dinámicas adicionales. Condiciones de consistencia La presencia de la velocidad generalizada $\dot{\lambda}$ en el Hamiltoniano debe tener algún motivo, por lo que es necesario obtener una condición adicional de consistencia que lo justifique. Y esta condición de consistencia debe provenir directamente de la ligadura dinámica del sistema, $p_\lambda \equiv 0$.
En este punto realizamos el mismo procedimiento llevado a cabo en el formalismo Lagrangiano para obtener nuevas ligaduras dinámicas a partir de la ligadura inicial presente allí en el Lagrangiano, aquí en el Hamiltoniano. Y del mismo modo que en el formalismo Lagrangiano la evolución temporal en el espacio de configuración está definida en términos del operador de derivación temporal (pe. $\dot{x} = dx/dt$), en el formalismo Hamiltoniano la evolución temporal debe ser Hamiltoniana, esto es, para cualquier función f definida en el espacio de fases su evolución temporal está dada por la expresión

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \big[f, H\big] \tag{3.12.28}$$

Aplicando entonces este procedimiento, partiendo de la ligadura inicial $p_\lambda \equiv 0$, de la condición de consistencia de la ligadura, $d/p_\lambda/dt \equiv 0$, se deduce la existencia de una ligadura dinámica adicional, en la forma

$$p_\lambda \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \equiv \frac{dp_\lambda}{dt} \equiv \big[p_\lambda, H\big] \quad \Longrightarrow \quad \big[p_\lambda, H\big] \equiv 0 \tag{3.12.29}$$

y dada por

$$\big[p_\lambda, H\big] = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - r_0^2 \equiv 0 \tag{3.12.30}$$

que coincide con la ligadura estática inicial del formalismo Lagrangiano, pero vemos que en el formalismo Hamiltoniano tiene el mismo origen dinámico que $p_\lambda \equiv 0$. Continuando con el procedimiento, aplicando la evolución temporal, analizamos la condición de consistencia para la nueva ligadura en la forma

$$x^2 + y^2 - r_0^2 \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \big[x^2 + y^2 - r_0^2, H\big] \equiv 0 \tag{3.12.31}$$

con el resultado

$$\big[x^2 + y^2 - r_0^2, H\big] = \big[x^2 + y^2, H\big] = 2x\big[x, H\big] + 2y\big[y, H\big] = \frac{1}{m}\left(xp_x + yp_y\right) \equiv 0 \tag{3.12.32}$$

nueva ligadura dinámica, cuya condición de consistencia se escribe

$$xp_x + yp_y \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \big[xp_x + yp_y, H\big] \equiv 0 \tag{3.12.33}$$

con el resultado

$$\big[xp_x + yp_y, H\big] = \frac{p_x^2 + p_y^2}{m} + 2\lambda\left(x^2 + y^2\right) \equiv 0 \tag{3.12.34}$$

En este punto, ya tenemos el resultado previo que necesitamos: una ligadura dinámica, que a diferencia de las anteriores, depende de la variable λ, de forma que su condición de consistencia implicará finalmente a la velocidad generalizada $\dot{\lambda}$, en la forma

$$\frac{p_x^2 + p_y^2}{m} + 2\lambda\left(x^2 + y^2\right) \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{p_x^2 + p_y^2}{m} + 2\lambda\left(x^2 + y^2\right), H\right] \equiv 0 \tag{3.12.35}$$

con el resultado

$$\left[\frac{p_x^2+p_y^2}{m}+2\lambda\left(x^2+y^2\right),H\right]=\frac{8}{m}\lambda\left(xp_x+yp_y\right)+2\left(x^2+y^2\right)\dot{\lambda}\equiv 0 \tag{3.12.36}$$

De esta expresión, deducimos el valor de $\dot{\lambda}$, en la forma

$$\dot{\lambda}=-4\frac{\lambda}{m\left(x^2+y^2\right)}\left(xp_x+yp_y\right) \tag{3.12.37}$$

y comprobamos que, utilizando la tercera ligadura dinámica,

$$xp_x+yp_y\equiv 0 \quad\Longrightarrow\quad \dot{\lambda}\equiv 0 \tag{3.12.38}$$

y con ello llegamos a la última condición independiente de consistencia del sistema; las siguientes condiciones serían triviales, $0\equiv[0,H]$, y no darían ligaduras adicionales.

Interpretación física de las condiciones de consistencia Una vez determinadas todas las ligaduras dinámicas del sistema Hamiltoniano, debemos pasar a su interpretación física. Esto es necesario, puesto que introduciendo el valor de las ligaduras en el Hamiltoniano del sistema encontramos que

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2\right)-\cancelto{0}{\lambda\left(x^2+y^2-r_0^2\right)}+\cancelto{0}{\dot{\lambda}\,p_\lambda}\equiv\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2\right) \tag{3.12.39}$$

lo que parece indicar que el Hamiltoniano de la partícula con ligaduras es idéntico al Hamiltoniano de la partícula libre (sin ligaduras), lo que no es cierto ya que sus ecuaciones de movimiento y su ley de movimiento, solución de dichas ecuaciones, son distintas.
Son las condiciones de consistencia, presentes en la dinámica de la partícula con ligaduras, y ausentes en la dinámica de la partícula sin ligaduras, las necesarias para restablecer las diferencias entre los dos sistemas Hamiltonianos aparentemente iguales. La clave está en el resultado obtenido para los corchetes de Poisson, dado que dichos corchetes están directamente relacionados con las propiedades dinámicas del sistema[1], que son distintas para ambos casos. Para la partícula libre su dinámica permite la traslación espacial a lo largo de los dos ejes, por ejemplo en la dirección x, con generador p_x, de forma que se satisface

$$x\to x+\varepsilon \quad,\quad \delta x=\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad [x,p_x]=1 \tag{3.12.41}$$

No sucede lo mismo con la partícula sobre la circunferencia, que no está dotada de esta traslación espacial a lo largo de los dos ejes, sino que sólo permite una traslación en la dirección tangente a la circunferencia. Este hecho debe reflejarse en los valores correspondientes de los corchetes de Poisson, por ejemplo

$$[x,p_x]=?\neq 1 \tag{3.12.42}$$

Para demostrar este resultado y deducir su valor, el corchete de Poisson no debe calcularse con ayuda del Hamiltoniano de la partícula, ya que es idéntico al Hamiltoniano de la partícula libre, sino que debe determinarse en el espacio de fases asociado a las ligaduras dinámicas, donde éstas son globalmente válidas:

- Por ejemplo, del corchete de Poisson de la segunda ligadura consigo misma, obtenemos la siguiente condición

$$\left[x^2+y^2-r_0^2,x^2+y^2-r_0^2\right]\equiv 0 \quad\Longrightarrow\quad \left[x,y\right]_D\equiv 0 \tag{3.12.43}$$

  donde únicamente hemos aplicado las propiedades generales de los corchetes de Poisson, pero no aplicaremos el valor de los corchetes fundamentales, por ejemplo, el mencionado $[x,p_x]=1$, ya que pertenecen a un espacio de fases sin ligaduras. Además indicamos con un subíndice D (de Dirac) los valores de los corchetes en este espacio de fases reducido.

[1] Recordamos aquí la noción de generador de una transformación canónica infinitesimal, en la notación de los corchetes de Poisson (ecuación 4.6.42)

$$\delta f=\varepsilon[f,G] \tag{3.12.40}$$

siendo f la variable dinámica, δf su cambio en la transformación canónica de parámetro infinitesimal ε, y G el generador correspondiente.

- Así mismo, utilizando el corchete de Poisson de la tercera ligadura con las coordenadas, tendremos

$$[x, xp_x + yp_y]_D \equiv 0 \quad , \quad [y, xp_x + yp_y]_D \equiv 0 \tag{3.12.44}$$

que nos llevan a las relaciones

$$x[x, p_x]_D = -y[x, p_y]_D \quad , \quad x[y, p_x]_D = -y[y, p_y]_D \tag{3.12.45}$$

- Con la aplicación sucesiva de este método, evaluando los corchetes entre las distintas ligaduras

$$\mathcal{M}_{ij} \equiv [\phi_i, \phi_j]_D \equiv 0 \tag{3.12.46}$$

siendo ϕ_i la expresión de la ligadura $i-$ésima, con $i = 1, 2, 3, 4$, obtenemos un conjunto de relaciones que nos permiten determinar de forma unívoca el valor de los corchetes fundamentales

$$[x, y]_D \quad , \quad \{[x, p_x]_D, [x, p_y]_D, [y, p_x]_D, [y, p_y]_D\} \quad , \quad [p_x, p_y]_D \tag{3.12.47}$$

en el espacio de fases restringido a las ligaduras dinámicas del sistema. Sin entrar en detalle en el cálculo completo, que se realiza sin dificultades, vemos que la $\mathcal{M}$ es una matriz 4×4 con elementos nulos en la diagonal, y con la propiedad de antisimetría $\mathcal{M}_{ij} = -\mathcal{M}_{ji}$. Con estas propiedades, $\mathcal{M}$ tiene únicamente 6 elementos independientes, y por tanto el problema de encontrar los 6 corchetes de Poisson fundamentales, listados anterioremente, está bien planteado y tiene solución única.

- En todo caso, podemos comprobar de forma sencilla que efectivamente $[x, p_x]_D \neq 1$, utilizando una forma alternativa más directa. Teniendo en cuenta la definición de las coordenadas polares (r, φ) en el plano (x, y) vemos que el corchete tiene la expresión

$$[x, p_x]_D \equiv [r\cos\varphi, -mr\,\mathrm{sen}\,\varphi\dot{\varphi}]_D \tag{3.12.48}$$

aplicando $p_x = \partial L/\partial\dot{x} = m\dot{x} = md(r\cos\varphi)/dt$, de forma que $p_x|_D = -mr\,\mathrm{sen}\,\varphi\dot{\varphi}$, teniendo en cuenta que el espacio de fases reducido corresponde al valor $r = \text{cte}$. El resultado final es

$$[x, p_x]_D = mr^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi[\varphi, \dot{\varphi}]_D \equiv \mathrm{sen}^2\,\varphi\,[\varphi, p_\varphi] = \mathrm{sen}^2\,\varphi = \frac{y^2}{r^2} \tag{3.12.49}$$

donde hemos aplicado la definición en coordenadas polares

$$L = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 \quad , \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \tag{3.12.50}$$

y el valor del corchete fundamental

$$[\varphi, p_\varphi]_D \equiv [\varphi, p_\varphi] = 1 \tag{3.12.51}$$

dado que sobre la circunferencia el espacio de fases completo equivale al espacio de fases reducido anterior, y que existe en este espacio la *traslación* espacial de la coordenada angular φ:

$$\delta\varphi = \varepsilon \equiv \varepsilon[\varphi, p_\varphi] \quad \Longrightarrow \quad [\varphi, p_\varphi] = 1 \tag{3.12.52}$$

Comprobamos además que para $x = 0, y = \pm r$ se satisface

$$[x, p_x]_D = 1 \tag{3.12.53}$$

indicando que en estos puntos de la circunferencia, de valor máximo y, el desplazamiento en la coordenada x del movimiento se realiza exclusivamente en la dirección del eje x, lo que no sucede en los restantes puntos de la circunferencia. El resultado es análogo para la coordenada y.

- Finalmente, aplicando la primera relación obtenida anteriormente

$$x[x, p_x]_D = -y[x, p_y]_D \tag{3.12.54}$$

podemos deducir en este caso, como ejemplo,

$$x\frac{y^2}{r^2} = -y[x, p_y]_D \quad \Longrightarrow \quad [x, p_y]_D = -\frac{xy}{r^2} \tag{3.12.55}$$

lo que indica que la traslación de la coordenada y a lo largo de la circunferencia una distancia infinitesimal ε, con generador p_y, modifica la coordenada x en la cantidad infinitesimal

$$\delta x = \varepsilon[x, p_y]_D = -\varepsilon\frac{xy}{r^2} \tag{3.12.56}$$

La diferencia de este resultado con el obtenido desde un punto de vista puramente estático

$$x^2 + y^2 = r_0^2 = \text{cte} \quad \Longrightarrow \quad x\delta x + y\delta y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta x = -\frac{y}{x}\delta y \tag{3.12.57}$$

reside precisamente en el comportamiento dinámico de la partícula: el desplazamiento a lo largo de la circunferencia no es arbitrario y se realiza a velocidad angular constante, esto es, se satisface además $xp_x + yp_y = 0$.

3.12.3. Hamiltoniano general con ligaduras

Descripción general Una vez analizado en detalle el problema de la partícula libre, como extensión es directo concluir que el procedimiento a desarrollar para analizar la dinámica de un sistema Hamiltoniano singular general consta de los siguientes pasos:

(1) El Hamiltoniano estará definido como la suma del Hamiltoniano del sistema en ausencia de ligaduras, digamos H_0, más la contribución de las ligaduras iniciales

$$H = H_0 + \sum_j \dot{\lambda}_j \cdot p_{\lambda_j} \tag{3.12.58}$$

A estas ligaduras iniciales las denominaremos en general ligaduras *primarias*, ya que se derivan directamente del Lagrangiano de partida por la ausencia de la velocidad generalizada correspondiente:

$$p_{\lambda_j} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_j} \equiv 0 \tag{3.12.59}$$

lo que determina el carácter singular del Hamiltoniano H.

(2) Aplicando entonces la condición de consistencia para cada una de las ligaduras primarias, en la forma

$$0 \equiv \frac{dp_{\lambda_j}}{dt} = [p_{\lambda_j}, H] \tag{3.12.60}$$

Existirá consistencia si se obtiene uno de los siguientes resultados al evaluar este corchete

- La ecuación obtenida es una identidad $0 \equiv 0$, y como corolario no pueden obtenerse más ligaduras asociadas a p_{λ_j} aplicando la evolución temporal.
- La ecuación obtenida es una combinación lineal de ligaduras primarias, ya definidas, por lo que esta condición no aporta información adicional sobre la dinámica del sistema.
- La ecuación obtenida es una nueva ligadura, independiente de las ligaduras primarias. Este tipo de ligadura se denomina, por su origen, ligadura *secundaria*.

(3) Se continúa con el procedimiento también para las ligaduras secundarias, así obtenidas, hasta finalizar el proceso cuando las condiciones de consistencia restantes no generen nuevas ligaduras (condición trivial, o condición dependiente de ligaduras ya conocidas).

Dinámica del sistema Finalizado el proceso, lo que obtenemos es el Hamiltoniano H del sistema en función del Hamiltoniano H_0 y del conjunto completo de las ligaduras que determinan su dinámica. En este sentido, para cualquier función dinámica definida en el espacio de fases original, asociado a H_0, su evolución temporal estará gobernada por la ecuación

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]_D \tag{3.12.61}$$

donde los corchetes de Poisson deben evaluarse en el espacio de fases restringido por el conjunto completo de las ligaduras (primarias y secundarias).

Nota adicional. Ligaduras de primera clase Existe además una distinción interna clara entre las ligaduras, no vinculada directamente con la expresión del Hamiltoniano. Esta independencia con el Hamiltoniano define el carácter implícito de propiedad *gauge* del sistema, y no del Hamiltoniano. En particular, la distinción entre las ligaduras se realiza en función de sus propiedades de *conmutación*. Diremos que dos ligaduras conmutan entre sí, si su corchete de Poisson en el espacio de fases restringido es nulo. Estas propiedades de conmutación dividen las ligaduras en dos tipos: las ligaduras de *primera clase*, que conmutan con todas las restantes ligaduras, y ligaduras de *segunda clase*, que no conmutan con alguna otra ligadura y, por tanto, no son de primera clase. La importancia de esta división es crucial: mientras que las ligaduras de primera clase no son *eliminables* mediante la introducción de una transformación *gauge* de los corchetes de Poisson, digamos la transformación $[\cdot,\cdot]_D \Rightarrow [\cdot,\cdot]_K$, definidos en un nuevo espacio de fases restringido (K) válido para el sistema, las ligaduras de segunda clase sí son eliminables bajo esta transformación, en cuyo caso decimos que hemos eliminado los grados de libertad *gauge* del espacio de fases, grados de libertad irrelevantes para la descripción física del sistema. Con este proceso de eliminación lo que obtenemos es la descripción física más completa[1] posible en función unicamente de las ligaduras indispensables de primera clase.

Ejemplo. Campo electromagnético El Lagrangiano estándar para el campo electromagnético libre (sin interacción con la materia) está dado por la expresión, en notación tensorial,

$$L = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{3.12.62}$$

siendo $F_{\alpha\beta}$ la intensidad (tensorial) del campo electromagnético, definida en la forma

$$F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \tag{3.12.63}$$

siendo A_α el potencial vector electromagnético, con las componentes

$$A_\alpha \equiv (\phi, \boldsymbol{A}) \tag{3.12.64}$$

siendo ϕ el potencial electrostático y $\boldsymbol{A}$ el potencial vector tridimensional. Este vector A_α es la variable dinámica del sistema (esto es, su coordenada canónica). En cada una de estas expresiones, los índices α, β toman los valores $0, 1, 2, 3$ y pertenecen a la métrica de la Relatividad especial, siendo $\alpha = 0$ el índice temporal correspondiente al tiempo t, y $\alpha = 1, 2, 3$ los índices espaciales correspondientes a las coordenadas cartesianas x, y, z. Sin entrar en ningún detalle en la descripción relativista del campo, lo relevante aquí para el formalismo Hamiltoniano es que el Lagrangiano, por definición, no depende de la velocidad generalizada $\dot{A}_0$, y sí de las velocidades generalizadas $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3$. Esto significa que el Lagrangiano es singular, y por tanto la dinámica Hamiltoniana del campo electromagnético también será singular.

[1] Lo que se conoce en la versión cuántica del formalismo Hamiltoniano como un conjunto completo de observables compatibles para el sistema. En esta descripción nada impone que el conjunto sea único, si es necesario que sea completo.

Condición de consistencia Lo que queremos obtener de forma sencilla es la condición de consistencia asociada a la ligadura primaria

$$P_0 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_0} \equiv 0 \tag{3.12.65}$$

y que estará dada por

$$\frac{dP_0}{dt} = [P_0, H] \equiv 0 \tag{3.12.66}$$

siendo

$$H = \dot{A}_i P_i + \dot{A}_0 P_0 - L \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad P_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i} \tag{3.12.67}$$

el Hamiltoniano del campo electromagnético. Desarrollando el Hamiltoniano por separado en los índices espaciales y el índice temporal, obtenemos el siguiente desarrollo

$$H = -\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} P_i P_i - A_0 \partial_i P_i \tag{3.12.68}$$

que indica que depende de la componente A_0 únicamente en el último término. De aquí obtenemos directamente la expresión de la ligadura secundaria

$$0 \equiv [P_0, H] = [P_0, -A_0 \partial_i P_i] = \partial_i P_i [A_0, P_0] = \partial_i P_i \equiv 0 \tag{3.12.69}$$

dado que A_0 y P_0 son variables canónicas entre sí

$$[A_0, P_0] \equiv [q, p] = 1 \tag{3.12.70}$$

y en notación vectorial tenemos

$$\partial_i P_i = 0 \rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{P} = 0 \tag{3.12.71}$$

Interpretación física de la condición de consistencia La interpretación es directa dado que el momento $\boldsymbol{P}$ está dado por

$$P_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i} = F_{i0} \equiv E_i \quad , \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{E} \tag{3.12.72}$$

siendo $\boldsymbol{E}$ el campo eléctrico (la parte eléctrica del campo electromagnético). Deducimos por tanto que la condición de consistencia de la ligadura primera es la ligadura secundaria

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{3.12.73}$$

que no es más que la ley de Gauss para el campo en el vacío. Dado que esta ligadura conmuta con la ligadura $P_0 \equiv 0$ ambas ligaduras son de primera clase, no eliminables aplicando una transformación gauge en el espacio de fases del sistema (A_α, P_β). Si ahora analizamos la condición de consistencia para la ley de Gauss obtendríamos las ligaduras secundarias

$$A_0 \equiv 0 \quad , \quad \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{3.12.74}$$

que resultan ser de segunda clase, y por tanto representan grados de libertad irrelevantes del sistema. La transformación gauge del espacio de fases que nos permite eliminar estos grados de libertad innecesarios es asignar el valor idénticamente nulo (*gauge* de Coulomb)

$$A_0 = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{3.12.75}$$

en el espacio de fases inicial, no únicamente en el espacio de fases restringido. En la práctica, esto significa que de las cuatro coordenadas iniciales A_α, sólo dos de ellas son independientes, coordenadas que corresponden a la dos configuraciones transversales independientes[1] del campo electromagnético en el vacío.

[1] Al no tener el campo electromagnético en el vacío autointeracción las componentes en cada eje cartesiano, en el espacio de fases transformado gauge, son independientes.

3.13. Apéndice E. Cálculo simbólico y numérico

Se reproduce aquí por completitud el mismo desarrollo simbólico y numérico explicado en el ámbito del formalismo Lagrangiano, sección 2.8, dado que es de aplicación general.

3.13.1. Cálculo simbólico con Maxima

El uso del cálculo simbólico en general es un método útil que nos permite minimizar los posibles errores algebraicos en la manipulación de las fórmulas matemáticas. La referencia básica para aprender el uso del programa Maxima en el área de la Mecánica clásica es el libro

- *Classical Mechanics with Maxima* de los autores Todd Keene Timberlake y J. Wilson Mixon, Jr., Editorial Springer, 2016

aunque no trata específicamente de la formulación Hamiltoniana. En el Apéndice final pueden encontrar la ejecución de los programas de Maxima elaborados por el equipo docente de los ejercicios seleccionados, en los que el cálculo simbólico sirve para reducir la complejidad matemática de la resolución.

3.13.2. Esquemas de integración numérica

Dado que los métodos numéricos no forman parte del contenido de la asignatura, la mayoría de los ejercicios resueltos tienen una resolución analítica directa que evita la necesidad de una resolución numérica. No obstante, hay situaciones en las que tener un buen esquema numérico puede favorecer una comprensión más rápida de los problemas abordados, generalmente complejos. Uno de estos ejemplos es el análisis adiabático, y por extensión problemas en los que tengamos dos escalas de tiempo bien diferenciadas, una escala lenta y una escala rápida, como por ejemplo en física de la atmósfera.
Como ejemplo característico fundamental analizamos aquí el movimiento oscilatorio, solución de la ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3.13.1}$$

ó de forma equivalente solución de las dos EDO de primer orden

$$\dot{x} = y \quad , \quad \dot{y} = -\omega^2 x \tag{3.13.2}$$

El movimiento oscilatorio es sencillo de interpretar pero numéricamente complicado para integrar, dado que debe asegurarse que se mantiene una amplitud constante en cada periodo. Es obligatorio por ello utilizar una integración numérica con un paso adaptativo, que nos permita controlar la precisión numérica localmente. Para ello se utilizan dos esquemas Runge-Kutta de orden 4 en cada paso, y se corrige paso de integración en función del error relativo entre ellos. Con esto podemos integrar fácilmente el movimiento oscilatorio de frecuencia constante. En detalle:

Esquema Runke-Kutta de orden 4 El esquema de Runge-Kutta de orden 4 para la integración de la EDO de primer orden general

$$\dot{y} = f(y, t) \tag{3.13.3}$$

está dado por los puntos $y_j \equiv y(t_j)$, que satisfacen las relaciones de recurrencia

$$y_{j+1} = y_j + C_1 y_{1j} + C_2 y_{2j} + C_3 y_{3j} + C_4 y_{4j} + C_5 y_{5j} + C_6 y_{6j} \tag{3.13.4}$$

donde $C_1, .., C_6$ son constantes, y las funciones $y_{1j}, .., y_{6j}$ están dadas por las expresiones

$$\begin{aligned}
y_{1j} &= hf(y_j, t_j + A_1 h) \\
y_{2j} &= hf(y_j + B_{21} y_{1j}, t_j + A_2 h) \\
y_{3j} &= hf(y_j + B_{31} y_{1j} + B_{32} y_{2j}, t_j + A_3 h) \\
y_{4j} &= hf(y_j + B_{41} y_{1j} + B_{42} y_{2j} + B_{43} y_{3j}, t_j + A_4 h) \\
y_{5j} &= hf(y_j + B_{51} y_{1j} + B_{52} y_{2j} + B_{53} y_{3j} + B_{54} y_{4j}, t_j + A_5 h) \\
y_{6j} &= hf(y_j + B_{61} y_{1j} + B_{62} y_{2j} + B_{63} y_{3j} + B_{64} y_{4j} + B_{65} y_{5j}, t_j + A_6 h)
\end{aligned} \tag{3.13.5}$$

donde h es el paso de integración, esto es, $t_{j+1} = t_j + h$, y donde los valores A_n, B_{mn} son constantes numéricas. Estas constantes, junto con las constantes C_n anteriores, se eligen para que el esquema de integración sea de orden 4, esto es, la recurrencia anterior corresponda al desarrollo de Taylor de orden h^4 alrededor de cada punto, de forma que el error cometido al truncar el desarrollo sea de orden $O(h^5)$. Estos valores pueden seleccionarse utilizando las referencias publicadas, o elaborando un programa de cálculo propio para su determinación. En particular, en nuestro caso utilizaremos los valores

$$A_1 = 0\ ,\ A_2 = \frac{1}{5}\ ,\ A_3 = \frac{3}{10}\ ,\ A_4 = \frac{3}{5}\ ,\ A_5 = 1\ ,\ A_6 = \frac{7}{8} \tag{3.13.6}$$

y

$$\begin{aligned}
&B_{21} = \frac{1}{5} \\
&B_{31} = \frac{3}{40}\ ,\ B_{32} = \frac{9}{40} \\
&B_{41} = \frac{3}{10}\ ,\ B_{42} = -\frac{9}{10}\ ,\ B_{43} = \frac{6}{5} \\
&B_{51} = -\frac{11}{54}\ ,\ B_{52} = \frac{5}{2}\ ,\ B_{53} = -\frac{70}{27}\ ,\ B_{54} = \frac{35}{27} \\
&B_{61} = \frac{1631}{55296}\ ,\ B_{62} = \frac{175}{512}\ ,\ B_{63} = \frac{575}{13824}\ ,\ B_{64} = \frac{44275}{110592}\ ,\ B_{65} = \frac{253}{4096}
\end{aligned} \tag{3.13.7}$$

junto a

$$C_1 = \frac{37}{378}\ ,\ C_2 = 0\ ,\ C_3 = \frac{250}{621}\ ,\ C_4 = \frac{125}{594}\ ,\ C_5 = 0\ ,\ C_6 = \frac{512}{1771} \tag{3.13.8}$$

Paso adaptativo Como hemos indicado, el esquema de integración nos permite obtener fórmulas exactas hasta orden h^5. Esto quiere decir que si ejecutamos dos integraciones independientes (esto es, con distintos valores de las constantes A, B, C) para obtener dos soluciones y e y^* en cada punto, el valor absoluto de su diferencia en cada punto será del orden

$$|y - y^*|_j \propto h^5 \tag{3.13.9}$$

o de otra forma, que

$$r \equiv \frac{|y - y^*|}{h} \propto h^4 \tag{3.13.10}$$

Esta propiedad de las soluciones nos permite definir un *factor de escala* en cada punto en la forma

$$\Gamma \equiv c \cdot \left(\frac{r_{max}}{r}\right)^{1/4} \tag{3.13.11}$$

siendo r_{max} la precisión máxima recomendada en cada paso (para detectar posibles singularidades), de forma que

$$h' = \Gamma \cdot h \tag{3.13.12}$$

sea el paso corregido para la siguiente recurrencia. El factor numérico c debe ser de orden unidad, y su valor exacto no es relevante. En nuestro caso elegimos $c = 0{,}84$, y para la segunda integración podemos escoger los mismos valores para las constantes A, B, esto es, $A^* = A$, $B^* = B$, y los valores para las constantes C^* independientes de los valores C, en la forma

$$C_1^* = \frac{2825}{27648}\ ,\ C_2^* = 0\ ,\ C_3^* = \frac{18575}{48384}\ ,\ C_4^* = \frac{13525}{55296}\ ,\ C_5^* = \frac{277}{14336}\ ,\ C_6^* = \frac{1}{4} \tag{3.13.13}$$

Factor de escala Analizando la expresión del factor de escala, vemos que si la integración se comporta de forma suave, esto es, r es mucho menor que la precisión máxima el factor de escala es mayor que la unidad y podemos aplicar un paso h mayor de forma segura. En el caso contrario, si r es mayor que r_{max} estaremos integrando por encima del rango recomendado, el factor de escala será menor que la unidad, y tendremos que disminuir h. En todo caso, debemos asegurar que el factor de escala no se aleja de un cierto rango $(\Gamma_{min}, \Gamma_{max})$ de forma que fijamos el valor $\Gamma = \Gamma_{\text{mín}}$ si $\Gamma < \Gamma_{min}$, y el valor $\Gamma = \Gamma_{max}$ si $\Gamma > \Gamma_{max}$. Además debemos establecer un paso mínimo admisible h_{min} de forma que si alcanzamos o superamos este valor mínimo podemos considerar que el sistema presenta una singularidad en ese punto de integración no resoluble numéricamente, esto es, $|y - y^*|$ se mantiene finito para valores h arbitrariamente pequeños. En particular, en nuestro caso tomamos los valores generales

$$r_{max} = 10^{-6} \quad , \quad h_0 = r_{max}^{1/4} \quad , \quad h_{min} = 10^{-4} h_0 \tag{3.13.14}$$

siendo h_0 el valor inicial del paso de integración, junto con los factores de escala

$$\Gamma_{min} = \frac{1}{10} \quad , \quad \Gamma_{max} = 10 \tag{3.13.15}$$

Ejemplo. Oscilador armónico Como ejemplo, presentamos de forma gráfica el resultado de la integración de la EDO del oscilador armónico de frecuencia unidad, $\omega = 1$,

$$\dot{x} = y \quad , \quad \dot{y} = -x \tag{3.13.16}$$

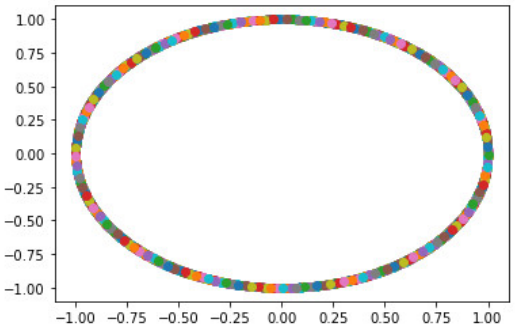
sujeto a las condiciones iniciales

$$x(0) = 1 \quad , \quad y(0) = 0 \tag{3.13.17}$$

Para este sistema de dos EDO de orden uno, el factor de escala debe definirse en la forma conjunta (para la integración de la coordenada x y la velocidad y)

$$r \equiv \frac{1}{h} \,\text{máx}\,(|x - x^*|, |y - y^*|) \quad , \quad \Gamma \equiv c \cdot \left(\frac{r_{max}}{r}\right)^{1/4} \tag{3.13.18}$$

Como muestra la figura, que representa el movimiento en el *espacio de fases* (x, y) a lo largo del tiempo $t \sim NT$ siendo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$ el periodo del oscilador, y $N \sim 100$, la integración numérica muestra una amplitud constante del movimiento, que no se alcanzaría con una integración de paso h constante.



3.14. Videoclases

Tipo	**Duración**	**Contenidos**	**Enlace**	**Notas(pdf)**
Teoría	110 mn	Secciones 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5	S.3.1–S.3.5	S.3.1–S.3.5
Ejercicios	88+22 mn	Ejercicios secciones 3.6, 3.7	S.3.6, S.3.8	S.3.6, S.3.8
Autoevaluación	16 mn	Ejercicios sección 3.8	S.3.7	S.3.7
Otros	22+20 mn	Apéndices 3.9, 3.11, 3.12	S.3.9, S.3.11	S.3.9, S.3.11

Capítulo 4

Transformaciones canónicas y Corchetes de Poisson

4.1. Definición de transformación canónica

4.1.1. Transformaciones admisibles en el espacio de fases

Transformación en el espacio de fases Dadas las variables canónicas (q, p) que definen el espacio de fases, queremos analizar el efecto que tiene una transformación de variables, digamos $(q, p) \rightarrow (Q, P)$, en la descripción del sistema dinámico que estamos estudiando. Los requisitos generales serán que la transformación sea invertible, y que pueda depender explícitamente del tiempo, esto es, tendremos las ecuaciones de transformación

$$Q = Q(q, p, t) \quad , \quad P = P(q, p, t) \tag{4.1.1}$$

junto con la transformación inversa

$$q = q(Q, P, t) \quad , \quad p = p(Q, P, t) \tag{4.1.2}$$

En general, el interés en una transformación de variables en el espacio de fases reside en obtener una descripción más simplificada del problema abordado, por ejemplo si una de las nuevas variables de hace cíclica, o si la descripción basada en las nuevas variables se hace independiente del tiempo. Como ejemplo, un posible conjunto de transformaciones serán las denominadas *transformaciones puntuales*,

$$Q = Q(q, t) \tag{4.1.3}$$

y corresponden al significado usual de una mera transformación de coordenadas, dependiente del tiempo en su caso. Puede verse que, en este caso, no existe información *a priori* sobre la transformación del momento p.

Transformaciones admisibles. Formalismo Lagrangiano Además que la transformación sea invertible, vamos a requerir que el nuevo espacio de variables (Q, P) siga definiendo un espacio de fases para el sistema analizado.
Lo vemos en el caso particular de las transformaciones puntuales anteriores, y en la que nos faltaba la mitad de la información, esto es, conocer cómo se transforma el momento. Ya que no hemos definido por ahora el ánalisis de la transformación dentro del formalismo Hamiltoniano, nos basamos en el formalismo Lagrangiano.

Una transformación de coordenadas en el espacio de configuración $q(t)$ siempre es admisible dentro del formalismo Lagrangiano, dadas sus propiedades covariantes (las ecuaciones de Euler−Lagrange mantienen su forma en todos los sistemas de coordenadas). Si queremos que tal transformación sea admisible en el espacio de fases $(q(t), p(t))$ tenemos que analizar las propiedades de transformación

del momento, definido por

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{4.1.4}$$

y su relación con el nuevo momento

$$P \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \tag{4.1.5}$$

Destacamos que aquí el Lagrangiano L tiene el mismo *valor*, aunque cambie su expresión explícita en los dos sistemas de coordenadas q y Q.

Dada entonces la transformación de coordenadas $Q = Q(q,t)$, tenemos la relación entre las velocidades generalizadas

$$\dot{Q} \equiv \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial q}\dot{q} \tag{4.1.6}$$

y por tanto la relación entre los momentos

$$P \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \equiv \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^{-1} p \tag{4.1.7}$$

Formalismo Hamiltoniano Veremos en las siguientes secciones que la relación entre los momentos para la transformación *puntual* (que así se denomina, como decimos, la transformación de coordenadas en el espacio de fases) está dada, en el formalismo Hamiltoniano, por la expresión completa

$$P = \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^{-1} p + f(q,t) \tag{4.1.8}$$

siendo $f(q,t)$ una función arbitraria de sus argumentos, que difiere de la expresión obtenida para el formalismo Lagrangiano en el último término dependiente de la función f.
La explicación de la diferencia es sencilla y puede resolverse de forma directa. Por un lado el resultado para el formalismo Hamiltoniano, por definición, como veremos, es independiente del valor del Hamiltoniano, y por tanto válido para cualquier Hamiltoniano, y sin embargo en el formalismo Lagrangiano *sólo* hemos obtenido el resultado para un Lagrangiano L dado.
Si en cambio hubieramos utilizado el Lagrangiano más general posible, descrito en la sección 2.1.2,

$$L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}\Lambda(q,t) \equiv L(q,\dot{q},t) + \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \tag{4.1.9}$$

siendo $\Lambda(q,t)$ una función arbitraria, el resultado hubiera sido efectivamente el mismo, al ser

$$P \equiv \frac{\partial\left(L + \frac{d\Lambda}{dt}\right)}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \frac{d\Lambda}{dt}}{\partial \dot{q}}\right) \equiv \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^{-1} p + \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^{-1}\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \tag{4.1.10}$$

con la identificación

$$f(q,t) \equiv \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^{-1}\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \tag{4.1.11}$$

4.1.2. Transformación canónica

Kamiltoniano K Por tanto, requerimos en el formalismo Hamiltoniano que las nuevas variables (Q,P) sean canónicas en el sentido de que exista un nuevo Hamiltoniano, digamos el *Kamiltoniano* $K(Q,P,t)$, dependiente de coordenadas (Q) y momentos (P), y posiblemente del tiempo, respecto al cual la dinámica del sistema siga siendo Hamiltoniana, o con mayor precisión, sea *Kamiltoniana*, definida por las ecuaciones de evolución

$$\dot{Q} \equiv \frac{\partial K}{\partial P} \quad , \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \tag{4.1.12}$$

Transformación canónica Además, existen dos puntos adicionales fundamentales. El primero es que la parámetro temporal no se modifica, esto es, la nueva función K tiene el mismo papel respecto a las variables (Q, P) que tenía la función H respecto a las variables (q, p). El segundo punto es que requerimos que la transformación no sólo sea aplicable a un Hamiltoniano dado, sino que sea aplicable a *cualquier* Hamiltoniano, o dicho de otra forma que la transformación sea aplicable a cualquier sistema dinámico, que quedará descrito en las nuevas variables (Q, P) independientemente del valor de su Hamiltoniano. En este sentido, la transformación, así definida, tiene un carácter *universal*, aplicable en todos los sistemas dinámicos.
La transformación de variables en el espacio de fases que cumple estos requisitos se denomina *transformación canónica*. Sería la extensión matemática de la transformación de coordenadas definida para la física Newtoniana, que sería una transformación *universal* aplicable a cualquier sistema físico Newtoniano. La diferencia estriba que en el caso Newtoniano sólo requerimos que las ecuaciones de la transformación sean invertibles.

Principio generalizado de Hamilton. Ecuación de transformación Dado este caracter universal, para deducir la expresión general de la transformación canónica deberemos utilizar el principio universal que rige la evolución de todo sistema dinámico, independientemente del valor de su Hamiltoniano. Tal principio universal es el denominado *Principio generalizado de Hamilton*, descrito en la sección 3.4.
Este Principio establece que las ecuaciones de Hamilton, que rigen la evolución temporal de las variables canónicas del sistema, pueden derivarse el Principio de Acción estacionaria, en su versión *generalizada*

$$\delta \int (p dq - H dt) = 0 \quad \text{ó} \quad \delta \int (p\dot{q} - H)\, dt = 0 \tag{4.1.13}$$

Por tanto, al pasar a las nuevas variables (Q, P) la evolución del sistema también debe estar sujeta a este Principio, expresado en las variables correspondientes

$$\delta \int \left(P\dot{Q} - K \right) dt = 0 \tag{4.1.14}$$

Al no tener más ecuaciones que considerar, la transformación será *correcta* si se produce la equivalencia

$$(q, p) \Leftrightarrow (Q, P) \quad \longleftrightarrow \quad \delta \int (p\dot{q} - H)\, dt = 0 \Leftrightarrow \delta \int \left(P\dot{Q} - K \right) dt = 0 \tag{4.1.15}$$

Teniendo en cuenta que la integración en la acción se va a producir sobre el mismo parámetro temporal el resultado variacional será el mismo si se satisface

$$p\dot{q} - H \equiv P\dot{Q} - K + \frac{dF}{dt} \tag{4.1.16}$$

siendo F es una función dada de las variables canónicas, ya que entonces se satisface

$$\delta \int (p\dot{q} - H)\, dt \equiv \delta \int \left(P\dot{Q} - K + \frac{dF}{dt} \right) dt = \delta \int \left(P\dot{Q} - K \right) dt + \delta \int \cancelto{0}{dF} \tag{4.1.17}$$

El último término resulta idénticamente nulo

$$\delta \int dF \equiv \delta(F(t_2) - F(t_1)) \equiv 0 \tag{4.1.18}$$

siendo $F(t_1), F(t_2)$ los valores de la función F en los puntos frontera t_1, t_2, ya que en el cálculo variacional por definición no cambian, esto es, las trayectorias variadas $(q(t) + \delta q(t), p(t) + \delta p(t))$ satisfacen en la frontera $\delta q = 0$, $\delta p = 0$.

Función generadora F La cantidad clave que caracteriza una transformación canónica es la función F, denominada *función generadora*. Analizando la ecuación que constituye su definición *funcional*

$$p\dot{q} - H \equiv P\dot{Q} - K + \frac{dF}{dt} \tag{4.1.19}$$

vemos que sólo será posible relacionar los Hamiltonianos H, K entre sí de forma funcional, esto es, sin entrar en la dinámica particular del sistema, definida por las derivadas temporales $\dot{q}, \dot{Q}$, si la función F depende de las coordenadas (o momentos en su caso) de ambas descripciones. Sin entrar en detalle, que forma parte de la siguiente sección, explicamos de forma breve el caso más sencillo, cuando $F = F(q, Q, t)$. La cuestión fundamental es que en este caso su derivada temporal está dada por la expresión funcional

$$F = F(q, Q, t) \Rightarrow \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial Q}\dot{Q} \tag{4.1.20}$$

de forma que la definición funcional de la transformación canónica se expresaría en la forma

$$p\dot{q} - H - \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} \equiv P\dot{Q} + \frac{\partial F}{\partial Q}\dot{Q} - K + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{4.1.21}$$

Esta dependencia con las velocidades generalizadas en ambos conjuntos permite identificar término a término las distintas ecuaciones de la transformación canónica.

Transformaciones de Legendre. Tipos de función generadora En este ejemplo anterior hemos definido por simplicidad una función generadora dependiente de q, Q y posiblemente del tiempo, pero no es el único caso posible. De hecho, si lo que necesitamos es definir un término de la forma dF/dt, dependiente de las coordenadas y momentos, y del tiempo, y según hemos visto anteriormente, con una variable que pertenece a las nuevas variables (Q, P) y otra variable a las variables antiguas (q, p), podremos tener en principio el siguiente conjunto de variables de la función generadora F

$$(q, Q, t) \quad , \quad (q, P, t) \quad , \quad (p, Q, t) \quad , \quad (p, P, t) \tag{4.1.22}$$

Retomemos ahora las características básicas de la transformación de Legendre para una función de dos variables (véase el ejercicio 3.9.2), y consideremos que la representación de la transformación canónica es *única*, en el sentido de que los cuatro pares de variables anteriores darán lugar descripciones equivalentes para la misma función generadora. Entonces, podemos ver por ejemplo que respecto a los dos casos

$$(q, Q, t) \quad , \quad (q, P, t) \tag{4.1.23}$$

que comparten la misma variable q, debe existir una transformación de Legendre que relacione entre sí las representaciónes de la función generadora en cada caso. Denominemos, utilizando la notación estándar, las cuatro representaciones o *tipos* de la función generadora

$$F_1 \equiv F(q, Q, t) \quad , \quad F_2 \equiv F(q, P, t) \quad , \quad F_3 \equiv F(Q, p, t) \quad , \quad F_4 \equiv F(p, P, t) \tag{4.1.24}$$

Aplicando esta notación, analizamos ahora cuál debe ser, por ejemplo, la transformación de Legendre que relaciona F_1 y F_2, y que cambia la variable Q por P manteniendo la variable q. Si revisamos lo explicado en el ejercicio 3.9.2, vemos que deberá ser de la forma

$$F_2(q, P, t) \equiv QP + F_1(q, Q, t) \tag{4.1.25}$$

equivalente al caso ahí tratado,

$$g(p, y) = px - f(x, y) \tag{4.1.26}$$

Vemos que aparece un signo $+$ delante de F_1 en comparación con el caso tratado en el ejercicio 3.9.2. Ambas transformaciones de Legendre son válidas, y la diferencia reside en que se exigía que

$g(p, y)$ fuera convexa y de ahí la presencia del signo negativo, mientras que ahora no existe ninguna condición geométrica que deba cumplir la función generadora, y prevalece entonces la necesidad de tener la misma ecuación para la transformación del Hamiltoniano, independiente del tipo de función generadora elegido, como veremos en la siguiente sección, por lo que es necesario tener este signo positivo.
Posteriormente entraremos en más detalle en el contenido de esta transformación. Lo relevante ahora es notar que la definición de función generadora para esta segunda representación quedaría en la forma

$$p\dot{q} - H \equiv P\dot{Q} - K + \frac{dF_2}{dt} = P\dot{Q} - K + \frac{dF_1}{dt} + \frac{d\,(PQ)}{dt} \tag{4.1.27}$$

4.2. Ecuaciones de la transformación canónica

Resumimos lo que tenemos hasta ahora. La dinámica Hamiltoniana de un sistema dinámico, esto es, que evoluciona de acuerdo con las ecuaciones de Hamilton, se preserva bajo las denominadas transformaciones canónicas, que son transformaciones en el espacio de fases $(q, p) \rightarrow (Q, P)$. Estas transformaciones están definidas en términos de una única función, la función generadora F, que depende de una de las variables antiguas q ó p, y de una de las variables nuevas Q ó P, y posiblemente del tiempo, y que satisface de forma genérica

$$p\dot{q} - H = P\dot{Q} - K + \frac{dF}{dt} \tag{4.2.1}$$

Ecuaciones de la transformación Describimos ahora el procedimiento para obtener las ecuaciones de la transformación propiamente dicha, que nos permitirá obtener F si conocemos las ecuaciones, o obtener las ecuaciones si conocemos o prefijamos F. Ya que hablamos de cuatro representaciones o tipos para la misma función generadora, es suficiente con que tratemos el caso más sencillo, para $F_1 \equiv F(q, Q, t)$. Para este tipo de dependencia funcional, la ecuación anterior, que define la transformación canónica, se desarrolla en la forma

$$p\dot{q} - H = P\dot{Q} - K + \frac{dF_1}{dt} \Rightarrow\ p\dot{q} - H = P\dot{Q} - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F_1}{\partial Q}\dot{Q} \tag{4.2.2}$$

Esta igualdad (esto es, la invariancia dinámica del sistema) se debe satisfacer para cualquier movimiento del sistema y para cualquier Hamiltoniano que gobierne su evolución temporal. Por ello, la equivalencia funcional entre el lado izquierdo y el lado derecho debe ser completa. Esto significa que queda desdoblada en las siguientes relaciones, que podemos denominar *ecuaciones de la transformación canónica*

$$p\dot{q} \equiv \frac{\partial F_1}{\partial q}\dot{q} \Rightarrow\ p \equiv \left(\frac{\partial F_1}{\partial q}\right)_{Q,t} \tag{4.2.3}$$

$$0 = P\dot{Q} + \frac{\partial F_1}{\partial Q}\dot{Q} \Rightarrow\ P \equiv -\left(\frac{\partial F_1}{\partial Q}\right)_{q,t} \tag{4.2.4}$$

y finalmente

$$-H = -K + \frac{\partial F_1}{\partial t} \Rightarrow\ K \equiv H + \left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\right)_{Q,q} \tag{4.2.5}$$

Las dos primeras ecuaciones nos dan las relaciones funcionales entre las nuevas variables canónicas (Q, P) y las variables antiguas (q, p), mientras que la tercera ecuación define el Kamiltoniano para las nuevas variables canónicas.

Determinación de F La aplicación de las ecuaciones de la transformación canónica es muy variada. En primer lugar, si conocemos que una transformación dada $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ es canónica, podemos obtener la función generadora que la representa, en este caso F_1,. Para ello, el método es directo. Para integrar F_1 utilizando las dos primeras ecuaciones debemos en primer lugar invertir

la transformación canónica para obtener las dependencias funcionales necesarias, de las variables *dependientes* p, P respecto a las variables *independientes* (q, Q) de la función generadora:

$$p = p(q, Q, t) \quad , \quad P = P(q, Q, t) \tag{4.2.6}$$

relaciones que están bien definidas ya que por definición la transformación canónica debe ser invertible.
A partir de aquí la integración es directa, en la secuencia por partes

$$p(q, Q, t) \equiv \left(\frac{\partial F_1}{\partial q}\right)_{Q,t} \Rightarrow \; F_1(q, Q, t) = \int p(q, Q, t) dq + f(Q, t) \tag{4.2.7}$$

siendo $f(Q, t)$ una función auxiliar arbitraria que debe determinarse posteriormente. De forma análoga, utilizando la segunda ecuación obtenemos el resultado complementario

$$P(q, Q, t) \equiv -\left(\frac{\partial F_1}{\partial Q}\right)_{q,t} \Rightarrow \; F_1(q, Q, t) = \int P(q, Q, t) dQ + g(q, t) \tag{4.2.8}$$

Uniendo ahora los dos resultados de esta integración parcial, resultados que son complementarios en el sentido de que definen de forma unívoca las funciones arbitrarias f y g, obtenemos la expresión completa de la función generadora F_1 que da lugar a la transformación canónica de partida. Y una vez obtenida F_1, y en función de cada Hamiltoniano del sistema que esté asignado a las variables originales, obtenemos el Kamiltoniano para las nuevas variables

$$K(Q, P, t) \equiv H(q, p, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{4.2.9}$$

Para tener esta identificación es necesario aplicar en el lado derecho la transformación canónica mediante las expresiones inversas

$$q = q(Q, P, t) \quad , \quad p = p(Q, P, t) \tag{4.2.10}$$

Condiciones necesarias para la función generadora Por otro lado, si definimos a priori cuál será la forma funcional de la función generadora $F_1(q, Q, t)$, podemos utilizar las ecuaciones de la transformación canónica para determinar la transformación canónica correspondiente, expresada en la forma

$$Q = Q(q, p, t) \quad , \quad P = P(q, p, t) \tag{4.2.11}$$

Pero no todas las funciones de partida de q, Q y t son admisibles como funciones generadoras $F_1(q, Q, t)$. Para serlo es necesario que las ecuaciones de la transformación determinen de forma implícita la transformación anterior. En particular, será necesario que la ecuación

$$p(q, Q, t) \equiv \left(\frac{\partial F_1}{\partial q}\right)_{Q,t} \tag{4.2.12}$$

determine la función $Q = Q(q, p, t)$ de forma implícita. De acuerdo con el teorema de la función implícita, esto será así cuando

$$\frac{\partial p}{\partial Q} \neq 0 \Rightarrow \; \frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q} \neq 0 \tag{4.2.13}$$

Por ejemplo, una función del tipo $F = f(q) + g(Q)$ no puede ser generadora del tipo 1, ya que de la primera ecuación de la transformación

$$p \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_{Q,t} = f'(q) \tag{4.2.14}$$

no se deduce ninguna relación funcional $Q = Q(q, p, t)$. La segunda ecuación de la transformación canónica no añade ninguna condición adicional, ya que nos da directamente la relación funcional $P = P(q, p, t)$ cuando aplicamos $Q = Q(q, p, t)$ tras la derivación parcial.

Diferencial exacta dF Una forma alternativa de obtener la función generadora F_1 a partir de la transformación canónica, especialmente útil cuando la transformación no depende explícitamente del tiempo, consiste en utilizar el criterio de la *diferencial exacta* dF. Por diferencial exacta se entiende la diferencial dF tal que

$$\int_1^2 dF = F(2) - F(1) \tag{4.2.15}$$

siendo F la función asociada, lo que en la teoría de la integración se expresa diciendo que dF no necesita un factor integrante. Obviamente si conocemos la expresión de la función F, dF siempre será una diferencial exacta. El uso que hacemos aquí es el recíproco, si sabemos que debe ser una diferencial exacta, extraemos el valor de la función. En particular, si $p = p(q, Q)$ y $P = P(q, Q)$ son las relaciones dadas por la transformación canónica de tipo 1, recordando que tratamos el caso independiente del tiempo, la diferencial dF_1 de la función generadora se obtiene de la expresión general

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial Q}\frac{dQ}{dt} \quad , \quad p \equiv \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad , \quad P \equiv -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \tag{4.2.16}$$

en la forma diferencial

$$dF_1 = pdq - PdQ \equiv p(q, Q)dq - P(q, Q)dQ \tag{4.2.17}$$

Como ejemplo sencillo, para la transformación canónica que da lugar a las relaciones

$$p = f'(q)g(Q) \quad , \quad P = -f(q)g'(Q) \tag{4.2.18}$$

siendo f, g funciones arbitrarias de sus argumentos, obtenemos

$$dF_1 = f'(q)g(Q)dq + f(q)g'(Q)dQ \equiv d\left(f(q)g(Q)\right) \tag{4.2.19}$$

de lo que se deduce que la función generadora tiene la expresión

$$F_1(q, Q) = f(q)g(Q) \tag{4.2.20}$$

El uso de la diferencial dF también resulta útil, de nuevo cuando la transformación canónica no depende explícitamente del tiempo, para relacionar entre sí la representación de los distintos tipos de la función generadora. Recordando en particular la relación entre los tipos 1 y 2

$$F_2(q, P) = PQ + F_1(q, Q) \tag{4.2.21}$$

podemos obtener de forma directa la diferencial dF_2 conocida la diferencial dF_1, en la forma

$$dF_2 = d(PQ) + dF_1 = PdQ + QdP + pdq - PdQ \equiv pdq + QdP \tag{4.2.22}$$

expresión a partir de la cual podemos incluso obtener las relaciones para este tipo de transformación, con $F_2 \equiv F(q, P)$,

$$p(q, P) \equiv \left(\frac{\partial F_2}{\partial q}\right)_Q \quad , \quad Q(q, P) \equiv \left(\frac{\partial F_2}{\partial P}\right)_q \tag{4.2.23}$$

4.3. Tipos de transformaciones canónicas

Definiciones Resumimos aquí los cuatro tipos de representación de la función generadora, junto con la transformación de Legendre que liga la función dada con la función de tipo F_1 de referencia, y las ecuaciones resultantes para la transformación canónica.

4.3.1. Tipo 1, $F_1 \equiv F(q, Q, t)$

- Variables independientes q, Q
- Variables dependientes p, P
- Transformación canónica

$$p = p(q, Q, t) \quad , \quad P = P(q, Q, t) \tag{4.3.1}$$

- Ecuaciones de la transformación canónica

$$p \equiv \left(\frac{\partial F_1}{\partial q}\right)_Q \quad , \quad P \equiv -\left(\frac{\partial F_1}{\partial Q}\right)_q \tag{4.3.2}$$

- Transformación canónica inversa

$$P \equiv -\left(\frac{\partial F_1}{\partial Q}\right)_q \Longrightarrow \; q = q(Q, P, t) \tag{4.3.3}$$

$$p \equiv \left(\frac{\partial F_1}{\partial q}\right)_Q \Longrightarrow \; p = p(q(Q, P, t), Q, t) \equiv p(Q, P, t) \tag{4.3.4}$$

- Kamiltoniano

$$K(Q, P, t) \equiv H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_1(q(Q, P, t), Q, t)}{\partial t} \tag{4.3.5}$$

4.3.2. Tipo 2, $F_2 \equiv F(q, P, t)$

- Variables independientes q, P
- Variables dependientes p, Q
- Transformación canónica

$$p = p(q, P, t) \quad , \quad Q = Q(q, P, t) \tag{4.3.6}$$

- Transformación de Legendre $F_2 \equiv F_1 + QP$

$$F_2(q, P, t) \equiv F_1(q, Q(q, P, t), t) + Q(q, P, t)P \tag{4.3.7}$$

- Ecuaciones de la transformación canónica

$$p \equiv \left(\frac{\partial F_2}{\partial q}\right)_P \quad , \quad Q \equiv \left(\frac{\partial F_2}{\partial P}\right)_q \tag{4.3.8}$$

- Transformación canónica inversa

$$Q \equiv \left(\frac{\partial F_2}{\partial P}\right)_q \Longrightarrow \; q = q(Q, P, t) \tag{4.3.9}$$

$$p \equiv \left(\frac{\partial F_2}{\partial q}\right)_P \Longrightarrow \; p = p(q(Q, P, t), P, t) \equiv p(Q, P, t) \tag{4.3.10}$$

- Kamiltoniano

$$K(Q, P, t) \equiv H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_2(q(Q, P, t), P, t)}{\partial t} \tag{4.3.11}$$

4.3.3. Tipo 3, $F_3 \equiv F(p, Q, t)$

- Variables independientes p, Q
- Variables dependientes q, P
- Transformación canónica

$$q = q(p, Q, t) \quad , \quad P = P(p, Q, t) \tag{4.3.12}$$

- Transformación de Legendre $F_3 \equiv F_1 - qp$

$$F_3(p, Q, t) \equiv F_1(q(p, Q, t), Q, t) - q(p, Q, t)p \tag{4.3.13}$$

- Ecuaciones de la transformación canónica

$$q \equiv -\left(\frac{\partial F_3}{\partial p}\right)_Q \quad , \quad P \equiv -\left(\frac{\partial F_3}{\partial Q}\right)_p \tag{4.3.14}$$

- Transformación canónica inversa

$$P \equiv -\left(\frac{\partial F_3}{\partial Q}\right)_p \Longrightarrow \; p = p(Q, P, t) \tag{4.3.15}$$

$$q \equiv -\left(\frac{\partial F_3}{\partial p}\right)_Q \Longrightarrow \; q = q(p(Q, P, t), Q, t) \equiv q(Q, P, t) \tag{4.3.16}$$

- Kamiltoniano

$$K(Q, P, t) \equiv H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_3(p(Q, P, t), Q, t)}{\partial t} \tag{4.3.17}$$

4.3.4. Tipo 4, $F_4 \equiv F(p, P, t)$

- Variables independientes p, P
- Variables dependientes q, Q
- Transformación canónica

$$q = q(p, P, t) \quad , \quad Q = Q(p, P, t) \tag{4.3.18}$$

- Transformación de Legendre $F_4 \equiv F_1 - qp + QP$

$$F_4(p, P, t) \equiv F_1(q(p, P, t), Q(p, P, t), t) - q(p, P, t)p + Q(p, P, t)P \tag{4.3.19}$$

- Ecuaciones de la transformación canónica

$$q \equiv -\left(\frac{\partial F_4}{\partial p}\right)_P \quad , \quad Q \equiv \left(\frac{\partial F_4}{\partial P}\right)_p \tag{4.3.20}$$

- Transformación canónica inversa

$$Q \equiv \left(\frac{\partial F_4}{\partial P}\right)_p \Longrightarrow \; p = p(Q, P, t) \tag{4.3.21}$$

$$q \equiv -\left(\frac{\partial F_4}{\partial p}\right)_P \Longrightarrow \; q = q(p(Q, P, t), P, t) \equiv q(Q, P, t) \tag{4.3.22}$$

- Kamiltoniano

$$K(Q, P, t) \equiv H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_4(p(Q, P, t), P, t)}{\partial t} \tag{4.3.23}$$

4.3.5. Ejemplos

Consideraciones básicas al elegir el tipo de función generadora De forma general, y en estos ejemplos que detallamos, aplicamos las siguientes consideraciones básicas a la hora de elegir la función generadora que representa la transformación canónica:

(1) Dada la transformación canónica, debemos elegir, siguiendo criterios prácticos, cuál es el conjunto de variables independientes y cuál será entonces el conjunto de variables dependientes.

(2) En función de esta elección quedará definido el tipo de función generadora, y cuáles son las ecuaciones que representan la transformación canónica.

(3) En cualquier caso, es importante destacar que no siempre se puede asociar a una transformación canónica dada una función generadora de cada tipo. Algunas representaciones pueden no ser admisibles para la transformación dada.

Ejemplo. Transformación identidad Es la transformación canónica más sencilla, y está dada por las ecuaciones de transformación

$$Q = q \quad , \quad P = p \quad , \quad K = H \tag{4.3.24}$$

Dada esta transformación vemos que las variables independientes pueden elegirse como (q, P) ó (p, Q), y en ese caso respectivamente (p, Q) ó (q, P) serán las variables dependientes. En el primer

caso tenemos una función generadora de tipo 2, y en el segundo caso una función generadora de tipo 3, y ambas serán independientes del tiempo, al ser

$$K \equiv H + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv H \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{4.3.25}$$

Obtenemos entonces su expresión explícita F_2 y F_3 siguiendo el procedimiento estándar, obteniendo:

- **Tipo 2** $F(q, P)$

$$Q \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)_q = q \Longrightarrow F = qP + f(q) \tag{4.3.26}$$

siendo $f(q)$ una función arbitraria. Para obtener su valor analizamos la segunda ecuación de la transformación, que debe dar el valor correcto $p = P$

$$p \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_P = \left(\frac{\partial \left(qP + f(q)\right)}{\partial q}\right)_P = P + f'(q) \tag{4.3.27}$$

que nos lleva a $f'(q) \equiv 0$, luego $f(q)$ es una constante, que podemos tomar arbitrariamente igual a 0. Con ello, la función generadora de tipo 2 para la transformación canónica identidad está dada por

$$F_2 \equiv F(q, P) = qP \tag{4.3.28}$$

- **Tipo 3** $F(p, Q)$

$$P \equiv -\left(\frac{\partial F}{\partial Q}\right)_p = p \Longrightarrow F = -pQ + f(p) \tag{4.3.29}$$

siendo $f(p)$ una función arbitraria. Para obtener su valor analizamos la segunda ecuación de la transformación, que debe dar el valor correcto $q = Q$

$$q \equiv -\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_Q = -\left(\frac{\partial \left(-pQ + f(p)\right)}{\partial p}\right)_Q = Q - f'(p) \tag{4.3.30}$$

que nos lleva a $f'(p) \equiv 0$, luego $f(p)$ es una constante, que podemos tomar arbitrariamente igual a 0. Con ello, la función generadora de tipo 3 para la transformación canónica identidad está dada por

$$F_3 \equiv F(p, Q) = -pQ \tag{4.3.31}$$

- **Transformación de Legendre** Habiendo obtenido sus expresiones explícitas podemos aprovechar el análisis para verificar la transformación de Legendre que relaciona ambos tipos. La relación no es directa, pero si partimos como referencia la función generadora de tipo 1, tenemos por ambas partes

$$F_2 \equiv F_1 + QP \quad , \quad F_3 \equiv F_1 - qp \tag{4.3.32}$$

llegamos al resultado

$$F_3 \equiv F_2 - QP - qp \tag{4.3.33}$$

y al ser $Q = q$, $P = p$ y $F_2 = qP$, obtenemos de esta forma el resultado correcto para F_3, dado que

$$F_3 \equiv Qp - Qp - Qp = -pQ \tag{4.3.34}$$

Ejemplo. Transformación puntual Recuperamos la transformación de coordenadas

$$Q = Q(q,t) \tag{4.3.35}$$

que en el formalismo Hamiltoniano se denomina transformación *puntual*. Ésta es la única relación que define esta transformación, y por tanto no tenemos referencia alguna a priori sobre la ley de transformación de los momentos.
Sí sabemos que ambas coordenadas q, Q no pueden ser variables independientes o variables dependientes simultáneamente ya que existe una relación funcional entre ellas. Por esto, las transformaciones admisibles serán de tipo 2 ó de tipo 3, quedando descartadas las transformaciones de tipo 1 y tipo 4. Analizamos solamente el resultado para el tipo 2, que es el más directo, siendo el procedimiento totalmente análogo para obtener el tipo 3.

- **Tipo 2** $F(q,P)$

$$Q \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)_q \Longrightarrow\ F = PQ(q,t) + f(q) \tag{4.3.36}$$

siendo $f(q)$ una función arbitraria, y éste es el único resultado a deducir. Y con ello, la transformación de los momentos, una vez obtenida la expresión general de F, queda definida por la segunda ecuación de la transformación

$$p \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_P = \left(\frac{\partial \left(PQ(q,t) + f(q)\right)}{\partial q}\right)_P = \frac{\partial Q}{\partial q}P + f'(q) \tag{4.3.37}$$

ó en forma inversa

$$P = \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^{-1} p - \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^{-1} f'(q) \tag{4.3.38}$$

que es el resultado presentado, para este tipo de transformación, en la sección introductoria 4.1.1.

- **Comentario relativo a las transformaciones puntuales** Hemos visto que son transformaciones del tipo

$$Q = Q(q,t) \tag{4.3.39}$$

y tienen el siguiente efecto:

(1) *Física Newtoniana* Bajo este cambio de coordenadas la ley de movimiento se modifica en la forma

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \Longrightarrow\ \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{a}_I \tag{4.3.40}$$

siendo $\boldsymbol{a}_I$ la aceleración inercial que se produce cuando el sistema está ligado a un sistema de referencia móvil.

(2) *Formalismo Lagrangiano* En este caso, bajo el cambio de coordenadas tenemos

$$\delta \int L dt = 0 \iff \delta \int L' dt = 0 \tag{4.3.41}$$

siendo L' la expresión del Lagrangiano en el nuevo sistema de coordenadas. Al ser L por definición una cantidad escalar, existe una invariancia covariante y las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Euler−Lagrange) mantienen su forma en todos los sistemas de coordenadas.

En estos dos formalismos no existe restricción sobre el sistema de coordenadas utilizado, salvo que represente de forma *completa* el movimiento del sistema. Además se exige que las transformaciones sean invertibles. En todo caso, el sistema físico no cambia, y es la perspectiva del observador (su sistema de referencia) la que cambia.

(3) *Formalismo Hamiltoniano* Se extiende el significado de transformación de coordenadas y pasa a ser transformación de las variables canónicas. El sistema mecánico sí cambia bajo una transformación canónica, pero el formalismo Hamiltoniano demuestra que todos los sistemas mecánicos son equivalentes. Sólo existe una restricción, que la transformación tenga el carácter de *canónica*, esto es, se exige que las nuevas variables también representen de forma *completa* el movimiento del sistema en el espacio de fases.

4.3.6. Ejemplos adicionales

En los ejemplos a continuación se considera que la función generadora está dada, y se quiere obtener la transformación canónica que genera. Un aspecto fundamental aquí es que las funciones generadoras aceptables, esto es, las que no generan una transformación singular, mal definida, *siempre* generan una transformación canónica, y por tanto *siempre* tienen una interpretación geométrica, en este caso, en el espacio de fases del sistema.

$F_1 = F(q, Q) = qQ$ Se trata de una función F independiente del tiempo, y por tanto que conserva el Hamiltoniano del sistema, esto es,

$$K \equiv H + \frac{\partial F}{\partial t} = H \tag{4.3.42}$$

Además las ecuaciones de transformación para las variables dependientes (p, P)

$$p \equiv \frac{\partial F}{\partial q} = Q \quad , \quad P \equiv -\frac{\partial F}{\partial Q} = -q \tag{4.3.43}$$

evidencian que la transformación canónica generada consiste en el *intercambio* de las variables canónicas que podemos representar en la forma

$$(q, p) \rightarrow \ (p, -q) \tag{4.3.44}$$

$F_1 = F(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q$ De nuevo tenemos una función F independiente del tiempo, de forma que el Hamiltoniano se conserva bajo la transformación canónica

$$K \equiv H + \frac{\partial F}{\partial t} = H \tag{4.3.45}$$

Además, de las ecuaciones de transformación para las variables dependientes (p, P)

$$p \equiv \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q \cot Q \quad , \quad P \equiv -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2} q^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^2 Q} \tag{4.3.46}$$

se extrae la transformación canónica

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \operatorname{sen} Q \quad , \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \tag{4.3.47}$$

Para obtener la interpretación geométrica de esta transformación, eliminamos la variable Q en las relaciones anteriores, lo que nos lleva a

$$\frac{1}{2} m\omega^2 q^2 + \frac{p^2}{2m} = P\omega \tag{4.3.48}$$

lo que indica que cada valor constante de P representa una elipse[1] en el espacio de fases original. Y respecto a la coordenada Q representa el ángulo formado por el eje p y el punto sobre la trayectoria elíptica, lo que podríamos denominar variable angular sobre la elipse ó *circulación*

[1] Recordemos que la elipse en el plano está representada por la ecuación

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \tag{4.3.49}$$

en este caso de semiejes A y B, y centro en el origen.

Aplicación. Oscilador armonico Dada la representación geométrica de esta función generadora, resultará útil aplicar esta transformación canónica al problema del oscilador armónico unidimensional, de frecuencia ω, definido por el Hamiltoniano

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{4.3.50}$$

que es un cantidad conservada, y es igual a la energía del sistema, al ser

$$H \equiv T + V \equiv E = \text{cte} \tag{4.3.51}$$

Concretamente, podemos ver que con la aplicación de la transformación canónica a este problema, la conservación de la energía pasará a ser la conservación de la nueva variable canónica P, lo que supone una simplificación relevante en la descripción dinámica del sistema.

• Realizando el análisis paso a paso, vemos que con la transformación canonica independiente del tiempo

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\cos Q \quad , \quad p = \sqrt{2m\omega P}\,\text{sen}\, Q \tag{4.3.52}$$

el nuevo Hamiltoniano tiene el valor

$$K(Q,P) \equiv H(q(Q,P), p(Q,P)) = \omega P \tag{4.3.53}$$

y vemos así que la nueva variable canónica es una coordenada cíclica. De esta forma, las nuevas ecuaciones de Hamilton están dadas por

$$\dot{Q} \equiv \frac{\partial K}{\partial P} = \omega \quad , \quad \dot{P} \equiv -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \tag{4.3.54}$$

con la solución

$$Q(t) = Q(0) + \omega t \quad , \quad P(t) = \frac{E}{\omega} = \text{cte} \tag{4.3.55}$$

• Cuando hablamos de una simplificación en la resolución del problema nos referimos de forma mayoritaria a la obtención de una dinámica más sencilla de resolver (en este caso, con una coordenada cíclica), y a la posterior obtención de la ley de movimiento del sistema original utilizando únicamente la transformación canónica.

• La primera parte ya está realizada obteniendo la ley de movimiento para las nuevas variables canónicas

$$Q(t) = Q(0) + \omega t \equiv \omega t + \phi \quad , \quad P(t) = P(0) \equiv I \tag{4.3.56}$$

donde hemos introducido dos constantes I, ϕ, con un significado físico por determinar.
La segunda parte consiste en introducir esta solución en la transformación canónica para obtener a partir de $(Q(t), P(t))$ la solución para $(q(t), p(t))$ en las variables canónicas originales. Obtenemos de esta forma la ley de movimiento

$$q(t) = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\cos(\omega t + \phi) \quad , \quad p(t) = \sqrt{2Im\omega}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi) \tag{4.3.57}$$

• Recordando la ley del movimiento de este oscilador armónico

$$q(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad , \quad p \equiv m\dot{q} = -mA\omega\,\text{sen}\,(\omega t + \phi) \tag{4.3.58}$$

vemos que el significado físico de la cantidad ϕ, anteriormente introducida, es ser la fase inicial del movimiento, mientras que la cantidad I representa el valor

$$I = \frac{E}{\omega} \tag{4.3.59}$$

Variables de acción−ángulo Este resultado obtenido para el oscilador armónico, esto es, la descripción del movimiento en función de dos constantes, $I \equiv P, \phi \equiv Q_0$, es extrapolable a cualquier movimiento periódico. En particular, cuando la variable canónica satisface

$$P \equiv \frac{E}{\omega} = \frac{H}{\omega} \tag{4.3.60}$$

recibe la denominación de *variable de acción*[1] mientras que si la variable canónica satisface

$$\dot{Q} = \omega \Rightarrow \; Q = \omega t + \phi \tag{4.3.61}$$

Q recibe la denominación de *variable de ángulo*. Uniendo los dos resultados relativos al problema del oscilador armónico, podemos hablar de que el oscilador ha quedado descrito mediante un conjunto de variables de *acción−ángulo*.
Y por extensión cuando realizamos este tipo de transformación canónica, decimos que hemos aplicado el *método de la variable acción−ángulo*. De todo ello tratamos específicamente y en detalle para los movimientos periódicos en general en la sección 5.6.

4.4. Transformaciones canónicas infinitesimales

La mayor utilidad de las transformaciones infinitesimales reside en poder analizar, de forma sencilla, las *simetrías* de un sistema, en su sentido más amplio. Por ello, el contenido de esta sección está directamente relacionado, guardando las distancias entre un ámbito específico y un ámbito más general, con el análisis de las simetrías al que se dedica integramente el capítulo 13. En particular, son interesantes en este punto las secciones 13.2, 13.5 y 13.6 de ese capítulo.

4.4.1. Propiedades de grupo de las transformaciones canónicas

El conjunto de las transformaciones canónicas admisibles, que no dan lugar a una transformación singular, tiene estructura de *grupo de transformaciones*, dado que

(1) Existe la transformación identidad, $Q = q$, $P = p$. En particular esta transformación está generada por la función generadora $F_2 = qP$ de tipo 2, ó $F_3 = -pQ$ de tipo 3, como hemos visto en la sección 4.3.5.

(2) Existe una transformación inversa para cada transformación canónica, y además esta inversa también es transformación canónica, ya que hemos exigido que las transformaciones en el espacio de fases sean invertibles.

(3) La aplicación sucesiva de dos transformaciones canónicas es una transformación canónica, y además se satisface el producto asociativo, que podemos representar por ejemplo por la secuencia $(F_1 F_2)\, F_3 = F_1\, (F_2 F_3)$.

Grupo paramétrico En numerosas ocasiones, la transformación canónica, por ejemplo una rotación en el espacio de fases, dependerá de un parámetro ε, en este ejemplo el ángulo de giro. De esta forma tendremos una transformación canónica por cada valor del parámetro, y en el caso de que el parámetro sea continuo y único, como en el caso de la rotación, hablaremos de este grupo de transformaciones canónicas uniparámetrico.

4.4.2. Transformaciones infinitesimales. Generadores

Transformación infinitesimal Cuando las transformaciones canónicas formen un grupo uniparamétrico podremos definir la denominada *transformación infinitesimal* como aquella que corresponde a un valor del parámetro muy cercano al valor del parámetro que define la

[1] El nombre específico de *acción* proviene del hecho que la cantidad I puede determinarse también mediante la integral habitual de acción, $I \equiv \oint p dq$, esta vez, sobre un periodo completo del movimiento. Véase la sección completa 5.6.

transformación identidad. Esto es, la transformación infinitesimal es una transformación muy cercana a la transformación identidad. Si tomamos por simplicidad el valor $\varepsilon = 0$ para la transformación identidad, la transformación infinitesimal corresponderá a un valor $\varepsilon \to 0$.

Generador de la transformación infinitesimal Como todo grupo uniparamétrico, el grupo de transformaciones canónicas está dotado de las propiedades de los grupos de Lie (detalladas y analizadas en la sección 13.2 en el ámbito más general de las ecuaciones diferenciales, pero fácilmente extrapolables). En particular, existirá un *generador*, que denotaremos por G, que caracteriza de forma unívoca la acción de la transformación infinitesimal, y por continuidad la acción de cualquier transformación finita. Dicho de otra forma, conocido G, conoceremos el conjunto completo de las transformaciones de este grupo uniparamétrico.

Expresión explícita del generador Del mismo modo que para la transformación finita, podemos obtener las ecuaciones de transformación si conocemos la función generadora ó podemos obtener la función generadora si conocemos la transformación canónica, en el caso de los generadores:

- Podremos obtener su expresión explícita si conocemos la acción de la transformación, ó
- Podremos obtener la acción de la transformación si conocemos explícitamente su generador.

El primer paso para obtener su expresión explícita es definir la transformación identidad en la representación elegida. Lo más habitual es utilizar una representación de tipo 2, para la cual la transformación identidad está dada por

$$F_2(\varepsilon = 0) \equiv qP \tag{4.4.1}$$

donde hemos indicado expresamente que esta transformación corresponde al valor $\varepsilon = 0$ del parámetro. Si analizamos ahora la acción de la transformación para un valor $\varepsilon \to 0$, podemos considerar que la transformación identidad es el término de menor orden en ε, esto es, el término de orden 0 en ε. Y por tanto, para $\varepsilon \to 0$ definir la transformación canónica en la forma

$$F_2(\varepsilon) \equiv F(q, P, \varepsilon) \equiv qP + \varepsilon G(q, P) \tag{4.4.2}$$

de forma que el generador admite la expresión habitual en la forma de límite para la acción del grupo

$$G(q, P) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(q, P, \varepsilon) - F(q, P, 0)}{\varepsilon} \tag{4.4.3}$$

Los detalles sobre las propiedades de los generadores no son importantes aquí, y pueden encontrarlos en las secciones reseñadas[1] del capítulo 13.

Ecuaciones de la transformación infinitesimal Finalmente en términos del generador G, las ecuaciones de la transformación canónica (infinitesimal) están dadas , para la función de tipo 2, por

$$Q \equiv \frac{\partial F}{\partial P} \simeq q + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P} \tag{4.4.4}$$

$$p \equiv \frac{\partial F}{\partial q} \simeq P + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q} \tag{4.4.5}$$

Aunque las dos ecuaciones parecen del mismo orden en ε debemos tener en cuenta que en la primera aparece una derivada respecto a P, y que el propio P será igual a p más un término proporcional a ε. Por tanto, para mantener la primera ecuación en primer orden en ε, debemos substituir la derivada por su valor en orden 0 en ε, esto es, substituimos la primera ecuación por

$$Q \equiv \frac{\partial F}{\partial P} \simeq q + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p} \tag{4.4.6}$$

[1] Secciones 13.2, 13.5 y 13.6.

Ecuaciones de variación en notación simpléctica Si ahora definimos las variaciones infinitesimales de las variables canónicas en la forma

$$\delta q \equiv Q - q \quad , \quad \delta p \equiv P - p \tag{4.4.7}$$

estas variaciones están directamente relacionadas con la acción del generador G, dado que

$$\delta q = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p} \quad , \quad \delta p = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q} \tag{4.4.8}$$

y que admiten además la notación simpléctica

$$\delta \boldsymbol{\xi} = \varepsilon \; J \cdot \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\xi}} \tag{4.4.9}$$

4.5. Ejercicios resueltos

4.5.1. Transformación canónica asociada al cambio de Lagrangiano (M)

Sabiendo que al remplazar el Lagrangiano $L(q, \dot{q}, t)$ por el Lagrangiano modificado

$$L'(q, \dot{q}, t) \equiv L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \tag{4.5.1}$$

donde $f(q, t)$ es una función arbitraria de (q, t) exclusivamente, se mantienen invariantes las ecuaciones de Lagrange,

(a) Obtenga la ley de transformación de la coordenada q, del momento p y del Hamiltoniano H que se deduce de este cambio del Lagrangiano.

(b) Demuestre que desde el punto de vista del formalismo Hamiltoniano, esta transformación de coordenadas y momentos es una transformación canónica.

(c) Obtenga una función generadora para esta transformación canónica, justificando la elección del tipo dado.

(a) Dado que en la transformación definida en el enunciado no varía la coordenada q, la primera ecuación de transformación sería directamente

$$Q = q \tag{4.5.2}$$

Aplicando ahora la definición de momento conjugado, el momento P conjugado con la variable Q, teniendo en cuenta el nuevo Lagrangiano, está dado por

$$P = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{df(q,t)}{dt} = p + \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{df(q,t)}{dt} \tag{4.5.3}$$

Dado que, aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{df(q,t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.5.4}$$

tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{df(q,t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q} \tag{4.5.5}$$

y por tanto, la relación entre momentos puede escribirse

$$P = p + \frac{\partial f(q,t)}{\partial q} \tag{4.5.6}$$

Finalmente, el nuevo Hamiltoniano está dado por

$$H'(Q,P,t) \equiv P\dot{Q} - L' \tag{4.5.7}$$

y satisface

$$H'(Q,P,t) = p\dot{q} - L + \frac{\partial f(q,t)}{\partial q}\dot{q} - \frac{df(q,t)}{dt} = H(q,p,t) - \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.5.8}$$

(b) La transformación será canónica si la diferencia

$$dS' - dS \equiv \left(PdQ - H'dt\right) - (pdq - Hdt) \tag{4.5.9}$$

es una diferencial exacta, de forma que si se satisface el Principio de Hamilton para las variables (q,p), lo hará también para las variables (Q,P). De aquí se deduce también que si se satisfacen las ecuaciones de Hamilton para (q,p), lo harán también para (Q,P).

Evaluando la resta de diferenciales, teniendo en cuenta las relaciones obtenidas en el apartado anterior para el momento y el Hamiltoniano, encontramos

$$dS' - dS = (P-p)\,dq + \left(H - H'\right)dt = \frac{\partial f(q,t)}{\partial q}dq + \frac{\partial f}{\partial t}dt = df(q,t) \tag{4.5.10}$$

y ya que el resultado es una diferencial exacta, en este caso, la diferencial de la función f, efectivamente la transformación del enunciado es canónica.

(c) Dada la dependencia funcional de las ecuaciones de transformación, $Q = Q(q)$ y $P = P(q,p)$, sólo podremos escoger una función generadora del tipo 2 ó 3, que toman como variables independientes una coordenada y un momento, dejando como variables dependientes la restante coordenada y momento. Tomando por ejemplo, la función generadora del tipo 2, $F_2(q,P)$, se debe satisfacer conjuntamente

$$Q \equiv \left(\frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial P}\right)_q = q \quad , \quad p \equiv \left(\frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q}\right)_P = P - \frac{\partial f(q,t)}{\partial q} \tag{4.5.11}$$

cuya solución para F_2 se obtiene por integración directa, en la forma

$$F_2(q,P,t) = qP - f(q,t) \tag{4.5.12}$$

4.5.2. Transformación canónica con propiedad de simetría

Cuando se analiza un Hamiltoniano en dos dimensiones del tipo

$$H(q_1,q_2,p_1,p_2) = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + f(2q_1 + q_2) \tag{4.5.13}$$

siendo f una función arbitraria de su argumento, las coordenadas generalizadas aparecen únicamente como la suma $2q_1+q_2$, lo que parece indicar que el sistema tiene alguna simetría relacionada con ello. Para su estudio en detalle, se propone analizar las propiedades del sistema con el siguiente cambio de variables $Q_1 = 2q_1 + q_2$ y $Q_2 = q_2$.

(a) Obtenga las expresiones para una transformación de los momentos del tipo $P_1 = P_1(p_1,p_2)$ y $P_2 = P_2(p_1,p_2)$, y determine, junto con el cambio de variables, una transformación canónica para el Hamiltoniano dado.

(b) Éste es uno de esos casos en los que es claro que no es posible encontrar funciones generadoras de los cuatro tipos. Indique de cuál ó cuáles tipos no es posible encontrar ninguna función generadora, y obtenga la expresión de al menos una función generadora válida.

(c) Obtenga en este caso el nuevo Hamiltoniano $K(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$, analizando la existencia de constantes del movimiento, y resuelva las nuevas ecuaciones de Hamilton por cuadraturas.

(a) Dada la dependencia funcional de la transformación buscada, de momentos $P_i = P_i(p_j)$ y coordenadas $Q_i = Q_i(q_j)$, podemos aplicar las condiciones cruzadas (véase la sección 4.12.1) que quedan expresadas en la forma

$$\frac{\partial P_i(p_j)}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j(Q_i)}{\partial Q_i} \tag{4.5.14}$$

para los índices $i, j = 1, 2$. El segundo grupo de condiciones cruzadas que relaciona las derivadas de coordenadas respecto a momentos, y viceversa, se satisface idénticamente por ser cada término idénticamente nulo.
Con ayuda de la transformación inversa de las coordenadas

$$q_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{2} \tag{4.5.15}$$

$$q_2 = Q_2 \tag{4.5.16}$$

desarrollamos las condiciones anteriores para los momentos, y llegamos a las relaciones que definen esta transformación canónica

$$\frac{\partial P_1}{\partial p_1} = \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{\partial P_1}{\partial p_2} = \frac{\partial q_2}{\partial Q_1} = 0 \tag{4.5.17}$$

junto a

$$\frac{\partial P_2}{\partial p_1} = \frac{\partial q_1}{\partial Q_2} = -\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{\partial P_2}{\partial p_2} = \frac{\partial q_2}{\partial Q_2} = 1 \tag{4.5.18}$$

y que admiten la solución

$$P_1 = \frac{1}{2}p_1 \quad , \quad P_2 = p_2 - \frac{1}{2}p_1 \tag{4.5.19}$$

junto con la transformación inversa

$$p_1 = 2P_1 \quad , \quad p_2 = P_1 + P_2 \tag{4.5.20}$$

(b) Buscamos por tanto las funciones generadoras para las transformaciones de coordenadas y momentos anteriores. Los cuatro tipos fundamentales de funciones generadoras cuando no dependen del tiempo están definidas funcionalmente por

$$F = F_1(q, Q) \quad , \quad p \equiv \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad , \quad P \equiv -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \tag{4.5.21}$$

$$F = F_2(q, P) \quad , \quad p \equiv \frac{\partial F_2}{\partial q} \quad , \quad Q \equiv \frac{\partial F_2}{\partial P} \tag{4.5.22}$$

$$F = F_3(p, Q) \quad , \quad q \equiv -\frac{\partial F_3}{\partial p} \quad , \quad P \equiv -\frac{\partial F_3}{\partial Q} \tag{4.5.23}$$

$$F = F_4(p, P) \quad , \quad q \equiv -\frac{\partial F_4}{\partial p} \quad , \quad Q \equiv \frac{\partial F_4}{\partial P} \tag{4.5.24}$$

donde se indican las coordenadas originales y las transformadas, y cómo se obtienen las variables dependientes restantes, una vez conocida la función generadora.

En este caso, siendo $q \equiv q(Q)$ y $p \equiv p(P)$, las transformaciones de los tipos 1 y 4 no resultan adecuadas pues es imposible obtener la dependencia necesaria (por ejemplo, en el caso de F_1, los momentos conjugados sólo pueden ser función de las coordenadas, que no sucede en este caso). Por tanto sólo podemos utilizar funciones del tipo 2 y 3.

Si utilizamos como ejemplo el tipo F_2, de la relación derivada para la coordenada Q_1

$$Q_1 = \frac{\partial F_2}{\partial P_1}(q, P) = 2q_1 + q_2 \tag{4.5.25}$$

tomando la igualdad de los dos últimos términos, obtenemos por integración directa una primera dependencia funcional para la función generadora, en la forma

$$F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = (2q_1 + q_2) P_1 + F(q_1, q_2, P_2) \tag{4.5.26}$$

donde F puede ser cualquier función de las variables indicadas.

Obtenido esta dependencia funcional, sustituyendo el resultado en la relación derivada para la coordenada Q_2, obtenemos la ecuación para la función F

$$Q_2 = \frac{\partial F_2}{\partial P_2}(q, P) = \frac{\partial F}{\partial P_2} = q_2 \tag{4.5.27}$$

que de nuevo puede ser integrada de forma directa, con el resultado,

$$f(q_1, q_2, P_2) = q_2 P_2 + G(q_1, q_2) \tag{4.5.28}$$

siendo ahora G una función arbitraria de las variables indicadas.

Por tanto, por ahora la función generadora independiente del tiempo tiene la expresión

$$F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = (2q_1 + q_2) P_1 + q_2 P_2 + G(q_1, q_2) \tag{4.5.29}$$

y para la determinación de G debemos analizar la relación entre los momentos. En particular, para que de $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}(q, P)$ pueda obtenerse una función p sólo de los momentos P, es necesario que la función G sólo dependa linealmente en las coordenadas q, digamos $G(q_1, q_2) = D_1 q_1 + D_2 q_2$, por lo que la expresión de la función generadora debe ser de la forma

$$F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = (2q_1 + q_2) P_1 + q_2 P_2 + D_1 q_1 + D_2 q_2 \tag{4.5.30}$$

con D_1 y D_2 constantes. Utilizando ahora las ecuaciones de transformación para los momentos (p_1, p_2), podemos fijar el valor de las constantes D_1, D_2, con el resultado

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = 2P_1 \quad \rightarrow \quad D_1 = 0 \\ p_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = P_1 + P_2 \quad \rightarrow \quad D_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.5.31}$$

con el resultado final

$$F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = (2q_1 + q_2) P_1 + q_2 P_2 \tag{4.5.32}$$

De igual modo podría calcularse la función generadora $F_3(p, Q)$ con el resultado final

$$F_3(p_1, p_2, Q_1, Q_2) = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2) p_1 + Q_2 p_2 \tag{4.5.33}$$

(c) Para obtener el nuevo Hamiltoniano en las coordenadas nuevas aplicamos directamente la transformación independiente del tiempo generada por $F_2(q,P)$,

$$K(Q_1,Q_2,P_1,P_2) = H(q_1(Q),q_2(Q),p_1(P),p_2(P)) \tag{4.5.34}$$

obteniendo

$$K(Q_1,Q_2,P_1,P_2) = 2P_1^2 + \frac{(P_1+P_2)^2}{2} + f(Q_1) \tag{4.5.35}$$

que se conserva ya que es independiente del tiempo

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} = 0 \rightarrow K = \text{cte} = E \tag{4.5.36}$$

Además, al ser Q_2 una coordenada cíclica para el nuevo Hamiltoniano, también se conserva el momento conjugado correspondiente

$$\frac{dP_2}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_2} = 0 \rightarrow P_2 = \text{cte} = \alpha_2 \tag{4.5.37}$$

(d) Utilizando esta última constante, la ecuación de Hamilton para la coordenada Q_1

$$\frac{dQ_1}{dt} \equiv \frac{\partial K}{\partial P_1} = 5P_1 + \alpha_2 \rightarrow P_1 = \frac{\dot{Q}_1 - \alpha_2}{5} \tag{4.5.38}$$

sustituida en la definición de la energía

$$E = 2\left(\frac{\dot{Q}_1 - \alpha_2}{5}\right)^2 + \frac{\left(\frac{\dot{Q}_1-\alpha_2}{5} + \alpha_2\right)^2}{2} + f(Q_1) \tag{4.5.39}$$

puede reducirse a

$$\frac{dQ_1}{dt} = \sqrt{10(E - f(Q_1)) - 4\alpha_2^2} \tag{4.5.40}$$

que nos da la ecuación de movimiento para $Q_1(t)$ por cuadratura

$$\int_{Q_{10}}^{Q_1} \frac{dQ_1}{\sqrt{10(E-f(Q_1)) - 4\alpha_2^2}} = t \tag{4.5.41}$$

en función de la condición inicial del movimiento, $Q_1(0) \equiv Q_{10}$. Una vez realizada la integral en Q_1, obtendríamos directamente el momento conjugado

$$P_1(t) = \frac{\dot{Q}_1(t) - \alpha_2}{5} \tag{4.5.42}$$

La segunda ecuación de movimiento es

$$\frac{dQ_2}{dt} \equiv \frac{\partial K}{\partial P_2} = P_1 + P_2 = \frac{\dot{Q}_1(t) - P_2}{5} + P_2 \tag{4.5.43}$$

y su integración es directa por la condición de conservación de P_2,

$$Q_2(t) = \frac{Q_1(t) + 4\alpha_2 t}{5} + C_2 \tag{4.5.44}$$

o en función de la condición inicial $Q_2(0) \equiv Q_{20}$, asumida conocida, con la solución completa

$$Q_2(t) = \frac{Q_1(t) - Q_{10} + 4\alpha_2 t}{5} + Q_{20} \tag{4.5.45}$$

4.5.3. Transformación canónica independiente del tiempo

Sean dos Hamiltonianos $H_1 = \frac{p^2 - m^2\omega^2 q^2}{2m}$, $H_2 = \omega QP$ para los que se propone obtener la transformación canónica independiente del tiempo

$$q = q(Q,P) \quad , \quad p = p(Q,P) \tag{4.5.46}$$

que los relaciona, esto es,

$$H_1(p,q) = H_2(P,Q) \tag{4.5.47}$$

(a) Demuestre que cualquiera de esas transformaciones canónicas debe cumplir la ecuación

$$Q\frac{\partial q(Q,P)}{\partial Q} - P\frac{\partial q(Q,P)}{\partial P} = \left(\frac{2QP}{m\omega} + q(Q,P)^2\right)^{1/2} \tag{4.5.48}$$

Para ello utilice la relación establecida entre los Hamiltonianos y la ecuación de la derivada temporal de la variable q, en los dos sistemas de variables canónicas.

(b) Para encontrar una solución particular a la ecuación obtenida, considere por simplicidad que q es lineal, $q(P,Q) = \alpha \cdot Q + \beta \cdot P$, siendo α y β constantes. Determine la expresión completa de una de esas transformaciones particulares, y obtenga su función generadora.

(c) Verifique que la transformación obtenida efectivamente transforma un Hamiltoniano en otro, y es canónica.

(a) Realizando el desarrollo de la derivada temporal de $q = q(Q,P)$ (donde se debe tener en cuenta que $q(Q,P)$ no depende explícitamente del tiempo) obtenemos, aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{dq(Q,P)}{dt} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{dQ}{dt} + \frac{\partial q}{\partial P}\frac{dP}{dt} \tag{4.5.49}$$

El lado derecho de esta igualdad puede evaluarse en función del nuevo Hamiltoniano $H_2 = \omega QP$, teniendo en cuenta que determina la evolución en el tiempo de las variables (Q,P). Por tanto, podemos escribir el lado de la derecha en la ecuación anterior en la forma

$$\frac{dq(Q,P)}{dt} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial H_2}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial H_2}{\partial Q} = \omega Q\frac{\partial q}{\partial Q} - \omega P\frac{\partial q}{\partial P} \tag{4.5.50}$$

Por otro lado, el lado izquierdo puede evaluarse considerando las ecuaciones de Hamilton para el sistema de variables (q,p),

$$\frac{dq}{dt} \equiv \frac{\partial H_1}{\partial p} = \frac{p}{m} \tag{4.5.51}$$

y dada la identidad entre los dos Hamiltonianos, en el lado derecho el momento p representa la función

$$p = \sqrt{2m\omega QP + m^2\omega^2 q^2} \tag{4.5.52}$$

por lo que también llegamos a lo siguiente:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\sqrt{2m\omega QP + m^2\omega^2 q^2}}{m} \tag{4.5.53}$$

Finalmente igualando ambas expresiones para la derivada temporal de q, encontramos la relación pedida

$$Q\frac{\partial q}{\partial Q} - P\frac{\partial q}{\partial P} = \sqrt{2\frac{QP}{m\omega} + q^2} \tag{4.5.54}$$

(b) Para obtener la expresión del enunciado, basta con sustituir la expresión de la solución particular en el resultado anterior y operar algebraicamente en la expresión resultante. Por un lado

$$Q\frac{\partial q}{\partial Q} - P\frac{\partial q}{\partial P} = \alpha Q - \beta P \tag{4.5.55}$$

Elevando al cuadrado, y reagrupando vemos que

$$(\alpha Q + \beta P)^2 \equiv q^2 = (\alpha Q - \beta P)^2 - 2\frac{QP}{m\omega} \tag{4.5.56}$$

Entre sus soluciones posibles, elegimos la solución particular es

$$\alpha = 1 \tag{4.5.57}$$

$$\beta = -\frac{1}{2m\omega} \tag{4.5.58}$$

Por tanto, hemos elegimos la transformación

$$Q = q + \frac{1}{2m\omega}P \tag{4.5.59}$$

Como Q depende de q y de P, elegimos una función generadora del tipo 2, $F_2 = F_2(q, P, t)$, tal que

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \quad , \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \tag{4.5.60}$$

Integrado primero en P , llegamos a

$$F_2 = \int Q\,(q, P)\,dP = qP + \frac{1}{4m\omega}P^2 + f\,(q) \tag{4.5.61}$$

donde f es una función arbitraria de q. De aquí, podemos deducir la segunda ecuación de la transformación

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = P + f'\,(q) \tag{4.5.62}$$

Para determinar completamente la transformación canónica es necesario calcular $f'\,(q)$. Para ello, utilizamos la condición de igualdad de los dos Hamiltonianos, $H_1\,(q, p) = H_2\,(Q, P)$, que escribimos en la forma

$$H_1\,(q, p\,(q, P)) = H_2\,(Q(q, P), P) \tag{4.5.63}$$

ó

$$\frac{1}{2m}\left(P + f'\,(q)\right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \omega\left(q + \frac{1}{2m\omega}P\right)P \tag{4.5.64}$$

con la solución para la función $f\,(q)$

$$f'\,(q) = m\omega q \rightarrow f\,(q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \tag{4.5.65}$$

La transformación pedida queda por tanto,en la forma

$$q = Q - \frac{1}{2m\omega}P \quad , \quad p = \frac{1}{2}P + m\omega Q \tag{4.5.66}$$

con la función generadora

$$F_2(q,P) = qP + \frac{1}{4m\omega}P^2 + \frac{1}{2}m\omega q^2 \tag{4.5.67}$$

(c) Comprobamos finalmente que los Hamiltonianos cumplen la condición impuesta, ya que al no depender del tiempo,

$$H_2 = H_1 + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H_1 \tag{4.5.68}$$

Puede comprobarse asimismo que la transformación es canónica, por la satisfacción de las denominadas condiciones cruzadas (véase la sección 4.12.1):

$$\frac{\partial Q(q,p)}{\partial q} = \frac{\partial p(Q,P)}{\partial P} \quad , \quad \frac{\partial Q(q,p)}{\partial p} = -\frac{\partial q(Q,P)}{\partial P} \tag{4.5.69}$$

4.5.4. Transformación canónica para Hamiltoniano dependiente del tiempo

Sea un sistema de dos grados de libertad con el Hamiltoniano dependiente del tiempo

$$H\left(q_1,q_2,p_1,p_2,t\right) = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + V\left(q_1-\omega t, q_2-\omega t\right) \tag{4.5.70}$$

para el que se propone un cambio de variables tal que $Q_1 = q_1 - \omega t$ y $Q_2 = q_2 - \omega t$.

(a) Obtenga la expresión completa de las transformaciones canónicas que satisfacen este cambio de variables para las coordenadas, y que por tanto pueden utilizarse para simplificar el problema.

(b) Seleccione una transformación canónica lo más sea sencilla posible, calcule su función generadora y el nuevo Hamiltoniano, y verifique que efectivamente se consigue eliminar la dependencia en el tiempo.

(c) Obtenga las nuevas ecuaciones del movimiento y determine en función de éstas la existencia o no de cantidades conservadas. ¿ Queda entonces asegurada la integrabilidad del sistema? Considere que un sistema $n-$dimensional es integrable (es decir, todas sus ecuaciones de movimiento pueden resolverse al menos por cuadraturas) si existen n integrales primeras del movimiento (i.e. constantes del movimiento).

(a) Ya que las coordenadas nuevas sólo dependen de las coordenadas antiguas y del tiempo, debemos buscar una función generadora del tipo 2,

$$F = F_2\left(q,P,t\right) \quad , \quad p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \quad , \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \tag{4.5.71}$$

exigiendo que se cumpla el cambio de coordenadas dado. Sustituyendo en la expresión de Q_1,

$$Q_1 = \frac{\partial F_2}{\partial P_1}\left(q,P,t\right) = q_1 - \omega t \tag{4.5.72}$$

y con una integración directa, obtenemos,

$$F_2\left(q,P,t\right) = \left(q_1-\omega t\right)P_1 + f\left(q,P_2,t\right) \tag{4.5.73}$$

siendo f una función arbitraria de sus argumentos. Introduciendo este resultado en la ecuación que define Q_2, exigimos que

$$Q_2 = \frac{\partial F_2}{\partial P_2}\left(q,P,t\right) = \frac{\partial f}{\partial P_2}\left(q,P_2,t\right) = q_2 - \omega t \tag{4.5.74}$$

y con una integración directa, debemos tener para la función f

$$f\left(q,P_2,t\right)=\left(q_2-\omega t\right)P_2+g\left(q,t\right) \tag{4.5.75}$$

siendo g de nuevo una función arbitraria. Como ya no quedan más condiciones por aplicar, podemos concluir que la función generadora más general, compatible con el cambio de variables del enunciado, será de la forma

$$F_2\left(q,P,t\right)=\left(q_1-\omega t\right)P_1+\left(q_2-\omega t\right)P_2+g\left(q,t\right) \tag{4.5.76}$$

De forma adicional, obtenemos además la siguiente relación general entre los momentos conjugados

$$p_i=\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\left(q,P,t\right)=P_i+\frac{\partial g}{\partial q_i}\left(q,t\right)\quad,\quad i=1,2 \tag{4.5.77}$$

(b) Para elegir el caso más sencillo definamos $g\left(q,t\right)\equiv 0$, con lo que

$$F_2\left(q,P,t\right)=\left(q_1-\omega t\right)P_1+\left(q_2-\omega t\right)P_2 \tag{4.5.78}$$

y así los momentos conjugados se mantienen invariables

$$p=P \tag{4.5.79}$$

El nuevo Hamiltoniano tras la transformación canónica puede obtenerse de la fórmula general

$$K\left(Q,P,t\right)=H\left(q,p,t\right)+\frac{\partial F_2\left(q,P,t\right)}{\partial t} \tag{4.5.80}$$

con el resultado

$$K\left(Q,P,t\right)=\frac{P_1^2}{2}+\frac{P_2^2}{2}+V\left(Q_1,Q_2\right)-\omega\left(P_1+P_2\right) \tag{4.5.81}$$

confirmándose que es independiente del tiempo, y por tanto, será ahora una constante del movimiento:

$$\frac{dK}{dt}=\frac{\partial K}{\partial t}=0\rightarrow K=\text{cte}=E \tag{4.5.82}$$

Su expresión puede simplificarse más rescribiendo

$$K\left(Q,P\right)=\frac{\left(P_1-\omega\right)^2}{2}+\frac{\left(P_2-\omega\right)^2}{2}+V\left(Q_1,Q_2\right)-\omega^2 \tag{4.5.83}$$

Si obviamos el término constante, esto nos sugiere la aplicación de una posterior transformación de (Q,P) a $\left(Q,\widetilde{P}=P-\omega\right)$, que es obviamente canónica y que llevaría al siguiente Hamiltoniano

$$K\left(Q,\widetilde{P}\right)=\frac{\widetilde{P}_1^2}{2}+\frac{\widetilde{P}_2^2}{2}+V\left(Q_1,Q_2\right) \tag{4.5.84}$$

(c) Prescindiendo de esta última transformación, las ecuaciones de Hamilton para el nuevo Hamiltoniano son

$$\frac{dQ_1}{dt}=\frac{\partial K}{\partial P_1}=P_1-\omega\quad,\quad\frac{dP_1}{dt}=-\frac{\partial K}{\partial Q_1}=-\frac{\partial V}{\partial Q_1} \tag{4.5.85}$$

$$\frac{dQ_2}{dt}=\frac{\partial K}{\partial P_2}=P_2-\omega\quad,\quad\frac{dP_2}{dt}=-\frac{\partial K}{\partial Q_2}=-\frac{\partial V}{\partial Q_2} \tag{4.5.86}$$

que corresponden a las ecuaciones de movimiento de una partícula en dos dimensiones sometida a un potencial dependiente únicamente de la posición, y por tanto conservativo. Es un sistema autónomo (independiente del tiempo) y el Hamiltoniano es una primera integral del movimiento.

La existencia o no de una segunda integral del movimiento, además del Hamiltoniano, lo que supondría la integrabilidad del sistema Hamiltoniano, depende de las características particulares de V. Dado que el potencial V es arbitrario, la integrabilidad del sistema no puede asegurarse sin tener más información.

4.5.5. Transformación canónica para sistema disipativo

Una partícula de masa m se mueve en una dimensión bajo un potencial $V(q)$ y está sometida a una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad, con la expresión $F_r\left(\dot{q}\right) = -2m\gamma\ \dot{q}$.

(a) Determine el valor de b para que, con un Lagrangiano del tipo

$$L = e^{bt}\left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)\right] \tag{4.5.87}$$

se obtenga, dentro del formalismo Lagrangiano, la ecuación del movimiento esperada, asumida conocida. Obtenga en este caso el valor del momento y del Hamiltoniano del sistema.

(b) Como aplicación particular, considere ahora el potencial armónico $V\left(q\right) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$. Para simplificar el problema, se aplica una transformación canónica con una función generadora del tipo $F_2 = f\left(t\right)qP$. Obtenga una expresión para la función $f(t)$ que conduzca al nuevo Hamiltoniano independiente del tiempo, dado por

$$K = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2 + \gamma QP \tag{4.5.88}$$

(a) La ecuación de Euler−Lagrange para la coordenada q

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{4.5.89}$$

desarrollada, da lugar a

$$\frac{d}{dt}\left(me^{bt}\dot{q}\right) = -e^{bt}\frac{dV(q)}{dq} \tag{4.5.90}$$

ó

$$m\ddot{q}e^{bt} = -\frac{dV\left(q\right)}{dq}e^{bt} - mb\dot{q}e^{bt} \tag{4.5.91}$$

Al simplificarse el factor exponencial, dicha ecuación de movimiento coincide con la ecuación de movimiento esperada en presencia del potencial y la fuerza de rozamiento,

$$m\ddot{q} = -\frac{dV(q)}{dq} - 2m\gamma\dot{q} \tag{4.5.92}$$

siempre que

$$b = 2\gamma \tag{4.5.93}$$

que es la condición pedida en el enunciado.

Fijando este valor, el momento conjugado es

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = me^{2\gamma t}\dot{q} \tag{4.5.94}$$

y el Hamiltoniano se obtiene aplicando la fórmula general, con el resultado

$$H = p\dot{q} - L = e^{-2\gamma t}\frac{p^2}{2m} + V(q)e^{2\gamma t} \tag{4.5.95}$$

siendo dependiente del tiempo.

(b) En el caso del potencial armónico, el Hamiltoniano tiene la expresión

$$H = e^{-2\gamma t}\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 e^{2\gamma t} \tag{4.5.96}$$

Buscamos entonces una transformación canónica que lleve al nuevo Hamiltoniano de la forma pedida. Para ello, al aplicar una función generadora del tipo 2, en la forma $F_2(q, P, t) = f(t)\, qP$, tenemos las relaciones de transformación

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = f(t)\, q \quad , \quad p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = f(t)\, P \tag{4.5.97}$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H + f'(t)\, qP \tag{4.5.98}$$

Introduciendo en la última relación el Hamiltoniano inicial, y comparando con la expresión requerida, esto es,

$$\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2 + \gamma QP = e^{-2\gamma t}\frac{P^2 f^2(t)}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{Q^2}{f^2(t)}e^{2\gamma t} + f'(t)\frac{Q}{f(t)}P \tag{4.5.99}$$

encontramos que se debe satisfacer simultáneamente

$$e^{-2\gamma t} f^2(t) = 1 \tag{4.5.100}$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \gamma \tag{4.5.101}$$

con la solución directa

$$f(t) = e^{\gamma t} \tag{4.5.102}$$

por lo que la transformación canónica pedida es

$$q = e^{-\gamma t}Q \quad , \quad P = e^{-\gamma t}p \tag{4.5.103}$$

4.5.6. Transformación canónica para sistema bidimensional

Considere la siguiente familia de transformaciones de variables canónicas

$$x = X\cos\lambda + \frac{P_Y}{m\omega}\operatorname{sen}\lambda \quad , \quad y = Y\cos\lambda + \frac{P_X}{m\omega}\operatorname{sen}\lambda \tag{4.5.104}$$

$$p_x = -m\omega Y\operatorname{sen}\lambda + P_X\cos\lambda \quad , \quad p_y = -m\omega X\operatorname{sen}\lambda + P_Y\cos\lambda \tag{4.5.105}$$

parametrizas por el parámetro λ.

(a) Demuestre que representan una familia de transformaciones canónicas para un sistema de dos dimensiones.

(b) Interprete físicamente la transformación dada para λ fijo. Para ello, discuta el resultado que se obtiene en los planos $\left(x, \frac{p_y}{m\omega}\right)$ y $\left(y, \frac{p_x}{m\omega}\right)$ del espacio de fases. Con esta información, analice si existen cantidades que se mantienen invariantes bajo esta transformación.

(c) Como aplicación particular, considere el oscilador armónico en dos dimensiones, para el cual el Hamiltoniano en las variables canónicas (x, y, p_x, p_y) está dado por

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2\right) \tag{4.5.106}$$

Explique por qué es especialmente conveniente aplicar esta transformación canónica a este Hamiltoniano. Discuta en particular el papel de los invariantes hallados. Determine entonces el nuevo Hamiltoniano. ¿Qué sucedería en un caso más general, que sea distinto del oscilador armónico?

(d) Considere adicionalmente un oscilador armónico isótropo cargado en dos dimensiones, en presencia de un campo magnético descrito por el potencial vector $A = (0, Bx, 0)$, cuyo Hamiltoniano está dado por

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{(p_y - eBx)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2\right) \tag{4.5.107}$$

Verifique en particular esta expresión, y utilice entonces la transformación canónica para reducir la complejidad del Hamiltoniano. Para ello, como guía, utilice el valor del parámetro λ que elimina los términos no diagonales en el Hamiltoniano, calculándolo.

(e) Una vez reducido el Hamiltoniano a una forma cuadrática, resuelva el movimiento general del oscilador armónico cargado.

(a) Dado que la transformación no depende del tiempo, bastará mostrar que la diferencia $(p_x dx + p_y dy) - (P_X dX + P_Y dY)$ es una diferencial exacta, como función de las coordenadas (x, y, X, Y). Para ello, primero invertimos las ecuaciones de transformación para obtener los momentos en función de las coordenadas:

$$p_x = \frac{m\omega}{\operatorname{sen}\lambda}(y\cos\lambda - Y) \quad , \quad p_y = \frac{m\omega}{\operatorname{sen}\lambda}(x\cos\lambda - X) \tag{4.5.108}$$

$$P_X = \frac{m\omega}{\operatorname{sen}\lambda}(y - Y\cos\lambda) \quad , \quad P_Y = \frac{m\omega}{\operatorname{sen}\lambda}(x - X\cos\lambda) \tag{4.5.109}$$

De aquí, desarrollando y agrupando términos deducimos que

$$(p_x dx + p_y dy) - (P_X dX + P_Y dY) = \frac{m\omega}{\operatorname{sen}\lambda}(\cos\lambda d(xy + XY) - d(xY + yX)) \equiv df \tag{4.5.110}$$

y queda demostrado que es igual a la diferencial total de la función generadora de tipo 1

$$F = F_2(x, y, X, Y) = \frac{m\omega}{\operatorname{sen}\lambda}(\cos\lambda(xy + XY) - xY - yX) \tag{4.5.111}$$

Por tanto, la transformación del enunciado, dependiente de un parámetro arbitrario, sí es canónica.

(b) La transformación es combinación de dos rotaciones en el espacio de fases, la primera de ángulo λ en el plano formado por las variables $\left(x, \frac{p_y}{m\omega}\right)$, y la segunda del mismo ángulo λ en el plano formado por $\left(y, \frac{p_x}{m\omega}\right)$.
En cualquier rotación respecto a un eje fijo se mantiene invariante el módulo al cuadrado del vector de posición. Aplicando este resultado a las dos rotaciones anteriores, vemos que existen dos cantidades invariantes bajo la transformación canónica, que son el módulo al cuadrado del vector de posición en cada uno de estos dos planos, esto es

$$i_1 \equiv x^2 + \left(\frac{p_y}{m\omega}\right)^2 = \text{inv} \tag{4.5.112}$$

$$i_2 \equiv y^2 + \left(\frac{p_x}{m\omega}\right)^2 = \text{inv} \tag{4.5.113}$$

(c) Es destacable que el Hamiltoniano del oscilador armónico puede escribirse en función de los invariantes de esta transformación canónica,

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \left(i_1 + i_2\right) \tag{4.5.114}$$

y por tanto también es invariante bajo la transformación canónica. De ahí que el nuevo Hamiltoniano sea directamente

$$K\left(X, Y, P_X, P_Y\right) = \frac{P_X^2 + P_Y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(X^2 + Y^2\right) \tag{4.5.115}$$

Si no fuera así, en un caso más general, dado que la transformación canónica que se aplica no depende del tiempo, el nuevo Hamiltoniano mantiene la misma forma funcional que el Hamiltoniano antiguo y está dado directamente por

$$K\left(X, Y, P_X, P_Y\right) = H\left(x, y, p_x, p_y\right) \tag{4.5.116}$$

aplicando en el lado derecho de la ecuación la transformación canónica.

(d) Aplicamos ahora esta transformación al oscilador armónico isótropo cargado en presencia del campo magnético. Para determinar el Hamiltoniano, basta hacer la redefinición del momento canónico teniendo en cuenta el acoplamiento con el campo electromagnético (en este caso, únicamente magnético)

$$p \to p - eA \tag{4.5.117}$$

siendo e la carga eléctrica del oscilador. Por tanto, el Hamiltoniano estará dado por la expresión del enunciado

$$H\left(x, y, p_x, p_y\right) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{\left(p_y - eBx\right)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(x^2 + y^2\right) \tag{4.5.118}$$

Antes de la aplicar la transformación, es conveniente escribir el Hamiltoniano en función de los invariantes de la transformación, puesto que los términos resultantes se mantendrán efectivamente invariantes. Reescribimos el Hamiltoniano en la forma

$$H\left(x, y, p_x, p_y\right) = \frac{1}{2}m\omega^2 \left(i_1 + i_2\right) + \frac{e^2B^2}{2m}x^2 - \frac{eB}{m}p_y x \tag{4.5.119}$$

El último término no es un término diagonal en coordenadas y/o momentos (esto es, no es cuadrático), y es el que podemos eliminar con una adecuada elección del parámetro λ. Para ello, debemos determinar la expresión general del término no diagonal bajo la transformación canónica. De forma resumida, encontramos que

$$\frac{eB}{m}p_y x \to \frac{eB}{m}XP_Y \left(\cos^2\lambda - \operatorname{sen}^2\lambda\right) + .. \tag{4.5.120}$$

$$\frac{e^2B^2}{2m}x^2 \to \frac{e^2B^2}{m^2\omega}\operatorname{sen}\lambda\cos\lambda XP_Y + .. \tag{4.5.121}$$

luego

$$\frac{e^2B^2}{2m}x^2 - \frac{eB}{m}p_y x \to \frac{eB}{m}XP_Y \left(\frac{eB}{m\omega}\operatorname{sen}\lambda\cos\lambda - \left(\cos^2\lambda - \operatorname{sen}^2\lambda\right)\right) + .. \tag{4.5.122}$$

donde los puntos suspensivos indican los demás términos del desarrollo que sí son cuadráticos. Luego, para que no aparezca el término no diagonal en el nuevo Hamiltoniano, y por tanto, éste sea suma de términos al cuadrado, es necesario que el parámetro λ satisfaga

$$\frac{eB}{m\omega}\operatorname{sen}\lambda\cos\lambda-\left(\cos^2\lambda-\operatorname{sen}^2\lambda\right)=0 \tag{4.5.123}$$

con la solución

$$\tan 2\lambda=2\frac{m\omega}{eB} \tag{4.5.124}$$

(e) Con esta elección, vemos que la transformación se reduce a una combinación de términos cuadráticos

$$\frac{e^2B^2}{2m}x^2-\frac{eB}{m}p_yx\rightarrow\frac{e^2B^2}{2m}\frac{1}{\cos^2\lambda-\operatorname{sen}^2\lambda}\left(\cos^2\lambda X^2-\operatorname{sen}^2\lambda\frac{P_Y^2}{m^2\omega^2}\right) \tag{4.5.125}$$

Introduciendo este resultado, operando y agrupando los términos correspondientes, vemos que el nuevo Hamiltoniano está dado por

$$K\left(X,Y,P_X,P_Y\right)=\frac{P_X^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\tan^2\lambda X^2+\frac{P_Y^2}{2m}\cot^2\lambda+\frac{1}{2}m\omega^2Y^2 \tag{4.5.126}$$

El nuevo Hamiltoniano K corresponde a la suma de dos osciladores armónicos simples independientes, dirigidos según los nuevos ejes X,Y, con una frecuencia de oscilación

$$\Omega_X=\omega\tan\lambda \tag{4.5.127}$$

$$\Omega_Y=\omega\cot\lambda \tag{4.5.128}$$

donde

$$\tan 2\lambda=2\frac{m\omega}{eB} \tag{4.5.129}$$

El movimiento arbitrario será así la superposición de estos dos movimientos oscilatorios independientes.

4.5.7. Transformación canónica en términos de la diferencial exacta dF

Sea

$$Q=-p\quad,\quad P=q+Ap^2 \tag{4.5.130}$$

una transformación de variables canónicas, siendo A una constante arbitraria.

(a) Demuestre que es una transformación canónica. Para ello, exprese $pdq-PdQ$ como una diferencial exacta, determinando la función generadora de tipo 1 de la transformación.

(b) Demuestre que las ecuaciones de Hamilton son invariantes bajo esta transformación, tomando el caso de un Hamiltoniano $H(q,p)$ independiente del tiempo, por lo demás totalmente arbitrario.

(c) Utilice ahora la equivalencia $F_2\equiv F_1+PQ$ para determinar una función generadora de tipo 2, a partir de la función F_1 obtenida previamente, verificando que se genera la transformación anterior.

(a) Para la función generadora de tipo 1, las variables independientes son las coordenadas (q,Q), en función de las cuales, la transformación de los momentos está dada por las relaciones

$$p=-Q\quad,\quad P=q+AQ^2 \tag{4.5.131}$$

Con ello, podemos obtener la diferencial

$$pdq - PdQ = -Qdq - \left(q + AQ^2\right) dQ \tag{4.5.132}$$

y agrupando los términos, comprobamos que efectivamente es la diferencial exacta respecto a las coordenadas (q, Q),

$$pdq - PdQ = -d\left(qQ + \frac{1}{3}AQ^3\right) \equiv dF \tag{4.5.133}$$

Y por tanto, podemos asegurar que la transformación así definida es canónica, siendo

$$F = -qQ - \frac{1}{3}AQ^3 = F_1(q, Q) \tag{4.5.134}$$

la función generadora de tipo 1.

(b) Para ello, basta deducir que de

$$pdq - PdQ \equiv dF = \frac{\partial F}{\partial q}dq + \frac{\partial F}{\partial Q}dQ \tag{4.5.135}$$

los momentos están dados por

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \quad , \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q} \tag{4.5.136}$$

y del Principio de Hamilton para (q, p)

$$\delta \int \left(p\dot{q} - H\right) dt = 0 \tag{4.5.137}$$

y por tanto, las ecuaciones de Hamilton para (q, p)

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{4.5.138}$$

se deduce el Principio de Hamilton para (Q, P)

$$\delta \int \left(P\dot{Q} - K + \frac{dF}{dt}\right) dt = \delta \int \left(P\dot{Q} - K\right) dt = 0 \tag{4.5.139}$$

y por tanto, las ecuaciones de Hamilton para (Q, P)

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} \quad , \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} \tag{4.5.140}$$

al ser el nuevo Hamiltoniano, para una función generadora independiente del tiempo,

$$K\left(Q, P\right) = H\left(q, p\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = H\left(q\left(Q, P\right), p\left(Q, P\right)\right) \tag{4.5.141}$$

(c) Utilizando la función $F_1(q, Q)$, podemos definir una función generadora del tipo 2, $F_2(q, P)$, mediante la relación

$$F_2(q, P) = F_1(q, Q(q, P)) + PQ(q, P) \tag{4.5.142}$$

siendo ahora la variable dependiente Q, que debe definirse como función de las variables independientes (q, P). Con la transformación dada encontramos

$$Q = \sqrt{\frac{P - q}{A}} \tag{4.5.143}$$

y entonces simplificando obtenemos el resultado pedido

$$F_2(q,P) = -qQ - \frac{1}{3}AQ^3 + \left(q + AQ^2\right)Q = \frac{2}{3}AQ^3 = \frac{2}{3}A\left(\frac{P-q}{A}\right)^{3/2} \tag{4.5.144}$$

Comprobamos que efectivamente esta función da lugar a la transformación definida en el enunciado, para las variables dependientes (p, Q)

$$p = \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial q} = -\left(\frac{P-q}{A}\right)^{\frac{1}{2}} = -Q \tag{4.5.145}$$

$$Q = \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial P} = \left(\frac{P-q}{A}\right)^{1/2} \rightarrow P = q + AQ^2 = q + Ap^2 \tag{4.5.146}$$

4.5.8. Partícula en campo gravitatorio uniforme

El Hamiltoniano de una partícula de masa m que se mueve verticalmente en un campo gravitatorio uniforme g, es

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgq \tag{4.5.147}$$

(a) Determine el nuevo Hamiltoniano bajo la transformación canónica estudiada en el ejercicio 4.5.7

$$Q = -p \quad , \quad P = q + Ap^2 \tag{4.5.148}$$

fijando el valor de la constante A para que la coordenada Q quede eliminada en el nuevo Hamiltoniano.

(b) Con esta elección de la constante A, resuelva las ecuaciones de Hamilton para las nuevas variables canónicas, y a partir de la transformación canónica derive la solución de movimiento para las variables originales q, p.

(a) La transformación inversa se escribe

$$q = P - AQ^2 \quad , \quad p = -Q \tag{4.5.149}$$

Dado que la transformación no depende explícitamente del tiempo, el nuevo Hamiltoniano, utilizando la transformación inversa, es directamente

$$K(Q,P) = H\left(q(Q,P), p(Q,P)\right) = \frac{Q^2}{2m} + mgP - AmgQ^2 \tag{4.5.150}$$

de forma que para el valor de la constante A dado por

$$A = \frac{1}{2m^2 g} \tag{4.5.151}$$

el Hamiltoniano es independiente de la coordenada Q y tiene el valor

$$K = mgP \tag{4.5.152}$$

(b) Las ecuaciones de Hamilton para las nuevas variables (Q, P) y el nuevo Hamiltoniano se escriben

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = mg \quad , \quad \dot{P} = 0 \tag{4.5.153}$$

Dado que la coordenada Q es cíclica, el momento canónico se conserva. Obtenemos por integración directa, la solución

$$Q(t) = Q_0 + mgt \quad , \quad P(t) = P_0 \tag{4.5.154}$$

A partir de esta solución, y aplicando la transformación canónica inversa, podemos obtener la ley de movimiento para las variables canónicas iniciales

$$q(t) = P(t) - AQ(t)^2 = P_0 - \frac{1}{2m^2 g}(Q_0 + mgt)^2 \equiv q_0 + \frac{p_0}{m}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{4.5.155}$$

$$p(t) = -Q(t) = -Q_0 - mgt \equiv p_0 - mgt \tag{4.5.156}$$

una vez realizada el ajuste de las condiciones iniciales en ambos sistemas

$$q_0 = P_0 - \frac{p_0^2}{2m^2 g} \quad , \quad p_0 = -Q_0 \tag{4.5.157}$$

4.5.9. Transformación canónica paramétrica bidimensional

Sea

$$Q = q\cos\theta - \frac{p}{m\omega}\operatorname{sen}\theta \quad , \quad P = m\omega q\operatorname{sen}\theta + p\cos\theta \tag{4.5.158}$$

una transformación de variables canónicas, siendo θ un parámetro, y ω una constante numérica arbitraria.

(a) Demuestre que la transformación es canónica, e interprete físicamente su significado. Para la demostración, utilice el hecho que $pdq - PdQ$ debe ser una diferencial exacta, determinando la función generadora de tipo 1 de la transformación.

(b) Utilice entonces la equivalencia $F_2 \equiv F_1 + PQ$ para determinar una función generadora de tipo 2, verificando que se genera la transformación del enunciado.

(a) Para la función generadora del tipo 1, $F_1(q, Q)$, debemos escribir en primer lugar los momentos en función de las coordenadas (q, Q), con el resultado

$$p = m\omega\left(q\cot\theta - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}Q\right) \quad , \quad P = m\omega\left(q\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - Q\cot\theta\right) \tag{4.5.159}$$

Y de aquí, la expresión diferencial $pdq - PdQ$ se escribe

$$pdq - PdQ = m\omega\left(q\cot\theta - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}Q\right)dq - m\omega\left(q\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - Q\cot\theta\right)dQ \tag{4.5.160}$$

Agrupando términos, encontramos la diferencial exacta

$$pdq - PdQ = \frac{1}{2}m\omega\cot\theta d\left(q^2 + Q^2\right) - m\omega\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}d(qQ) \equiv dF \tag{4.5.161}$$

siendo F la función generadora de tipo 1

$$F = F_1(q, Q) = \frac{1}{2}m\omega\cot\theta\left(q^2 + Q^2\right) - m\omega\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}qQ \tag{4.5.162}$$

y por tanto se demuestra que la transformación analizada es canónica.

Para ver su significado físico, debemos comprobar que las ecuaciones de transformación en el espacio $(q, \frac{p}{m\omega})$ se corresponden con un giro de ángulo $-\theta$ (medido respecto al eje q)

$$Q = q\cos\theta - \left(\frac{p}{m\omega}\right)\operatorname{sen}\theta \quad , \quad \left(\frac{P}{m\omega}\right) = q\operatorname{sen}\theta + \left(\frac{p}{m\omega}\right)\cos\theta \tag{4.5.163}$$

Y por tanto, deja invariante el módulo al cuadrado del vector de posición $(q, \frac{p}{m\omega})$ en ese espacio

$$q^2 + \left(\frac{p}{m\omega}\right)^2 = \text{inv} = Q^2 + \left(\frac{P}{m\omega}\right)^2 \tag{4.5.164}$$

(b) La función generadora del tipo 2 está dada por

$$F_2 = F_1 + PQ = \frac{1}{2}m\omega \cot\theta \left(q^2 - Q^2\right) \tag{4.5.165}$$

que debe leerse realmente

$$F_2\left(q,P\right) = \frac{1}{2}m\omega \cot\theta \left(q^2 - Q\left(q,P\right)^2\right) \tag{4.5.166}$$

donde ahora

$$Q\left(q,P\right) = \frac{1}{\cos\theta}q - \frac{P}{m\omega}\tan\theta \tag{4.5.167}$$

Reagrupando, obtenemos el resultado pedido

$$F_2\left(q,P\right) = \frac{qP}{\cos\theta} - \frac{1}{2}m\omega\tan\theta\left(q^2 + \frac{P^2}{m^2\omega^2}\right) \tag{4.5.168}$$

Para comprobar que esta función satisface la ley de transformación requerida, determinamos las variables canónicas (p,Q) en función de las derivadas de $F_2\left(q,P\right)$ en la forma

$$p = \frac{\partial F_2\left(q,P\right)}{\partial q} = \frac{P}{\cos\theta} - m\omega\tan\theta q \tag{4.5.169}$$

$$Q = \frac{\partial F_2\left(q,P\right)}{\partial P} = \frac{q}{\cos\theta} - \frac{1}{m\omega}\tan\theta P \tag{4.5.170}$$

y vemos que efectivamente se corresponden con las ecuaciones de transformación anteriores.

4.5.10. Transformación canónica paramétrica para oscilador armónico

Considere el oscilador armónico unidimensional, con Hamiltoniano dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{4.5.171}$$

y la aplicación de la transformación canónica del ejercicio 4.5.9

$$Q = q\cos\theta - \frac{p}{m\omega}\operatorname{sen}\theta \quad , \quad P = m\omega q\operatorname{sen}\theta + p\cos\theta \tag{4.5.172}$$

considerando ahora que el parámetro de la transformación, $\theta(t)$, es función del tiempo.

(a) Determine el nuevo Hamiltoniano del sistema, $K\left(Q,P,t\right)$ y demuestre que para una elección adecuada de la función $\theta(t)$, se satisface $K \equiv 0$.

(b) Con esta elección de $\theta(t)$, obtenga la solución del movimiento para (Q,P) en función del tiempo, y entonces deduzca a partir de las ecuaciones de la transformación canónica, la ley de movimiento para las variables iniciales (q,p).

(a) Podemos utilizar cualquiera de las dos funciones generadoras obtenidas en el ejercicio 4.5.9. Tomemos por ejemplo la función

$$F_2\left(q,P\right) = \frac{qP}{\cos\theta} - \frac{1}{2}m\omega\tan\theta\left(q^2 + \frac{P^2}{m^2\omega^2}\right) \tag{4.5.173}$$

en cuyo caso, el nuevo Hamiltoniano, por definición, tiene el valor

$$K\left(Q,P,t\right)=H\left(q,p\right)+\left(\frac{\partial F_2\left(q,P\right)}{\partial t}\right)_{q,P} \tag{4.5.174}$$

El primer término de la ecuación anterior es el Hamiltoniano H evaluado en las nuevas variables canónicas, esto es,

$$H=\frac{p\left(Q,P\right)^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2 q\left(Q,P\right)^2 \tag{4.5.175}$$

Aplicando la condición del invariante bajo la transformación canónica, deducimos que el Hamiltoniano mantiene su forma bajo la transformación dada

$$H(q,p)=\frac{1}{2}m\omega^2\left[\frac{p^2}{m^2\omega^2}+q^2\right]=\frac{1}{2}m\omega^2\left[\frac{P^2}{m^2\omega^2}+Q^2\right]=H(Q,P) \tag{4.5.176}$$

y por tanto también es un invariante.

Nos queda por evaluar entonces, el segundo término, la derivada temporal de la función generadora. Al haber elegido un tipo de función $\theta=\theta(t)$, tenemos el resultado

$$\left(\frac{\partial F_2\left(q,P\right)}{\partial t}\right)_{q,P}=\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta}\left[\operatorname{sen}\theta qP-\frac{1}{2}m\omega\left(q^2+\frac{P^2}{m^2\omega^2}\right)\right] \tag{4.5.177}$$

y con ayuda de la ley de transformación para q

$$q=Q\cos\theta+\left(\frac{P}{m\omega}\right)\operatorname{sen}\theta \tag{4.5.178}$$

obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta qP-\frac{1}{2}m\omega q^2=\frac{1}{2}m\omega\left(\frac{P}{m\omega}\right)^2\operatorname{sen}^2\theta-\frac{1}{2}m\omega Q^2\cos^2\theta \tag{4.5.179}$$

y finalmente, en función de las variables (Q,P),

$$\left(\frac{\partial F_2\left(q,P\right)}{\partial t}\right)_{q,P}=-\dot{\theta}\left[\frac{1}{2}m\omega\left(\frac{P}{m\omega}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega Q^2\right]=-\dot{\theta}\cdot\frac{H(Q,P)}{\omega} \tag{4.5.180}$$

Agrupando los resultados, el nuevo Hamiltoniano está dado por

$$K\left(Q,P,t\right)=H(Q,P)\left(1-\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right) \tag{4.5.181}$$

y será idénticamente nulo, si elegimos $\dot{\theta}=\omega\rightarrow\theta\left(t\right)=\omega t$, esto es, definimos la transformación de las variables canónicas como un giro en el espacio de fases con velocidad angular igual a la frecuencia del oscilador.

Comentario adicional sobre el concepto de *invariancia* La propiedad de invariancia se define en general para una función $f(q,p,t)$ en la forma

$$f(Q,P,t)\equiv f\left(Q(q,p,t),P(q,p,t),t\right)\equiv f(q,p,t) \tag{4.5.182}$$

esto es, no cambia la forma tras la aplicación de la transformación canónica. Por ejemplo, tenemos la invariancia de las ecuaciones de Hamilton bajo la aplicación de cada transformación canónica, pero no tenemos la misma invariancia del Hamiltoniano. El Hamiltoniano sólo podrá ser invariante, cuando lo sea, bajo algunas transformaciones canónicas. Y cuando se produce esta invariancia determinada es sinónimo de que el Hamiltoniano tiene una propiedad de simetría oculta. En el

caso del oscilador armónico de este ejercicio, el Hamiltoniano es un escalar en el espacio de fases normalizado $\left(q, \frac{p}{m\omega}\right)$

$$H = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(q^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2} \right) \tag{4.5.183}$$

y por tanto dependiente únicamente de la *coordenada radial*

$$R^2 \equiv q^2 + \frac{p^2}{m\omega^2} \quad , \quad H = \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \tag{4.5.184}$$

en dicho espacio. Cualquier rotación de las coordenadas $\left(q, \frac{p}{m\omega}\right)$ determina el mismo valor para R^2, y por tanto el mismo valor para H. Esta es la simetría subyacente del Hamiltoniano, simetría que queda descrita con la aplicación de la transformación canónica utilizada, ya que ésta justamente corresponde a una rotación en este espacio de fases.

• Consideremos otro ejemplo más sencillo, el Hamiltoniano de una partícula libre, $H = \frac{p^2}{2m}$, y analicemos las posibles simetrías ocultas. Necesitamos encontrar la transformación canónica tal que

$$\frac{P^2}{2m} \equiv \frac{P(q,p)^2}{2m} \equiv \frac{p^2}{2m} \tag{4.5.185}$$

La solución, junto con la propia transformación identidad, es

$$Q = -q \quad , \quad P = -p \quad , \quad [Q, P] = 1 \tag{4.5.186}$$

que es la inversión respecto al origen en el espacio de fases. La simetría oculta de este Hamiltoniano resulta ser tener una dinámica temporal lineal en el tiempo

$$\begin{aligned} p &= \text{cte} = p_0 \\ q &= q_0 + \frac{p_0}{m} t \end{aligned} \tag{4.5.187}$$

que es invariante bajo el cambio de signo de momentos y coordenadas. Podemos comprobarlo si analizamos además el Hamiltoniano de una partícula en un campo gravitatorio constante, que bajo esta transformación canónica se transforma en la forma

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq \quad , \quad H(Q,P) \equiv H(-q,-p) = \frac{p^2}{2m} - mgq \tag{4.5.188}$$

y por tanto no muestra esta invariancia, y no tiene esta simetría oculta. Su ley de movimiento no es lineal en el tiempo

$$\begin{aligned} p &= p_0 - mgt \\ q &= q_0 + \frac{p_0}{m} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \tag{4.5.189}$$

precisamente por la presencia del campo de gravedad, que tiene una dirección espacial constante, y por tanto no es invariante bajo inversión en el espacio de fases. Podemos decir que este campo g rompe la simetría oculta del Hamiltoniano libre.

(b) Dado que $K \equiv 0$, las ecuaciones de Hamilton para las nuevas variables canónicas quedan reducidas a

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0 \quad , \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \tag{4.5.190}$$

y tienen una resolución trivial, las nuevas variables canónicas son constantes del movimiento, e igual a los valores iniciales (Q_0, P_0).

Entonces, con ayuda de las ecuaciones de transformación, las ecuaciones de movimiento para las variables canónicas (q, p) son

$$q(t) = Q(t) \cos\theta(t) + \left(\frac{P(t)}{m\omega} \right) \operatorname{sen}\theta(t) = Q_0 \cos\omega t + \left(\frac{P_0}{m\omega} \right) \operatorname{sen}\omega t \tag{4.5.191}$$

$$p(t) = -m\omega Q(t)\operatorname{sen}\theta(t) + P(t)\cos\theta(t) = -m\omega Q_0 \operatorname{sen}\omega t + P_0\cos\omega t \tag{4.5.192}$$

que es la solución conocida del oscilador armónico. Vemos que las nuevas variables canónicas (Q_0, P_0) son los valores iniciales (esto es, en $t = 0$) de las variables canónicas (q, p). Éste es el fundamento de la teoría de Hamilton−Jacobi, desarollada en el capítulo 5.

4.6. Corchetes de Poisson

4.6.1. Definición y propiedades

Definición Para dos funciones f, g definidas en el espacio de fases (q, p) su *corchete de Poisson*, denotado por $[f, g]$, está definido en la forma

$$[f, g]_{q,p} \equiv \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} \tag{4.6.1}$$

donde, por claridad, se detalla explícitamente cuál es el conjunto de variables canónicas, en este caso (q, p), de las que dependen las funciones f y g.
Destacamos que en esta definición no entra en juego el Hamiltoniano, y por tanto es una definición puramente *canónica*, relacionada con la geometría simpléctica del espacio de fases. Y su importancia reside en sus propiedades generales y, en particular, en sus propiedades de invariancia.

Propiedades

(1) La más importante de ellas, su *invariancia* frente a las transformaciones canónicas. Cada corchete de Poisson son invariantes (tiene un mismo valor) para todas las transformaciones canónicas. Esta propiedad no deja de ser casi trivial ya que, por definición, tiene un carácter *canónico* y por tanto se preserva bajo las transformaciones canónicas. La expresión matemática de esta invariancia es

$$[f, g]_{q,p} = [f, g]_{Q,P} \tag{4.6.2}$$

siendo Q, P las nuevas variables canónicas, dadas por la transformación considerada canónica

$$Q = Q(q, p, t) \quad , \quad P = P(q, p, t) \tag{4.6.3}$$

(2) *Corchetes fundamentales* A partir de su definición, obtenemos los denominados corchetes fundamentales que son los corchetes de Poisson de las propias variables canónicas respecto a sí mismas. Obtenemos en primer lugar[1]

$$[q, q]_{q,p} \equiv 0 \quad , \quad [p, p]_{q,p} \equiv 0 \tag{4.6.4}$$

y también

$$[q, p]_{q,p} \equiv \frac{\partial q}{\partial q}^{1}\frac{\partial p}{\partial p}^{1} - \frac{\partial q}{\partial p}^{0}\frac{\partial p}{\partial q}^{0} = 1 \tag{4.6.5}$$

Por la propiedad **(1)** sabemos que el valor de estos corchetes es único, válido para todas las transformaciones canónicas. Obtenemos entonces un tipo adicional de corchete *fundamental* aplicando la transformación canónica $(q, p) \to (Q, P)$, con el resultado

$$[Q, P]_{q,p} \equiv [q, p]_{q,p} = 1 \tag{4.6.6}$$

cuyo significado queda claro con la siguiente propiedad.

[1] Esta propiedad es genérica del corchete de Poisson, y no aporta mayor información, ya que $[f, f]_{q,p} \equiv 0$ para todo f, lo que se deduce de su propiedad de antisimetría $[f, g]_{q,p} = -[g, f]_{q,p}$.

(3) *Condición de transformación canónica.* En función del corchete de Poisson podemos obtener una forma de verificación directa para comprobar si la transformacion $(q,p) \to (Q,P)$ para un sistema unidimensional es una transformación canónica. Recordando la condición simpléctica $\det M = 1$ para la transformación canónica (descrita en la sección 4.12.2), y la definición del corchete de Poisson para las funciones Q, P, esto es, el corchete $[Q,P]_{q,p}$, llegamos al resultado

$$\det M \equiv [Q,P]_{q,p} = 1 \tag{4.6.7}$$

Esto es, para que la transformación $(q,p) \to (Q,P)$ sea canónica el corchete de Poisson de las nuevas variables canónicas respecto a las variables canónicas originales debe ser la unidad.

- Este resultado es válido para el sistema unidimensional de forma directa, dado que la condición simpléctica 4.12.17, desarrollando su lado izquierdo, se reduce en este caso unidimensional a

$$\begin{pmatrix} [Q,Q] & [Q,P] \\ [P,Q] & [P,P] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.6.8}$$

  esto es, a las condiciones triviales

$$[Q,Q] = 0 \quad , \quad [P,P] = 0 \tag{4.6.9}$$

  junto con

$$[Q,P] = -[P,Q] = 1 \tag{4.6.10}$$

- Cuando el sistema no es unidimensional la condición simpléctica resulta ser, utilizando la misma notación matricial

$$\begin{pmatrix} [Q_i,Q_j] & [Q_i,P_j] \\ [P_i,Q_j] & [P_i,P_j] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.6.11}$$

  siendo δ_{ij} los elementos de la matriz unidad. Este igualdad nos lleva a las condiciones generalizadas para la transformación canónica, en la forma

$$[Q_i,Q_j] = 0 \quad , \quad [P_i,P_j] = 0 \tag{4.6.12}$$

  junto con

$$[Q_i,P_j] = \delta_{ij} \quad , \quad -[P_i,Q_j] = \delta_{ij} \tag{4.6.13}$$

  La condición para el determinante de la matriz M se escribe en este caso

$$\det M = \prod_i [Q_i,P_i] = 1 \tag{4.6.14}$$

Propiedades matemáticas adicionales El corchete de Poisson tiene, por su propia expresión matemática, unas propiedades adicionales, que serán muy útiles y nos servirán para simplificar los cálculos en la práctica, y que pasamos a enumerar:

(1) *Propiedad cíclica* Dadas *tres* funciones f, g, h definidas en el espacio de fases, se satisface la denominada propiedad cíclica

$$[f,[g,h]] + [h,[f,g]] + [g,[h,f]] = 0 \tag{4.6.15}$$

omitiendo por simplicidad, si no es relevante, las variables cañonicas que definen el espacio de fases. Aquí debemos entender que cada uno de los corchetes individuales, por ejemplo $[f,g]$, define siempre a su vez una función adicional en el espacio de fases. Además la denominación *cíclica* tiene su origen en la secuencia de las funciones, guardando un mismo orden relativo dentro del ciclo, fgh, hfg, ghf.

(2) *Propiedades algebraicas* Estas propiedades, que enunciamos sin demostración, pero que pueden verificarse de forma directa, nos permitirán reducir cualquier corchete de Poisson, y por tanto calcularlo de forma sencilla, mediante su desarrollo en una serie de productos de funciones por corchetes de Poisson fundamentales. En particular, tenemos la propiedad general

$$[fg, h] = f[g, h] + g[f, h] \tag{4.6.16}$$

siendo f, g, h funciones definidas en el espacio de fases, junto con las propiedades específicas

$$[f(q), p] = f'(q)[q, p] \equiv f'(q) \tag{4.6.17}$$

$$[q, g(p)] = g'(p)[q, p] \equiv g'(p) \tag{4.6.18}$$

donde la prima denota derivada de la función respecto a su argumento.

4.6.2. Ecuaciones de movimiento y Leyes de conservación

En esta acción analizamos la conservación en el tiempo de funciones definidas en el espacio de fases, desde el punto de vista matemático, lo que representa físicamente la conservación de la cantidad dada durante la evolución del sistema, descrito por el Hamiltoniano y las variables canónicas $(q(t), p(t)$ que satisfacen las ecuaciones de Hamilton correspondientes. En este sentido, la expresión función constante debe entenderse como una función del espacio de fases que es una constante del movimiento del sistema.

Ecuación del movimiento Planteamos aquí una ecuación de movimiento en la forma más general posible, como la ley que establece la variación temporal de cualquier función f definida en el espacio de fases, ó *cantidad dinámica*, y por tanto dependiente de las variables canónicas y posiblemente del tiempo, $f \equiv f(q, p, t)$.
Dada su dependencia funcional, la ecuación de movimiento para f satisface

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.6.19}$$

y teniendo en cuenta que la dinámica de las variables canónicas está gobernada por las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} \equiv -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{4.6.20}$$

llegamos a la expresión en función del corchete de Poisson

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.6.21}$$

Ecuaciones de Hamilton en términos del corchete de Poisson Una vez obtenido este resultado general, podemos comprobar que efectivamente obtenemos las ecuaciones de Hamilton como las ecuaciones de movimiento de las variables q y p

$$\frac{dq}{dt} = [q, H] + \cancelto{0}{\frac{\partial q}{\partial t}} = \frac{\partial q}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{4.6.22}$$

$$\frac{dp}{dt} = [p, H] + \cancelto{0}{\frac{\partial p}{\partial t}} = -\frac{\partial p}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{4.6.23}$$

ó de forma conjunta, utilizando la notación simpléctica, obtenemos

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = [\boldsymbol{\xi}, H] \tag{4.6.24}$$

Leyes de conservación Las leyes de conservación que se deducen de esta ecuación de movimiento se expresan de forma directa como

$$\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow \ f = \text{cte} \tag{4.6.25}$$

que da lugar, entre otros, a tres ejemplos representativos:

- *Hamiltoniano*
$$\frac{dH}{dt} \equiv \cancel{[H,H]}^{0} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{4.6.26}$$
que es la tercera ecuación de Hamilton: si el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo es un cantidad conservada.

- *Constante independiente del tiempo*
$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Rightarrow \ \frac{df}{dt} \equiv [f, H] = 0 \tag{4.6.27}$$
que nos indica que una función que no depende explícitamente del tiempo es una constante si su corchete de Poisson con el Hamiltoniano da un valor cero.

- *Constante adicional del movimiento* Si f, g son constantes del movimiento, esto es, satisfacen
$$\frac{df}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{dg}{dt} = 0 \tag{4.6.28}$$
entonces su corchete de Poisson $[f, g]$ también es constante de movimiento, esto es,
$$\frac{d}{dt}[f, g] = 0 \tag{4.6.29}$$
Aplicando esta propiedad de forma sucesiva, podríamos obtener en principio todas las constantes de movimiento del sistema a partir de dos constantes dadas. Sin embargo, el método tiene sus restricciones, por ejemplo si durante este procedimiento llegamos a una solución trivial, esto es, cuando $[f, g]$ es una mera constante numérica. En este caso no podemos seguir avanzando, y no podemos descartar que existan más constantes del movimiento, únicamente podemos deducir que con este método no pueden obtenerse.

4.6.3. Aplicación. Integración directa de la ecuación del movimiento

Consideremos la ecuación de movimiento para las variables canónicas, expresada en términos de los corchetes de Poisson

$$\frac{dq}{dt} = [q, H] \quad , \quad \frac{dp}{dt} = [p, H] \tag{4.6.30}$$

Del mismo obtendríamos la ecuación de movimiento para la propia derivada dq/dt, ya que aplicaríamos directamente su definición

$$\frac{d}{dt}\frac{dq}{dt} \equiv \frac{d^2q}{dt^2} = [\frac{dq}{dt}, H] \tag{4.6.31}$$

lo que nos llevaría a, utilizando la ecuación original del movimiento para $q(t)$,

$$\frac{d^2q}{dt^2} = [[q, H], H] \tag{4.6.32}$$

El procedimiento puede aplicarse sucesivamente, y obtenemos por ejemplo la ecuación de movimiento de la derivada segunda

$$\frac{d^3q}{dt^3} = [\frac{d^2q}{dt^2}, H] = [[[q, H], H], H] \tag{4.6.33}$$

El procedimiento sería completamente análogo para la variable canónica p. La conclusión es que podemos obtener cualquier derivada temporal de la variable q (ó la variable p) en función de sus sucesivos corchetes de Poisson con el Hamiltoniano, recordando que cada corchetes representará una función definida en el espacio de fases.

Aplicación La aplicación es directa ya que si conocemos todas las derivadas de la función q podemos obtener el valor $q(t)$ realizando el desarrollo de Taylor correspondiente. En particular, si $t = 0$ es la condición inicial del movimiento, la coordenada del sistema en el tiempo t estará dada por el desarrollo en serie respecto a $t = 0$

$$q(t) = q(0) + \dot{q}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{q}(0)t^2 + \frac{1}{6}\dddot{q}(0)t^3 + .. \tag{4.6.34}$$

siendo respectivamente

$$\dot{q}(0) = [q, H]_{t=0} \quad , \quad \ddot{q}(0) = [[q, H], H]_{t=0} \quad , \quad \dddot{q}(0) = [[[q, H], H], H]_{t=0} \quad , \quad .. \tag{4.6.35}$$

Aquí la evaluación en $t = 0$ representa formalmente la substitución en cada resultado de todas las variables y el tiempo por sus valores iniciales, esto es,

$$t = 0 \quad , \quad q = q(0) \quad , \quad p = p(0) \tag{4.6.36}$$

Y respecto a la variable canónica p el resultado final sería totalmente análogo

$$p(t) = p(0) + \dot{p}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{p}(0)t^2 + \frac{1}{6}\dddot{p}(0)t^3 + .. \tag{4.6.37}$$

siendo respectivamente

$$\dot{p}(0) = [p, H]_{t=0} \quad , \quad \ddot{p}(0) = [[p, H], H]_{t=0} \quad , \quad \dddot{p}(0) = [[[p, H], H], H]_{t=0} \quad , \quad .. \tag{4.6.38}$$

Con este método podemos obtener el desarrollo en serie de la solución $(q(t), p(t)$ hasta cualquier orden arbitrario, y por tanto, la solución al movimiento del sistema con una precisión arbitraria. No obstante, sólo en casos determinados, podremos inducir del desarrollo en serie una expresión analítica exacta para $q(t), p(t)$.

4.6.4. Transformaciones infinitesimales

Notación simpléctica Hemos visto en la sección 4.4.2, que en notación simpléctica la transformación infinitesimal en el espacio de fases $(q, p) \to (q + \delta q, p + \delta p)$ se escribe

$$\delta\boldsymbol{\xi} = \varepsilon\, J \cdot \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\xi}} \tag{4.6.39}$$

siendo $\delta\boldsymbol{\xi}$ la variación infinitesimal de las variables canónicas y G el generador de la transformación, dado en la forma habitual por un definición funcional de tipo 2, $G \equiv G(q, P, t)$.
Revisando esta expresión con ayuda de los corchetes de Poisson y sus propiedades, vemos que tenemos, por un lado,

$$[\boldsymbol{\xi}, G] \equiv \begin{pmatrix} [q, G] \\ \\ [p, G] \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial p}[q, p] \\ \\ \frac{\partial G}{\partial q}[p, q] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial p} \\ \\ -\frac{\partial G}{\partial q} \end{pmatrix} \equiv J \cdot \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\xi}} \tag{4.6.40}$$

Ecuación de la transformación infinitesimal Y por tanto, aplicando este resultado, vemos que la ecuación de la transformación infinitesimal en términos del corchete de Poisson se escribe en la forma más directa, sin necesidad de utilizar la notación simpléctica,

$$\delta\boldsymbol{\xi} = \varepsilon[\boldsymbol{\xi}, G] \tag{4.6.41}$$

Además este resultado es extensible a cualquier función f definida en el espacio de fases, de forma que su variación infinitesimal, derivada de la acción del generador G, estaría dada por

$$\delta f \equiv \varepsilon[f, G] \tag{4.6.42}$$

Ésta es una de las ecuaciones más importantes del formalismo Hamiltoniano, y que contribuye en mayor medida que otras a su relevancia dentro de la Física teórica.

4.6.5. Ejemplos

• **Traslación temporal** Para la traslación temporal, el parámetro infinitesimal ε es igual al intervalo de tiempo transcurrido, también infinitesimal

$$\varepsilon \equiv dt \tag{4.6.43}$$

y la variación infinitesimal de las variables canónicas $\delta\boldsymbol{\xi}$ debe corresponder a la variación que sufren durante este tiempo dt. Esta variación está generada por la evolución temporal del sistema (esto es, por la dinámica del sistema), y por tanto se debe satisfacer

$$\delta q \equiv \dot{q}dt \quad , \quad \delta p \equiv \dot{p}dt \tag{4.6.44}$$

esto es, debemos tener la equivalencia

$$[\boldsymbol{\xi}, G]dt \equiv \delta\boldsymbol{\xi} \equiv \dot{\boldsymbol{\xi}}dt \tag{4.6.45}$$

Éste es un ejemplo claro en el que no tenemos una expresión explícita del generador G, pero sí conocemos con claridad cuál es el resultado de la transformación. Como habíamos anticipado en la sección 4.4.2, el resultado anterior nos debe servir para obtener la expresión explícita del generador[1]. Utilizando la ecuación *dinámica* del movimiento en términos del corchete de Poisson (4.6.24)

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = [\boldsymbol{\xi}, H] \tag{4.6.46}$$

en la expresión anterior, obtenemos la equivalencia

$$[\boldsymbol{\xi}, G] \equiv [\boldsymbol{\xi}, H] \tag{4.6.47}$$

y siendo H arbitrario, deducimos que para la traslación temporal

$$t \to t + dt \quad , \quad q(t) \to q(t + dt) \quad , \quad p(t) \to p(t + dt) \tag{4.6.48}$$

el generador está dado por el propio Hamiltoniano del sistema, en la forma

$$G \equiv H \to \; G(q, P, t) = H(q, P, t) \tag{4.6.49}$$

si estamos trabajando con la representación de tipo 2. Físicamente diríamos que el Hamitoniano es el generador de la evolución temporal del sistema.

O de forma inversa, como corolario: el movimiento del sistema corresponde a la aplicación *continua* en el tiempo de una transformación canónica cuyo generador es el Hamiltoniano del sistema. Este es el fundamento principal de la denominada *teoría de Hamilton−Jacobi*, que nos permite obtener la solución del problema $(q(t), p(t))$ aplicando la transformación que retrotae al sistema a sus valores iniciales $(q(0), p(0))$. Una vez encontrada ó conocida esta transformación, aplicando su transformación inversa, obtenemos los valores finales $(q(t), p(t))$ en función de los valores iniciales $(q(0), p(0))$, esto es, obtenemos la solución del sistema. Esta teoría de Hamilton−Jacobi es el objeto de análisis del capítulo 5.

• **Transformación del Hamiltoniano** A diferencia de la variación infinitesimal de las variables canónicas $\delta\boldsymbol{\xi} \equiv (\delta q, \delta p)$, para calcular la variación infinitesimal del Hamiltoniano, δH, bajo la transformación canónica infinitesimal de generador G, debemos tener en cuenta que, tras la transformación, el propio Hamiltoniano cambia por definición $K \equiv H + \frac{\partial F}{\partial t}$, y no sólo sufre una variación δH, *inducida* por la variación $\delta\boldsymbol{\xi}$. Por ello, tendremos en general que

$$\delta H \neq \varepsilon[H, G] \tag{4.6.50}$$

[1] En cualquier caso, esta expresión explícita estará dada siempre en la representación elegida para el generador G, de la forma más habitual en el tipo 2, $G \equiv G(q, P, t)$.

y por tanto, para hallar su valor correcto, en primer lugar deberemos definirla de forma correcta.

Sabemos que por definición el nuevo Hamiltoniano *evolucionado* será el Hamiltoniano para las variables canónicas *evolucionadas*, esto es, será la función $H(\boldsymbol{\xi}+\delta\boldsymbol{\xi},\varepsilon)$. Sabemos también que como resultado de la transformación canónica el Hamiltoniano quedaría *modificado* en la forma, $K(\boldsymbol{\xi}+\delta\boldsymbol{\xi},\varepsilon)=H(\boldsymbol{\xi},0)+\partial F/\partial t$. Pero estas dos funciones no son compatibles entre sí. La primera es el Hamiltoniano *real* del sistema que por continuidad proviene del Hamiltoniano inicial, para $\varepsilon=0$. La segunda es el Hamiltoniano que obtendríamos si no tuvieramos en cuenta su propia evolución. Entonces, lo que le *queda* a $K(\boldsymbol{\xi}+\delta\boldsymbol{\xi},\varepsilon)$ para ser el valor real $H(\boldsymbol{\xi}+\delta\boldsymbol{\xi},\varepsilon)$ será efecto de la variación δH, que con esta deducción definimos en la forma

$$\delta H \equiv H(\boldsymbol{\xi}+\delta\boldsymbol{\xi},\varepsilon)-K(\boldsymbol{\xi}+\delta\boldsymbol{\xi},\varepsilon)\equiv H(\boldsymbol{\xi}+\delta\boldsymbol{\xi},\varepsilon)-H(\boldsymbol{\xi},0)-\frac{\partial F}{\partial t} \tag{4.6.51}$$

Teniendo en cuenta que la transformación es infinitesimal, y que la representación es de tipo 2, este último término está representado por

$$F_2 \equiv qP+\varepsilon G(q,P,t) \Rightarrow \ \frac{\partial F}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial G}{\partial t} \tag{4.6.52}$$

mientras que el primero es directamente el efecto de la transformación infinitesimal sobre una función, en este caso H, que no cambia de forma, y por tanto se satisface

$$H(\boldsymbol{\xi}+\delta\boldsymbol{\xi},\varepsilon)-H(\boldsymbol{\xi},0)\equiv\varepsilon[H,G] \tag{4.6.53}$$

Uniendo ambos resultados llegamos a la ley de transformación infinitesimal del Hamiltoniano, expresada en la forma

$$\delta H \equiv \varepsilon[H,G]-\varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}=-\varepsilon[G,H]-\varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}\equiv-\varepsilon\frac{dG}{dt} \tag{4.6.54}$$

es decir, es proporcional a la derivada temporal, de acuerdo con la dinámica del Hamiltoniano, del propio generador G.

Corolario En el caso que G sea una constante del movimiento, entonces el Hamiltoniano se mantiene invariante bajo la transformación canónica generada por G. Esto es[1]

$$G=\text{cte} \rightarrow \ \frac{dG}{dt}=0 \Rightarrow \ \delta H\equiv-\varepsilon\frac{dG}{dt}=0 \Rightarrow \ H=\text{inv.} \tag{4.6.55}$$

Ejemplo final Como ejemplo final, si tomamos como generador el propio Hamiltoniano, $G=H$, que como hemos visto anteriormente, es el generador de la evolución temporal, para $\varepsilon=dt$, tenemos

$$\delta H\equiv-dt\frac{dH}{dt}\equiv-dH \tag{4.6.56}$$

ó

$$\delta H+dH\equiv 0 \tag{4.6.57}$$

Que ambas contribuciones se cancelen idénticamente indica que el Hamiltoniano se mantiene invariante frente a la evolución temporal que el mismo genera. Es el resultado trivial esperado que nos indica que la evolución temporal del sistema se produce en todo momento por efecto de un *mismo* Hamiltoniano, digamos el definido inicialmente.

[1] El concepto de invariancia no guarda relación con la constancia en el movimiento, y expresa el hecho que la función no cambia de forma tras la transformación. Sería el análogo a exigir $K\equiv H+\partial F/\partial t\equiv H$ para la transformación F, y que además K y H tengan la misma dependencia funcional en sus argumentos Q,P y q,p, respectivamente. Véase por ejemplo el ejercicio 4.7.7.

4.6.6. Propiedades de simetría

Propiedades de simetría Analizando la ecuación de variación del Hamiltoniano para la transformación infinitesimal

$$\delta H = -\varepsilon \frac{dG}{dt} \tag{4.6.58}$$

donde en el lado izquierdo figura la variación de *forma* del Hamiltoniano, y en el lado derecho la acción del generador G, vemos que si podemos asegurar la *invariancia de forma* del Hamiltoniano

$$\delta H = 0 \tag{4.6.59}$$

bajo la transformación dada, entonces necesariamente concluímos que el generador es una constante del movimiento, en lo que sería el inverso del corolario de la sección anterior.
De esta forma podemos obtener las constantes del movimiento del sistema si analizamos las transformaciones que dejan invariante al Hamiltoniano

$$\delta H = 0 \Rightarrow \; G = \text{cte} \tag{4.6.60}$$

Las transformaciones con estas propiedades, que son propiedades relativas al sistema bajo estudio, ya que dependen directamente del Hamiltoniano, se denominan genéricamente las *propiedades de simetría* del sistema Hamiltoniano dado[1].

Teoremas de conservación Analizamos aquí los dos teoremas de conservación[2] que están asociados a las propiedades de simetría más sencillas que puede tener un sistema Hamiltoniano:

- **Conservación del momento conjugado** Si H no cambia bajo la traslación de la coordenada q, esto es, bajo la transformación infinitesimal

$$Q = q + \varepsilon \tag{4.6.61}$$

decimos que el sistema es simétrico bajo la traslación espacial. Para esta transformación el generador está dado por la condición

$$F_2 = qP + \varepsilon G(q, P, t) \Rightarrow \; Q \equiv \frac{\partial F_2}{\partial P} = q + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P} \simeq q + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p} \equiv q + \varepsilon \tag{4.6.62}$$

luego tenemos

$$\frac{\partial G}{\partial p} = 1 \Rightarrow \; G = p \tag{4.6.63}$$

Entonces, analizando la ecuación para la variación infinitesimal del Hamiltoniano para esta transformación, dada la propiedad de simetría,

$$0 \equiv \delta H = -\varepsilon \frac{dp}{dt} \Rightarrow \; p = \text{cte} \tag{4.6.64}$$

hemos deducido el *Teorema de conservación del momento conjugado* de la coordenada q, asociado a la simetría del sistema bajo traslación espacial.

[1] Las propiedades de simetría pueden analizarse desde distintos puntos de vista. En el capítulo 13, se analizan las simetrías utilizando su expresión más matemática, en particular para ecuaciones diferenciales ordinarias, pero tanto su contenido como sus resultados son fácilmente extrapolables a los sistemas Hamiltonianos, dado que desde el punto de vista puramente matemático estos sistemas quedan descritos también por ecuaciones diferenciales ordinarias (las ecuaciones de Hamilton).

[2] La diferencia, al menos formal, entre un *Teorema* de conservación y una *Ley* de conservación reside en que el teorema está asociado a una propiedad de simetría con una cierta naturaleza física, mientras que la ley de conservación se asocia a una propiedad de simetría de naturaleza más matemática, o con un significado físico menor. Así hablamos por ejemplo del Teorema de conservación del momento lineal o del momento angular, o de una ley de conservación derivada de la invariancia del sistema bajo cambio de escala.

- **Conservación del momento angular** Vamos a considerar en particular la transformación que consiste en la rotación del sistema en un ángulo infinitesimal $d\theta$ alrededor del eje que tiene la dirección del vector unitario $\boldsymbol{n}$, considerado arbitrario.
  En notación vectorial, la ecuación de la transformación canónica está dada por

$$\delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{n} d\theta \times \boldsymbol{r} \tag{4.6.65}$$

  siendo $\boldsymbol{r}$ el vector de posición del sistema[1].
  Para esta transformación con función generadora (en notación vectorial)

$$F_2 = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{P} + d\theta \; G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{P}, t) \tag{4.6.67}$$

  el generador está dado por la condición

$$\boldsymbol{r} + \delta \boldsymbol{r} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{P}} = \boldsymbol{r} + d\theta \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{P}} \simeq \boldsymbol{r} + d\theta \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}} \equiv \boldsymbol{r} + \boldsymbol{n} d\theta \times \boldsymbol{r} \tag{4.6.68}$$

  luego tenemos

$$\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r} \tag{4.6.69}$$

  con la solución

$$G = \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \equiv \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L} \tag{4.6.70}$$

  Analizada la transformación, si H no cambia bajo la rotación de la coordenada $\boldsymbol{r}$ alrededor del eje con vector unitario $\boldsymbol{n}$, decimos que el sistema es simétrico bajo esta rotación. Y en ese caso se deduce el *Teorema de conservación de la componente del momento angular*

$$0 \equiv \delta H = -d\theta \frac{d\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L}}{dt} \Rightarrow \; \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L} = \text{cte} \tag{4.6.71}$$

  donde $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L}$ representa la componente del momento angular $\boldsymbol{L}$ en la dirección del eje de simetría.

4.7. Ejercicios resueltos

4.7.1. Invariancia frente a transformaciones canónicas

Sean f, g dos cantidades que dependen de las variables canónicas y posiblemente del tiempo, y sea $[f, g]$ su corchete de Poisson.

(a) Demuestre que $[f, g]$ es invariante bajo las transformaciones canónicas. Será suficiente que demuestre el enunciado para funciones que no dependen explícitamente del tiempo. Primero justifique esta afirmación.

(b) Demuestre de nuevo la invariancia del corchete de Poisson realizando el cálculo completo en el caso de una transformación canónica arbitraria.

(c) Demuestre de nuevo la invariancia del corchete de Poisson realizando el cálculo paso a paso para el caso concreto de una transformación canónica generada por una función generadora de tipo 1.

(a) En la definición de cualquier corchete de Poisson, digamos $[f, g]$, el tiempo sólo aparece de forma implícita, por lo que el valor de t actúa en cualquier caso como mero parámetro. Siendo así,

[1] Esta expresión se corresponde con la fórmula conocida para la rotación

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{4.6.66}$$

con la identificación $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \boldsymbol{n}$.

es suficiente probar el enunciado para funciones en un instante arbitrario del tiempo, y quedará probado para cualquier instante de tiempo. Y por extensión será suficiente probarlo para funciones que no dependen del tiempo.

Desde un punto de vista puramente teórico, esto es, sin entrar en ningún caso detallado, siempre se podrá redefinir de forma arbitraria una de las cantidades, digamos g, como el Hamiltoniano de un supuesto sistema dinámico ficticio, esto es, $H \equiv g$. Entonces, ya que las funciones del enunciado no dependen explícitamente del tiempo, el corchete de Poisson correspondiente no es sino la derivada temporal de la cantidad f para el Hamiltoniano H:

$$[f, g] \equiv [f, H] \equiv \frac{df}{dt} \tag{4.7.1}$$

Ahora, como el tiempo es independiente de las variables (q, p) del sistema, el valor de la derivada temporal de la función f no puede depender de la elección concreta de (q, p), por lo que necesariamente para cualesquiera variables (Q, P) relacionadas con (q, p) por una transformación canónica, tenemos la invariancia requerida, al ser

$$[f, g]_{q,p} \equiv [f, H]_{q,p} \equiv \frac{df}{dt} \equiv [f, H]_{Q,P} \equiv [f, g]_{Q,P} \tag{4.7.2}$$

Además, que la transformación de variables deba ser canónica se comprueba por lo siguiente. En la relación anterior queda incluida la invariancia de las propias ecuaciones de Hamilton, tomando $f = q$ ó $f = p$, y por tanto, la transformación entre estas variables (Q, P) y (q, p) necesariamente debe ser canónica. En conclusión, el corchete de Poisson es invariante bajo transformaciones canónicas.

(b) Partimos, para las dos funciones f, g arbitrarias, de la definición de su corchete de Poisson en el sistema (q, p)

$$[f, g]_{q,p} \equiv \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} \tag{4.7.3}$$

donde para cada factor, aplicando la transformación canónica, debemos tener, aplicando sucesivamente la regla de la cadena,

$$\frac{\partial f}{\partial q} \equiv \frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial p} \equiv \frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p} \tag{4.7.4}$$

y

$$\frac{\partial g}{\partial q} \equiv \frac{\partial g}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q} \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial p} \equiv \frac{\partial g}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p} \tag{4.7.5}$$

Multiplicando uno a uno los términos correspondientes en la expresión inicial, y agrupando el resultado, obtenemos la factorización

$$[f, g]_{q,p} = \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\right)[f, g]_{Q,P} \tag{4.7.6}$$

Y en virtud de que la transformación $(q, p) \to (Q, P)$ es canónica, esto es,

$$[Q, P]_{q,p} \equiv \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1 \tag{4.7.7}$$

se deduce que

$$[f, g]_{q,p} = 1 \cdot [f, g]_{Q,P} = [f, g]_{Q,P} \tag{4.7.8}$$

esto es, el corchete de Poisson $[f, g]$ para cualquier par de funciones f, g arbitrarias es invariante bajo transformaciones canónicas.

(c) Comprobamos ahora este resultado para el caso particular de una transformación de tipo 1, para la función generadora $F \equiv F_1(q, Q)$. Para ello bastará demostrar que efectivamente bajo la transformación dada

$$[Q, P]_{q,p} = 1 \tag{4.7.9}$$

ya que entonces se deduciría directamente que

$$[f, g]_{q,p} = [f, g]_{Q,P} \tag{4.7.10}$$

Partiendo entonces de la expresión completamente detallada del corchete

$$[Q, P]_{q,p} \equiv \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)_p \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_q - \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_q \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)_p \tag{4.7.11}$$

reinterpretamos cada uno de los factores para el tipo 1 de transformación canónica. El primer factor puede interpretarse en la forma

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)_{dp=0} \tag{4.7.12}$$

al ser $p =$ cte equivalente a la condición diferencial $dp = 0$, y podemos proceder de forma análoga con los restantes factores. Si hacemos además de la ley de la transformación infinitesimal correspondiente para las variables dependientes p, P

$$dP = \frac{\partial P}{\partial q} dq + \frac{\partial P}{\partial Q} dQ \tag{4.7.13}$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial q} dq + \frac{\partial p}{\partial Q} dQ \tag{4.7.14}$$

podemos obtener su expresión completa del corchete $[Q, P]$ en función exclusivamente de las variables independientes de la transformación, (q, Q).

En detalle, para el primer factor, evaluamos realmente

$$dp = \frac{\partial p}{\partial q} dq + \frac{\partial p}{\partial Q} dQ = 0 \tag{4.7.15}$$

y despejando de aquí la derivada parcial que necesitamos

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)_p = -\frac{(\partial p/\partial q)_Q}{(\partial p/\partial Q)_q} \tag{4.7.16}$$

Para el segundo factor, dado que las funciones p, P son las variables dependientes de la transformación, y se deriva respecto a q, nos basta en este caso reorganizar las derivadas parciales en la forma

$$\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_q = \frac{(\partial P/\partial Q)_q}{(\partial p/\partial Q)_q} \tag{4.7.17}$$

para obtener la expresión requerida. Lo mismo sucede con el tercer factor, con la expresión final

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_q = \frac{1}{(\partial p/\partial Q)_q} \tag{4.7.18}$$

Por último, el cuarto factor

$$\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)_p \tag{4.7.19}$$

requiere introducir la solución de

$$dp = \frac{\partial p}{\partial q}dq + \frac{\partial p}{\partial Q}dQ = 0 \Rightarrow \; dQ = -\frac{(\partial p/\partial q)_Q}{(\partial p/\partial Q)_q}dq \tag{4.7.20}$$

para la diferencia dq, en la expresión del diferencial dP, en la forma

$$(dP)_{dp=0} = \left(\frac{\partial P}{\partial q}dq + \frac{\partial P}{\partial Q}dQ\right)_{dp=0} = -\left(\frac{\partial P}{\partial Q}\right)_q \frac{(\partial p/\partial q)_Q}{(\partial p/\partial Q)_q} + \frac{\partial P}{\partial q}dq \tag{4.7.21}$$

Con ello, el cuarto factor tiene la expresión

$$\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)_p = \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)_Q - \left(\frac{\partial P}{\partial Q}\right)_q \frac{(\partial p/\partial q)_Q}{(\partial p/\partial Q)_q} \tag{4.7.22}$$

Reagrupando estas expresiones, el corchete de Poisson, tras la transformación canónica, quedaría dado por la simplificación

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \\ &= -\frac{(\partial p/\partial q)_Q}{(\partial p/\partial Q)_q}\frac{(\partial P/\partial Q)_q}{(\partial p/\partial Q)_q} - \frac{(\partial P/\partial q)_Q}{(\partial p/\partial Q)_q} + \frac{(\partial p/\partial q)_Q}{(\partial p/\partial Q)_q}\frac{(\partial P/\partial Q)_q}{(\partial p/\partial Q)_q} \\ &= -\frac{(\partial P/\partial q)_Q}{(\partial p/\partial Q)_q} \end{aligned} \tag{4.7.23}$$

Finalmente dado que asumimos la existencia de una función generadora $F_1(q, Q)$, los momentos están definidos por

$$p \equiv \left(\frac{\partial F_1}{\partial q}\right)_Q \quad , \quad P \equiv -\left(\frac{\partial F_1}{\partial Q}\right)_q \tag{4.7.24}$$

fórmulas que al introducirse en el único factor anterior, aplicando la continuidad de las derivadas parciales de F_1, nos lleva al resultado pedido

$$\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{(\partial P/\partial q)_Q}{(\partial p/\partial Q)_q} = \frac{\partial^2 F_1/\partial q \partial Q}{\partial^2 F_1/\partial Q \partial q} = 1 \tag{4.7.25}$$

Por tanto, el corchete de Poisson resulta invariante bajo la transformación definida por la función generadora del tipo 1. Para los demás tipos de funciones generadoras, el análisis y la conclusión serían totalmente análogos.

4.7.2. Cantidades conservadas para Hamiltoniano bidimensional (M)

Considere el siguiente Hamiltoniano en dos dimensiones

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2 \tag{4.7.26}$$

donde a y b son constantes.

(a) Verifique, mediante un cálculo directo utilizando las ecuaciones de Hamilton del sistema, si se conservan o no las siguientes cantidades

$$f \equiv p_2 - b\frac{q_2}{q_1} \quad , \quad g \equiv q_2 e^t \quad , \quad h \equiv q_1 e^{-t} \tag{4.7.27}$$

(b) Analice de nuevo la conservación de las cantidades anteriores utilizando ahora los corchetes de Poisson del sistema.

(c) Enuncie cuál es el número máximo de constantes independientes del sistema, y explique de qué forma pueden obtenerse.

(d) Finalmente utilice el conjunto de cuatro constantes independientes obtenidas en el apartado anterior para determinar la ley de movimiento $(q(t), p(t))$ del sistema.

(a) En el cálculo directo debemos utilizar las ecuaciones de Hamilton para determinar la derivada respecto al tiempo de cualquier función de las variables canónicas. A partir del Hamiltoniano, obtenemos dichas ecuaciones en la forma

$$\dot{q}_i \equiv \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i \equiv -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{4.7.28}$$

para $i = 1, 2$, con el resultado

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = q_1 \quad , \quad \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = -q_2 \tag{4.7.29}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -p_1 + 2aq_1 \quad , \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = p_2 - 2bq_2 \tag{4.7.30}$$

Y a partir de estas ecuaciones, deducimos la expresión de las derivadas temporales de las cantidades definidas en el enunciado, con el resultado

$$\begin{aligned} f = f(q_1, q_2, p_2) \Rightarrow \ \dot{f} \equiv \frac{df}{dt} &\equiv \frac{\partial f}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial f}{\partial p_2}\dot{p}_2 \\ &= b\frac{q_2}{q_1^2}\dot{q}_1 - b\frac{1}{q_1}\dot{q}_2 + \dot{p}_2 = p_2 - 2bq_2 + 2b\frac{q_2}{q_1} \not\equiv 0 \end{aligned} \tag{4.7.31}$$

Por tanto, ya que $\dot{f}$ es distinto de idénticamente cero, f no es una cantidad conservada ó *constante del movimiento*. De forma análoga, obtenemos para g y h

$$\dot{g} = e^t\,(\dot{q}_2 + q_2) = e^t\,(-q_2 + q_2) \equiv 0 \tag{4.7.32}$$

$$\dot{h} = e^{-t}\,(\dot{q}_1 - q_1) = e^t\,(q_1 - q_1) \equiv 0 \tag{4.7.33}$$

Por tanto, tanto g como h son constantes del movimiento.

(b) Una forma más elegante de resolver el problema es, como indica el enunciado, utilizando los corchetes de Poisson. Recordamos que una cantidad $f(q, p, t)$ se conserva si su derivada total respecto al tiempo es idénticamente nula, y en el formalismo Hamiltoniano, tal ley de conservación

se deduce directamente del corchete de Poisson de la función f con el Hamiltoniano H, ya que se satisface (utilizando el convenio de suma de Einstein de la suma en los índices repetidos)

$$[f,H] \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \equiv \frac{df}{dt} - \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.7.34}$$

Esto es,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f,H] \tag{4.7.35}$$

Para verificar entonces la conservación de las funciones del enunciado, comenzamos evaluando los corchetes de Poisson del Hamiltoniano con las cantidades dadas,

$$[f,H] = 2b\frac{q_2}{q_1} + p_2 - 2bq_2 \tag{4.7.36}$$

$$[g,H] = -q_2 e^t \equiv -g \tag{4.7.37}$$

$$[h,H] = q_1 e^{-t} \equiv h \tag{4.7.38}$$

donde hemos hecho uso del valor de los corchetes fundamentales

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij} \tag{4.7.39}$$

donde la δ de Kronecker es la unidad, si $i = j$, y cero cuando $i \neq j$. Además hemos utilizado las propiedades generales del corchete de Poisson

$$[q, A(p)] = A'(p) \quad , \quad [B(q), p] = B'(q) \tag{4.7.40}$$

que pueden demostrarse por cálculo directo. Por ejemplo

$$[q, A(p)] \equiv \frac{\partial q}{\partial q}\frac{\partial A(p)}{\partial p} - \frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial A(p)}{\partial q} = 1 \cdot A'(p) - 0 \cdot 0 = A'(p) \tag{4.7.41}$$

Por otro lado, la derivada parcial respecto al tiempo satisface

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial t} = q_2 e^t \equiv g \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -q_1 e^{-t} = -h \tag{4.7.42}$$

Reuniendo los resultados, obtenemos las derivadas totales respecto al tiempo

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f,H] = 2b\frac{q_2}{q_1} + p_2 - 2bq_2 \not\equiv 0 \tag{4.7.43}$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + [g,H] = -g + g \equiv 0 \tag{4.7.44}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + [h,H] = h - h \equiv 0 \tag{4.7.45}$$

verificando de nuevo que la única función que no es constante del movimiento es la función f.

(c) Tanto g como h se conservan, son constantes del movimiento, mientras que f no lo hace. Ya que el sistema tiene 2 grados de libertad (esto es, dos coordenadas) tenemos 4 ecuaciones de Hamilton. Al integrarlas necesitaremos 4 constantes de integración. Como las cantidades que se conservan se como funciones de las variables canónicas, y posiblemente del tiempo, el número máximo de constantes independientes será 4.
Por definición dichas constantes existen siempre, y estarán relacionadas con los condiciones iniciales del movimiento, $(q_1(0), q_2(0), p_1(0), p_2(0))$. Lo que no sucederá en general es que las constantes del movimiento puedan encontrarse de forma analítica. Esto es, la dinámica del sistema puede tener una estructura compleja que no permita esta identificación *analítica* de las condiciones iniciales con las constantes del movimiento. La obtención general de las constantes de movimiento

está directamente relacionada con la existencia de integrales primeras del movimiento y las simetrías dinámicas. En la sección 15.1 se detallan los aspectos más avanzados de esta metodología en función de los generadores de la transformación de simetría asociada.

Prescindiendo de la metodología general, trabajamos aquí de una forma más práctica para obtener el conjunto de las 4 constantes independientes del movimiento. Dado que estas constantes permiten obtener la ley de movimiento del sistema, es *imprescindible* que al menos una de las constantes dependa explícitamente del tiempo. La selección de esta constante, al depender del tiempo, es la parte más complicada del procedimiento ya que no tendremos un argumento de simetría en el que apoyarnos. Por ello, dado el carácter básico de este ejercicio, consideremos por simplicidad que conocemos dicha constante, eligiéndola como la función anterior

$$g = q_2 e^t \tag{4.7.46}$$

Si analizamos la dependencia funcional del Hamiltoniano H, vemos que no depende explícitamente del tiempo, por lo que será una constante del movimiento, al ser

$$\frac{dH}{dt} \equiv \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \; H = \text{cte} \tag{4.7.47}$$

En el ejercicio 4.7.4 se demuestra que si f_1, f_2 son constantes del movimiento, su corchete de Poisson $[f_1, f_2]$ también será constante del movimiento. Ésta será la herramienta fundamental para obtener, cuando sea posible, nuevas constantes del movimiento a partir de constantes conocidas.

En nuestro caso tenemos que evaluar entonces

$$[g, H] \equiv \frac{dg}{dt} - \frac{\partial g}{\partial t} = 0 - g = -g \tag{4.7.48}$$

de forma que no obtenemos una nueva constante en este caso, ya que el resultado obtenido $-g$ es dependiente de la constante inicial g. Hubieramos obtenido el mismo resultado si hubieramos elegido inicialmente h como la constante dependiente del tiempo en lugar de g. Una solución alternativa es proponer, dada la dependencia funcional del Hamiltoniano, una constante de movimiento φ lineal en los momentos

$$\varphi \equiv K_j(q)p_j + K(q) = K_1(q)p_1 + K_2(q)p_2 + K(q) \tag{4.7.49}$$

donde K, K_j son funciones de las coordenadas q, de forma muy similar al procedimiento dentro del formalismo Lagrangiano para la obtención de las integrales primeras del movimiento (véase la sección 15.1.2). Ya que no depende explícitamente del tiempo, la condición que debe satisfacer φ es directamente

$$[\varphi, H] \equiv \frac{d\varphi}{dt} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 - 0 = 0 \tag{4.7.50}$$

Introduciendo la dependencia funcional de φ en coordenadas y momentos en este corchetes, desarrollamos e igualamos los coeficientes de las potencias en los momentos, obteniendo las tres condiciones (véase la resolución en Maxima) para las funciones K_1, K_2, K de las coordenadas, por determinar, en la forma

$$2aK_1q_1 + \frac{\partial K}{\partial q_1}q_1 - \frac{\partial K}{\partial q_2}q_2 - 2bK_2q_2 = 0 \tag{4.7.51}$$

$$K_2 + \frac{\partial K_2}{\partial q_1}q_1 - \frac{\partial K_2}{\partial q_2}q_2 = 0 \tag{4.7.52}$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial q_1}q_1 - K_1 - \frac{\partial K_1}{\partial q_2}q_2 = 0 \tag{4.7.53}$$

ó

$$\Gamma(K_1) = K_1 \tag{4.7.54}$$

$$\Gamma(K_2) = -K_2 \tag{4.7.55}$$

$$\Gamma(K) = 2bq_2K_2 - 2aq_1K_1 \tag{4.7.56}$$

siendo Γ el operador lineal

$$\Gamma \equiv q_1\frac{\partial}{\partial q_1} - q_2\frac{\partial}{\partial q_2} \tag{4.7.57}$$

Sabiendo que $\Gamma(q_1K_1) = q_1\Gamma(K_1) + K_1\Gamma(q_1) = 2q_1K_1$, al ser $\Gamma(K_1) = K_1$, y que $\Gamma(q_2K_2) = q_2\Gamma(K_2) + K_2\Gamma(q_2) = -2q_2K_2$, al ser $\Gamma(K_2) = -K_2$, la tercera de estas condiciones se puede escribir

$$\Gamma(\Phi) = 0 \quad , \quad \Phi \equiv K + aq_1K_1 + bq_2K_2 \tag{4.7.58}$$

Una posible solución a este conjunto de condiciones será la que corresponda al propio Hamiltoniano, al ser $\varphi = H$, y $[H, H] = 0$. De hecho, éste el motivo por el que se selecciona la constante genérica φ con una dependencia funcional en coordenadas y momentos similar a la del Hamiltoniano. La constante que corresponde al propio Hamiltoniano, $\varphi = H$, tiene las soluciones

$$\Gamma(K_1) = K_1 \Rightarrow\ K_1 = q_1 \quad , \quad \Gamma(K_2) = -K_2 \Rightarrow\ K_2 = -q_2 \tag{4.7.59}$$

junto a

$$\Gamma(\Phi) = 0 \Rightarrow\ \Phi \equiv 0 \Rightarrow\ K = -aq_1K_1 - bq_2K_2 = bq_2^2 - aq_1^2 \tag{4.7.60}$$

Lo que buscamos ahora es una solución independiente del Hamiltoniano, y sólo necesitamos una solución particular. Podriamos elegir los mismos valores para K_1, K_2 y elegir una solución distinta para Φ, en este caso

$$\Gamma(\Phi) = 0 \Rightarrow\ \Phi = q_1q_2 \tag{4.7.61}$$

y el resultado sería la función

$$G(q,p) = q_1p_1 - q_2p_2 + bq_2^2 - aq_1^2 + q_1q_2 \equiv H(q,p) + q_1q_2 \tag{4.7.62}$$

que efectivamente es constante del movimiento

$$[G, H] = 0 \tag{4.7.63}$$

pero que no es independiente de las constantes ya conocidas (g, h, H) al ser

$$G \equiv H + q_1q_2 \equiv H + gh \tag{4.7.64}$$

Nos fijamos entonces en la modificación de las funciones K_1, K_2 intercambiando su dependencia funcional respecto al Hamiltoniano, esto es, para $K_1 = K_1(q_2)$ y $K_2 = K_2(q_1)$ con la solución directa

$$\Gamma(K_1) = K_1 \Rightarrow\ K_1 = \frac{1}{q_2} \quad , \quad \Gamma(K_2) = -K_2 \Rightarrow\ K_2 = \frac{1}{q_1} \tag{4.7.65}$$

manteniendo la solución $\Phi = 0$, esto es, con

$$K = -aq_1K_1 - bq_2K_2 = -a\frac{q_1}{q_2} - b\frac{q_2}{q_1} \tag{4.7.66}$$

y el resultado sería la función

$$G(q,p) = \frac{p_1}{q_2} + \frac{p_2}{q_1} - a\frac{q_1}{q_2} - b\frac{q_2}{q_1} \tag{4.7.67}$$

que efectivamente es constante del movimiento

$$[G, H] = 0 \tag{4.7.68}$$

pero sí es independiente de las constantes ya conocidas (g, h, H). Teniendo en cuenta que q_1q_2 es constante, podemos redefinir la función G en la forma

$$\begin{aligned} &G(q,p) = \frac{p_1}{q_2} + \frac{p_2}{q_1} - a\frac{q_1}{q_2} - b\frac{q_2}{q_1} = \frac{1}{q_1q_2}\left(q_1p_1 + q_2p_2 - aq_1^2 - bq_2^2\right) \\ &\Rightarrow\ G(q,p) \equiv q_1p_1 + q_2p_2 - aq_1^2 - bq_2^2 \end{aligned} \tag{4.7.69}$$

(d) El conjunto de las cuatro constantes independientes (H, g, h, G) están relacionadas con los valores iniciales del movimiento. Para obtener la ley de movimiento nos basta con determinar la dependencia funcional de estas constantes, ya que al menos una depende explícitamente del tiempo, con los valores iniciales.
Obtenemos en primer lugar la ley de movimiento de las coordenadas, en la forma

$$g \equiv q_2 e^t = \text{cte} \equiv C \Rightarrow \; q_2(t) \equiv Ce^{-t} = q_{20}e^{-t} \tag{4.7.70}$$

siendo $q_{20} = q_2(0)$ el valor inicial de la coordenada q_2. De forma análoga

$$h \equiv q_1 e^{-t} = \text{cte} \equiv C \Rightarrow \; q_1(t) \equiv Ce^{t} = q_{10}e^{t} \tag{4.7.71}$$

siendo $q_{10} = q_1(0)$ el valor inicial de la coordenada q_1. Para obtener ahora la ley de movimiento para los momentos despejamos los momentos individuales de las constantes restantes

$$H \equiv q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2 = \text{cte} \quad , \quad G \equiv q_1 p_1 + q_2 p_2 - a q_1^2 - b q_2^2 = \text{cte} \tag{4.7.72}$$

en la forma

$$p_1 = \frac{1}{2q_1}\left(G + H + 2aq_1^2\right) \quad , \quad p_2 = \frac{1}{2q_2}\left(G - H + 2bq_2^2\right) \tag{4.7.73}$$

e introduciendo la dependencia temporal de $q_1(t), q_2(t)$, obtenemos $p_1(t), p_2(t)$ en la forma

$$p_1(t) = \frac{1}{2q_1}(G + H) + aq_1 = \frac{G+H}{2q_{10}}e^{-t} + aq_{10}e^{t} \tag{4.7.74}$$

siendo

$$p_{10} \equiv p_1(0) = \frac{G+H}{2q_{10}} + aq_{10} \tag{4.7.75}$$

junto a

$$p_2(t) = \frac{1}{2q_2}(G - H) + bq_2 = \frac{G-H}{2q_{20}}e^{t} + bq_{20}e^{-t} \tag{4.7.76}$$

siendo

$$p_{20} \equiv p_2(0) = \frac{G-H}{2q_{20}} + bq_{20} \tag{4.7.77}$$

El último paso, que no detallamos aquí, sería despejar, a partir de las definiciones de los momentos iniciales p_{10}, p_{20} el valor de las constantes G, H en función de los datos iniciales del problema, $(q_{10}, q_{20}, p_{10}, p_{20})$.

4.7.3. Transformación canónica de distintos tipos (M)

Considere la siguiente transformación de las variables canónicas

$$Q = \ln\left(\frac{\operatorname{sen} p}{q}\right) \quad , \quad P = q\cot p \tag{4.7.78}$$

(a) Verifique que la transformación es canónica utilizando el método de la notación simpléctica y el método de los corchetes de Poisson.

(b) Verifique de nuevo que la transformación es canónica utilizando el método de la función generadora. Para ello, determine todas las funciones generadoras que se puedan calcular. Si no se pueden obtener funciones generadoras de todos los tipos indique el motivo.

(c) Como aplicación práctica de esta transformación canónica, se plantea el siguiente Hamiltoniano

$$H = q^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 p} - 1\right) \tag{4.7.79}$$

Analice en particular las cantidades conservadas después de aplicar la transformación, y deduzca entonces cuáles son las cantidades conservadas para el Hamiltoniano inicial. Verifique que con esta transformación canónica se simplifica el análisis del sistema dinámico.

(a) Según el método de la notación simpléctica, una transformación $(q,p)\to(Q,P)$ cuya matriz jacobiana es, por definición,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \tag{4.7.80}$$

será canónica si se satisface

$$\mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^T = \mathcal{J} \tag{4.7.81}$$

ó en notación matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.7.82}$$

Tomando determinantes en la ecuación matricial anterior, ya que el determinante de $\mathcal{J}$ es igual a uno, esto es equivalente a que:

$$\det\mathcal{M} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1 \tag{4.7.83}$$

Más aún, vemos que la expresión del determinante de $\mathcal{M}$ es justamente la definición del corchete de Poisson de las nuevas variables (Q,P), por lo que si verificamos que $\det\mathcal{M} \equiv [Q,P]_{q,p} = 1$ habremos verificado que la transformación es canónica por el método simpléctico y por los corchetes de Poisson simultáneamente.
Veamos por tanto el valor de $[Q,P]$ para la transformación dada:

$$[Q,P]_{q,p} \equiv \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \csc^2 p - \cot^2 p \equiv 1 \tag{4.7.84}$$

Por lo tanto, la transformación es canónica.

(b) Dado que se trata de una transformación canónica debe existir una función generadora asociada. Dado que según las ecuaciones de transformación del enunciado, podemos obtener una dependencia funcional sencilla de las variables (q,P) respecto a las variables (p,Q), podremos

hallar fácilmente, si existe, una función generadora del tipo 3, en la forma $F \equiv F_3(p, Q, t)$. Para su determinación necesitaremos aplicar la condición de invariancia del Principio de Hamilton bajo la transformación canónica del tipo 3.

Sabemos que por definición

$$F_3(p, Q, t) \equiv F_1(q, Q, t) - pq \tag{4.7.85}$$

y que se debe cumplir

$$pdq - PdQ \equiv dF_1 \equiv d(F3 + pq) \tag{4.7.86}$$

siendo el lado derecho una diferencial exacta en las variables (p, Q). En consecuencia, la función generadora de tipo 3 será aquella que satisfaga

$$pdq - PdQ - d(pq) \equiv -qdp - PdQ \equiv dF_3 \tag{4.7.87}$$

Aplicando ahora el resultado a la transformación canónica, que reescribimos en la forma

$$q = e^{-Q} \operatorname{sen} p \quad , \quad P = e^{-Q} \cos p \tag{4.7.88}$$

encontramos efectivamente la expresión de una diferencial exacta, al ser

$$dF_3 \equiv -qdp - PdQ = -e^{-Q} \operatorname{sen} p \, dp - e^{-Q} \cos p \, dQ \equiv d\left(e^{-Q} \cos p\right) \tag{4.7.89}$$

y realizando su integración directa, obtenemos su expresión final

$$F_3(p, Q, t) = e^{-Q} \cos p + C(t) \tag{4.7.90}$$

donde $C(t)$ es una función arbitraria del tiempo.

Partiendo de este resultado para F_3, es fácil encontrar las funciones generadoras de los otros tres tipos, ya que únicamente tenemos que aplicar la transformación de Legendre apropiada. En particular, al ser las diferenciales de estas funciones, por definición

$$\begin{aligned} dF_1 &= pdq - PdQ \\ dF_2 &= pdq + QdP \\ dF_3 &= -qdp - PdQ \\ dF_4 &= -qdp + QdP \end{aligned} \tag{4.7.91}$$

vemos que se relacionan con F_3 en la forma

$$\begin{aligned} dF_1 &= pdq - PdQ = dF_3 + d(pq) \rightarrow \; F_1 = F_3 + pq \\ dF_2 &= pdq + QdP = dF_3 + d(pq + PQ) \rightarrow \; F_2 = F_1 + PQ \\ dF_4 &= -qdp + QdP = dF_3 + d(PQ) \rightarrow \; F_4 = F_3 + PQ \end{aligned} \tag{4.7.92}$$

esto es, mediante las transformaciones de Legendre mencionadas.

Para el tipo 1, tenemos entonces

$$F_1(q, Q, t) = F_3(p(q, Q), Q, t) + p(q, Q) \cdot q \tag{4.7.93}$$

con

$$p(q, Q) = \operatorname{arcsen}(qe^{Q}) \tag{4.7.94}$$

y por tanto,

$$F_1(q, Q, t) = \sqrt{e^{-2Q} - q^2} + q \operatorname{arcsen}(qe^{Q}) + C(t) \tag{4.7.95}$$

Para el tipo 2, tenemos entonces

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q(q, P), t) + P \cdot Q(q, P) \tag{4.7.96}$$

con

$$Q(q,P) = -\ln\sqrt{q^2+P^2} \tag{4.7.97}$$

Y por tanto,

$$F_2(q,P,t) = P + q\,\text{arcsen}\left(\frac{q}{\sqrt{q^2+P^2}}\right) - P\ln\sqrt{q^2+P^2} + C(t) \tag{4.7.98}$$

Finalmente, para el tipo 4, tenemos

$$F_4(p,P,t) = F_3(p,Q(p,P),t) + P\cdot Q(p,P) \tag{4.7.99}$$

donde

$$Q(p,P) = \ln\left(\frac{\cos p}{P}\right) \tag{4.7.100}$$

Y por tanto,

$$F_4(p,P,t) = P + P\ln\left(\frac{\cos p}{P}\right) + C(t) \tag{4.7.101}$$

(c) Obtengamos el Hamiltoniano transformado, por ejemplo, a partir de F_3, asumiendo por simplicidad $C(t)\equiv 0$,

$$K \equiv H + \frac{\partial F_3}{\partial t} = q^2\left(\frac{1}{\text{sen}^2\,p} - 1\right) = q^2\cot^2 p \equiv P^2 \tag{4.7.102}$$

En este caso, la nueva coordenada Q es cíclica, por lo que su momento conjugado P se conserva (y el Hamiltoniano K, por extensión, también). Resolviendo ahora las ecuaciones de Hamilton a partir del Hamiltoniano transformado, obtenemos:

$$\dot{P} \equiv \frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \Rightarrow\ P = \text{cte} \equiv c_1 \tag{4.7.103}$$

$$\dot{Q} \equiv \frac{\partial K}{\partial P} = 2P \Rightarrow\ Q = 2c_1 t + c_2 \equiv 2Pt + c_2 \tag{4.7.104}$$

Y de la última ecuación se deduce que la expresión $c_2 \equiv Q - 2Pt$ también será otra constante del movimiento, esta vez dependiente del tiempo.

En términos de las coordenadas originales, tendríamos que: $q\cot p$ es constante del movimiento (por serlo P), y que $\ln\left(\frac{\text{sen}\,p}{q}\right) - 2t\,q\cot p$ es constante del movimiento (por serlo c_2). Hemos encontrado entonces dos constantes del movimiento que se conservan, que son el número máximo de cantidades conservadas independientes en sistemas con un grado de libertad. Como el Hamiltoniano inicial no depende explícitamente del tiempo, también sería una cantidad conservada, pero no es independiente de las dos primeras.

4.7.4. Propiedad cíclica del corchete de Poisson (M)

Sean f y g dos constantes del movimiento. Utilizando cuando sea necesario la propiedad cíclica del corchete de Poisson

$$[[f,g],h] + [[h,f],g] + [[g,h],f] = 0 \tag{4.7.105}$$

siendo f, g, h funciones arbitrarias de q, p y posiblemente del tiempo,

(a) Demuestre que el corchete de Poisson $[f,g]$ también es una constante del movimiento.

(a) La demostración puede hacerse de forma directa. Ya que queremos evaluar la constancia de la cantidad $[f, g]$, partimos de la definición Hamiltoniana de su derivada temporal

$$\frac{d}{dt}[f, g] \equiv \frac{\partial}{\partial t}[f, g] + [[f, g], H] \tag{4.7.106}$$

Como la derivada parcial respecto al tiempo conmuta con las derivadas respecto a las coordenadas y momentos (ya que el tiempo actúa como un mero parámetro del sistema), el primer término de la derecha tiene el desarrollo

$$\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right] \tag{4.7.107}$$

Y en cada uno de estos términos, por ser f y g, como indica el enunciado, constantes del movimiento, podemos reintroducir su corchete de Poisson con el Hamiltoniano en la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = \Big[-[f, H], g\Big] + \Big[f, -[g, H]\Big] = [[H, f], g] + [[g, H], f] \tag{4.7.108}$$

Con ello, de la definición inicial, obtenemos la relación

$$\frac{d}{dt}[f, g] = [[H, f], g] + [[g, H], f] + [[f, g], H] \equiv 0 \tag{4.7.109}$$

en virtud de la propiedad cíclica del corchete de Poisson. Por tanto, $[f, g]$ también es una constante del movimiento.

4.7.5. Ejemplos de corchetes de Poisson (M)

Sean $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ las variables canónicas de un sistema cartesiano, $\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}$ el momento angular, con q_i, p_i, L_i las componentes cartesianas de $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{L}$, y en su caso, sean $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ vectores constantes del sistema cartesiano. Evalúe los siguientes corchetes de Poisson:

(a) $[L_i, q_j], [L_i, p_j], [L_i, L_j]$. Es conveniente utilizar la expresión cartesiana para las componentes de momento angular

$$L_i \equiv (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p})_i \equiv \epsilon_{ijk} q_j p_k \tag{4.7.110}$$

(con suma en los índices j, k), y en función del tensor totalmente antisimétrico, ϵ_{ijk}, que satisface además

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \tag{4.7.111}$$

(b) Utilizando los resultados obtenidos en el punto anterior, evalúe los corchetes

$$[\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{q}, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{p}] \quad , \quad [\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{L}, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{q}] \quad , \quad [\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{L}, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{L}] \tag{4.7.112}$$

(c) y los corchetes

$$[\boldsymbol{L}, \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p}] \quad , \quad [\boldsymbol{p}, q^n] \quad , \quad [\boldsymbol{p}, (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{q})^2] \tag{4.7.113}$$

donde hemos definido $q \equiv (\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q})^{1/2}$.

(a) Operando y utilizando las propiedades del corchete de Poisson, encontramos directamente

$$[L_i, q_j] = [\epsilon_{irs} q_r p_s, q_j] = \epsilon_{irs} q_r [p_s, q_j] = \epsilon_{ijr} q_r \tag{4.7.114}$$

al ser $[q_j, p_s] = \delta_{js}$ y $\epsilon_{ijr} = -\epsilon_{irj}$. En virtud de la antisimetría de ϵ_{ijr}, $\epsilon_{ijr} = 0$ siempre que se repitan alguno de los índices i, j, r. Por ejemplo, en componentes cartesianas tenemos los resultados

$$[L_x, x] = \epsilon_{11r} q_r \equiv 0 \tag{4.7.115}$$

$$[L_x, y] = \epsilon_{12r} q_r = \epsilon_{123} q_3 = z \tag{4.7.116}$$

$$[L_x, z] = \epsilon_{13r} q_r = \epsilon_{132} q_2 = -y \tag{4.7.117}$$

Del mismo modo,

$$[L_i, p_j] = [\epsilon_{irs} q_r p_s, p_j] = \epsilon_{irs} p_s \, [q_r, p_j] = \epsilon_{ijs} p_s \tag{4.7.118}$$

y por ejemplo, en componentes cartesianas

$$[L_x, p_x] = \epsilon_{11s} p_s \equiv 0 \tag{4.7.119}$$

$$[L_x, p_y] = \epsilon_{12s} p_s = \epsilon_{123} p_3 = p_z \tag{4.7.120}$$

$$[L_x, p_z] = \epsilon_{13s} q_s = \epsilon_{132} p_2 = -p_y \tag{4.7.121}$$

Por último,

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{irs} \epsilon_{jkl} \, [q_r p_s, q_k p_l] \tag{4.7.122}$$

donde, con suma en el índice i,

$$[q_r p_s, q_k p_l] = \frac{\partial q_r p_s}{\partial q_i} \frac{\partial q_k p_l}{\partial p_i} - \frac{\partial q_r p_s}{\partial p_i} \frac{\partial q_k p_l}{\partial q_i} = p_s q_k \delta_{rl} - q_r p_l \delta_{sk} \tag{4.7.123}$$

Por tanto,

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{irs} \epsilon_{sjk} q_r p_k - \epsilon_{isr} \epsilon_{rjk} q_k p_s \tag{4.7.124}$$

y al ser

$$\epsilon_{irs} \epsilon_{sjk} = \delta_{ij} \delta_{rk} - \delta_{ik} \delta_{rj} \quad , \quad \epsilon_{isr} \epsilon_{rjk} = \delta_{ij} \delta_{sk} - \delta_{ik} \delta_{sj} \tag{4.7.125}$$

llegamos a

$$[L_i, L_j] = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p} \delta_{ij} - q_j p_i - \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p} \delta_{ij} + q_i p_j = q_i p_j - q_j p_i \equiv \epsilon_{ijk} L_k \tag{4.7.126}$$

(b) Ahora, con suma en los índices i, j, tenemos directamente

$$[\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{q}, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{p}] \equiv [a_i q_i, b_j p_j] = a_i b_j \, [q_i, p_j] = a_i b_j \delta_{ij} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \tag{4.7.127}$$

Para el siguiente corchete, utilizando el resultado del apartado anterior, obtenemos

$$[\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{L}, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{q}] \equiv [a_i L_i, b_j q_j] = a_i b_j \, [L_i, q_j] = q_r \epsilon_{rij} a_i b_j = \boldsymbol{q} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{4.7.128}$$

y finalmente,

$$[\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{L}, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{L}] \equiv [a_i L_i, b_j L_j] = a_i b_j \, [L_i, L_j] = L_k \epsilon_{kij} a_i b_j = \boldsymbol{L} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{4.7.129}$$

(c) Para determinar $[\boldsymbol{L}, \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p}] \equiv [L_i, q_j p_j]$ con suma en j, desarrollamos completamente el corchete de Poisson, para obtener (sumando además en k)

$$\begin{aligned} [L_i, q_j p_j] &= \frac{\partial L_i}{\partial q_k} q_j \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial L_i}{\partial p_k} p_j \frac{\partial q_j}{\partial q_k} = q_j \frac{\partial L_i}{\partial q_j} - p_j \frac{\partial L_i}{\partial p_j} \\ &= q_j \frac{\partial \epsilon_{irs} q_r p_s}{\partial q_j} - p_j \frac{\partial \epsilon_{irs} q_r p_s}{\partial p_j} = \epsilon_{ijs} q_j p_s - \epsilon_{irs} q_r p_s \equiv 0 \end{aligned} \tag{4.7.130}$$

dado que aunque cambian los índices en los dos últimos términos, éstos son idénticos. Este resultado puede generalizarse como veremos de forma que

$$[L_i, f] \equiv 0 \tag{4.7.131}$$

para cualquier función escalar, como lo es la función que hemos estudiado, el producto escalar $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p}$.

Por otro lado, por las propiedades del corchete de Poisson

$$[\boldsymbol{p}, q^n] \equiv [p_i, q^n] = nq^{n-1}\frac{\partial q}{\partial q_j}[p_i, q_j] = -nq^{n-1}\frac{\partial q}{\partial q_j}\delta_{ij} = -nq^{n-1}\frac{\partial q}{\partial q_i} \tag{4.7.132}$$

Nos queda evaluar por separado la derivada parcial. Derivando el cuadrado del módulo del vector, llegamos fácilmente a

$$\boldsymbol{q}^2 \equiv q_j q_j \to 2q\frac{\partial q}{\partial q_i} = \frac{\partial q_j q_j}{\partial q_i} = 2q_j\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = 2q_i \equiv 2\boldsymbol{q} \tag{4.7.133}$$

Luego

$$[\boldsymbol{p}, q^n] = -nq^{n-1}\frac{q_i}{q} = -nq^{n-2}q_i \equiv -nq^{n-2}\boldsymbol{q} \tag{4.7.134}$$

Finalmente,

$$\left[\boldsymbol{p}, (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q})^2\right] \equiv [p_i, b_j q_j b_k q_k] = b_j b_k [p_i, q_j q_k] \tag{4.7.135}$$

y por las propiedades del corchete de Poisson

$$\left[\boldsymbol{p}, (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q})^2\right] = b_j b_k q_k [p_i, q_j] + b_j q_j b_k [p_i, q_k] = -2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q})\boldsymbol{b} \tag{4.7.136}$$

resultado que podría deducirse utilizando la demostración tensorial más directa

$$\left[\boldsymbol{p}, (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q})^2\right] = 2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q})[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q}] = 2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q})\boldsymbol{b} : [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = -2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q})\boldsymbol{b} \tag{4.7.137}$$

donde

$$\boldsymbol{b} : [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] = \boldsymbol{b} : \mathcal{I} = \boldsymbol{b} \tag{4.7.138}$$

siendo : el símbolo de la contracción tensorial, y donde $\mathcal{I}$ representa en este caso el tensor unidad de orden dos.

4.7.6. Partícula puntual con momento magnético

Sea un sistema con el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} - \gamma\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{B} \tag{4.7.139}$$

donde $\boldsymbol{B}$ es el vector de campo magnético, y γ es una constante. Este Hamiltoniano representa el movimiento de una partícula de masa m con momento magnético $\boldsymbol{\mu} \equiv \gamma\boldsymbol{L}$, en presencia del campo magnético $\boldsymbol{B}$. El factor de proporcionalidad γ se denomina *razón giromagnética* de la partícula.

(a) Justifique la expresión del término de interacción con el campo magnético. Discuta cuál es la configuración energética del sistema más favorable, y su influencia sobre el movimiento de la partícula.

(b) Defina las ecuaciones de movimiento para el vector momento angular $\boldsymbol{L}$, utilizando los corchetes de Poisson y su valor. Interprete físicamente el resultado.

(a) Con la identificación $H = T + V$, el término de interacción se escribe

$$V = -\gamma\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B} \tag{4.7.140}$$

y determina el alineamiento del vector $\boldsymbol{\mu}$ con el campo magnético exterior, y puede deducirse de la fuerza de Lorentz

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}V \tag{4.7.141}$$

cuando el modelo de la partícula puntual de carga q

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{4.7.142}$$

se sustituye por un dipolo puntual de momento magnético $\boldsymbol{\mu}$

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nabla}) \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{4.7.143}$$

al ser $\boldsymbol{\mu}$ un vector constante. Por último, la definición

$$\boldsymbol{\mu} \equiv \gamma \boldsymbol{L} \tag{4.7.144}$$

muestra que el origen del momento magnético es orbital, la corriente eléctrica que interacciona con el campo magnético está generada por el movimiento orbital de la partícula cargada.

Es energéticamente más favorable para el sistema (esto es, el valor de la energía es el mínimo) cuando $\boldsymbol{\mu}$ se sitúa paralelamente al campo externo. Dado que $\boldsymbol{\mu}$ es proporcional a $\boldsymbol{L}$, y $\boldsymbol{L}$ determina el plano de la órbita de la partícula, la partícula realiza su movimiento en un plano perpendicular al campo $\boldsymbol{B}$, cuando las condiciones iniciales lo permitan, como veremos en el apartado siguiente.

(b) Como toda función dependiente de las coordenadas y momentos, la ecuación de movimiento para $\boldsymbol{L}$ viene dada en función de su corchete de Poisson con el Hamiltoniano, en la forma

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = [\boldsymbol{L}, H] \tag{4.7.145}$$

ya que $\boldsymbol{L}$ no depende explícitamente del tiempo. Aplicando el Hamiltoniano del sistema, encontramos

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \left[\boldsymbol{L}, \frac{p^2}{2m} - \gamma \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{B}\right] = \left[\boldsymbol{L}, \frac{p^2}{2m}\right] - \gamma\,[\boldsymbol{L}, \boldsymbol{L}] \cdot \boldsymbol{B} \tag{4.7.146}$$

El primer corchete es nulo por ser de la forma $[f, \boldsymbol{L}]$, con f una función escalar (de simetría esférica), y $\boldsymbol{L}$ un momento angular respecto a un eje arbitrario. Por las propiedades del corchete de Poisson para las componentes del momento angular

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k \tag{4.7.147}$$

deducimos que

$$[\boldsymbol{L}, \boldsymbol{L}] \cdot \boldsymbol{B} = [L_i, L_j]\, B_j = \epsilon_{ijk} L_k B_j = \epsilon_{ijk} B_j L_k = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{L} \tag{4.7.148}$$

haciendo uso del convenio de índices repetidos.
En conclusión, la ecuación de movimiento solicitada queda

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = -\gamma \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L} \tag{4.7.149}$$

Es decir, el momento angular precesiona con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = -\gamma \boldsymbol{B}$ en torno a la dirección del campo magnético $\boldsymbol{B}$. Comprobamos además que cuando las condiciones iniciales son tales que la trayectoria se sitúa en un plano perpendicular al campo magnético, el momento angular se mantiene constante en el tiempo. Es decir, la trayectoria se realiza en dicho plano en todo momento.

4.7.7. Hamiltoniano con simetría de escala

Considere el siguiente Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{4.7.150}$$

en coordenadas esféricas, y donde $\boldsymbol{b}$ es un vector constante.

(a) Analice cómo se transforma el Hamiltoniano bajo la transformación de similaridad ó *transformación de escala*

$$\boldsymbol{R} = (1+\alpha)\boldsymbol{r} \tag{4.7.151}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}/(1+\alpha) \tag{4.7.152}$$

verificando que es una transformación canónica por el método de los corchetes de Poisson y por el método de la función generadora. ¿Existe algún invariante de la transformación canónica?

(b) Teniendo en cuenta la variación infinitesimal de las variables canónicas con el tiempo que se deduce de las ecuaciones de Hamilton

$$\delta\boldsymbol{r} \equiv \dot{\boldsymbol{r}}\delta t = [\boldsymbol{r}, H]\,\delta t \tag{4.7.153}$$

$$\delta\boldsymbol{p} \equiv \dot{\boldsymbol{p}}\delta t = [\boldsymbol{p}, H]\,\delta t \tag{4.7.154}$$

obtenga la expresión equivalente para la variación del Hamiltoniano bajo la transformación canónica infinitesimal de escala, en función de su generador G, que deberá determinar.

(c) Utilizando los resultados de los apartados anteriores, deduzca el valor del corchete de Poisson $[\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}, H]$, y a partir de la ley de movimiento de la cantidad $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}$, verifique la existencia de una integral del movimiento adicional.

(d) Justifique la utilidad del procedimiento realizado para comprobar la conservación de la cantidad obtenida frente al cálculo estándar de comprobación basado en los corchetes de Poisson y el Hamiltoniano inicial.

(e) Complete el ejercicio confirmando la existencia de esta integral del movimiento adicional, mediante el cálculo directo con el corchete de Poisson y el Hamiltoniano inicial.

(a) Efectivamente, la transformación es canónica dado que

$$[\boldsymbol{R}, \boldsymbol{P}] = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{r}} = (1+\alpha)\,\frac{1}{1+\alpha} - 0\cdot 0 = 1 \tag{4.7.155}$$

y la función generadora de tipo 2 por simple inspección es

$$F_2\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{P}\right) = (1+\alpha)\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{P}\right) \tag{4.7.156}$$

El valor $\alpha = 0$ corresponde a la transformación identidad, por lo que puede considerarse α un parámetro infinitesimal, y definirse la transformación general como una transformación canónica infinitesimal, con generador

$$G = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{P} \tag{4.7.157}$$

Al ser

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{P} \tag{4.7.158}$$

el producto escalar es un invariante de la transformación canónica. El Hamiltoniano no lo es, ya que queda multiplicado por $(1+\alpha)^2$. Ya que la función generadora no depende explícitamente del tiempo, el Hamiltoniano mantiene su forma funcional

$$K\left(\boldsymbol{R},\cdot\boldsymbol{P}\right)\equiv H\left(\boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{R}\right),\boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{P}\right)\right) \tag{4.7.159}$$

con el valor

$$K=\left(1+\alpha\right)^{2}\left(\frac{\boldsymbol{P}^{2}}{2m}+\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{R}}{R^{3}}\right) \tag{4.7.160}$$

luego

$$H\rightarrow\left(1+\alpha\right)^{-2}H \tag{4.7.161}$$

(b) Aplicamos el mismo procedimiento para el Hamiltoniano, considerando ahora que su variación se debe a la aplicación de la transformación canónica con generador G. La variación del Hamiltoniano bajo una transformación infinitesimal se determina con el corchete de Poisson del Hamiltoniano con el generador, en la forma

$$\delta H=\alpha\left[H,G\right]_{\alpha=0} \tag{4.7.162}$$

recordando que el corchete debe evaluarse para el valor $\alpha=0$, y dicha expresión sólo es cierta en el límite $\alpha\rightarrow 0$, en total concordancia con el caso de las variables canónicas, donde la expresión del enunciado sólo tiene sentido para $t=0$, y en el límite $\delta t\rightarrow 0$.

(c) Como hemos visto, la variación del Hamiltoniano es

$$\delta H\equiv\left(1+\alpha\right)^{-2}H-H \tag{4.7.163}$$

que en el límite $\alpha\rightarrow 0$ tiene el valor

$$\delta H\simeq\left(1-2\alpha\right)H-H=-2\alpha H \tag{4.7.164}$$

Por otro lado, para el generador en el instante inicial $\alpha=0$, tenemos

$$\alpha\left[H,G\right]_{\alpha=0}=\alpha\left[H,r\cdot p\right] \tag{4.7.165}$$

Aplicando la variación del Hamiltoniano bajo la acción del generador, esto es,

$$\delta H\equiv\alpha\left[H,G\right]_{\alpha=0} \tag{4.7.166}$$

comparando las dos ultimas expresiones, obtenemos el valor pedido del corchete de Poisson en la forma

$$\left[H,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}\right]=-2H \tag{4.7.167}$$

Una vez determinado este corchete, vemos que su valor es una constante de movimiento $=-2H$. Teniendo en cuenta que la cantidad $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}$ no depende del tiempo y que el Hamiltoniano es un constante de movimiento, su ecuación de movimiento correspondiente

$$\frac{d\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}\right)}{dt}\equiv\left[\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p},H\right]=2H \tag{4.7.168}$$

puede integrarse directamente, con el resultado

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}-2Ht=\text{cte} \tag{4.7.169}$$

obteniendo así una constante del movimiento adicional, relacionada con las propiedades de simetría del sistema bajo la transformación de similaridad (ó transformación de escala) aplicada.

(d) Logicamente el resultado anterior puede obtenerse directamente del Hamiltoniano inicial, comprobando su conservación con los corchetes de Poisson. Esto se realiza en el apartado siguiente. No obstante, la expresión de la constante del movimiento no es trivial, y con una inspección directa no suele detectarse la existencia de cantidades conservadas adicionales. En estos casos, resulta útil investigar la existencia o no de propiedades de simetría del sistema bajo una transformación canónica infinitesimal, como se ha realizado en este apartado.

(e) Definiendo la cantidad analizada $I \equiv \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p} - 2Ht$, su derivada total respecto del tiempo está dada por

$$\frac{dI}{dt} \equiv \frac{\partial I}{\partial t} + [I, H] \tag{4.7.170}$$

que se desarrolla en la forma

$$\frac{dI}{dt} = -2H + [\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p} - 2Ht, H] = -2H + [\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}, H] \tag{4.7.171}$$

por las propiedades del corchete de Poisson. El último corchete tiene la expresión

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}, H] &= \left[\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}, \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right] + \left[\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}, \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right] = \boldsymbol{p}\cdot\left[\boldsymbol{r}, \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right] + \boldsymbol{r}\cdot\left[\boldsymbol{p}, \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right]\cdot\boldsymbol{b} \\
&= \boldsymbol{p}\cdot[\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}]\cdot\frac{\boldsymbol{p}}{m} + \boldsymbol{r}\cdot[\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}]\,\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\cdot\boldsymbol{b} \\
&= \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} - \boldsymbol{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) : \boldsymbol{b}
\end{aligned} \tag{4.7.172}$$

Evaluando ahora el último término, donde el segundo factor es una contracción tensorial, tenemos

$$\boldsymbol{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) : \boldsymbol{b} \equiv r_i\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\frac{r_i}{r^3}\right) b_j = r_i b_j\left[\frac{1}{r^3}\frac{\partial r_i}{\partial r_j} - 3\frac{1}{r^4}r_i\frac{\partial r}{\partial r_j}\right] \tag{4.7.173}$$

Y al ser, como hemos visto en ocasiones anteriores,

$$2r\frac{\partial r}{\partial r_j} = \frac{\partial r^2}{\partial r_j} = 2r_j \tag{4.7.174}$$

tenemos finalmente

$$\boldsymbol{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) : b = b_i r_j\left(\frac{1}{r^3}\delta_{ij} - 3\frac{r_i r_j}{r^5}\right) = \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} - 3\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} = -2\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{4.7.175}$$

Por tanto, $[\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}, H]$ resulta ser

$$[\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}, H] = \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} + 2\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} = 2\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = 2H \tag{4.7.176}$$

con la consiguiente conservación de la cantidad estudiada

$$\frac{dI}{dt} = -2H + 2H \equiv 0 \tag{4.7.177}$$

4.7.8. Cantidades conservadas para el oscilador armónico

Considere el movimiento de una partícula de masa m en un potencial de tipo oscilador armónico $V = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$, con el plano orbital situado en el plano xy. El Hamiltoniano es entonces

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2\right) \equiv S_0 \tag{4.7.178}$$

Se definen, junto a esta cantidad S_0, las tres cantidades adicionales

$$S_1 \equiv \frac{1}{2m}\left(p_x^2 - p_y^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 - y^2\right) \tag{4.7.179}$$

$$S_2 \equiv \frac{1}{m}p_x p_y + m\omega^2 xy \tag{4.7.180}$$

$$S_3 \equiv \omega\left(xp_y - yp_x\right) \tag{4.7.181}$$

(a) Demuestre que el Hamiltoniano queda expresado en función de estas cantidades adicionales, en la forma

$$H^2 \equiv S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \tag{4.7.182}$$

(b) Evalúe los corchetes de Poisson de las cantidades S_i, para $i = 1, 2, 3$, con el Hamiltoniano. ¿Qué conclusiones se pueden obtener a partir de los resultados obtenidos?

(c) Evalúe los corchetes de Poisson de las cantidades S_i, para $i = 1, 2, 3$, entre sí. ¿Qué conclusiones se pueden obtener a partir de los resultados obtenidos?

(a) Dado que el Hamiltoniano se expresa como la suma de términos cuadráticos en coordenadas y momentos, un buen punto de partida es obtener expresiones similares a partir de las cantidades S, y ver cómo están relacionadas entre sí las expresiones obtenidas.
Para las dos primeras, S_0 y S_1, vemos que pueden escribirse como la suma y diferencia de términos cuadráticos

$$S_0 = \left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) + \left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2\right) \tag{4.7.183}$$

$$S_1 = \left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) - \left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2\right) \tag{4.7.184}$$

por lo que deducimos, directamente con la resta de sus cuadrados, que

$$\begin{aligned} S_0^2 - S_1^2 &= \left(\frac{p_x^2}{m} + m\omega^2 x^2\right)\left(\frac{p_y^2}{m} + m\omega^2 y^2\right) \\ &= S_2^2 + \omega^2\left(y^2 p_x^2 + x^2 p_y^2 - 2p_x p_y xy\right) = S_2^2 + S_3^2 \end{aligned} \tag{4.7.185}$$

Por tanto, obtenemos el resultado pedido, en la forma

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \tag{4.7.186}$$

(b) Evaluamos primero los corchetes de Poisson de S_i con el Hamiltoniano. Dada la dependencia funcional que hemos obtenido anteriormente, $S_0 = A(x, p_x) + B(y, p_y)$, $S_1 = A(x, p_x) - B(y, p_y)$, el resultado para el primer corchete es directo

$$[S_0, S_1] = [A + B, A - B] = -[A, B] + [B, A] = 2[B, A] \equiv 0 \tag{4.7.187}$$

dado que A y B dependen de las variables canónicas en distintos ejes, y por tanto sus corchetes de Poisson son nulos entre sí.

Por otro lado, aplicando las propiedades de los corchetes de Poisson, obtenemos

$$\begin{aligned}[S_0, S_2] &= \left[A(x,p_x), \frac{1}{m}p_xp_y + m\omega^2 xy\right] + \left[B(y,p_y), \frac{1}{m}p_xp_y + m\omega^2 xy\right] \\ &= \frac{1}{2}\omega^2\left(\left[x^2,p_x\right]p_y + \left[p_x^2,x\right]y + \left[y^2,p_y\right]p_x + \left[p_y^2,y\right]x\right) \\ &= \omega^2\left(xp_y - yp_x\right)\left([x,p_x] - [y,p_y]\right) \equiv 0\end{aligned} \tag{4.7.188}$$

de nuevo idénticamente cero, dado que

$$[x,p_x] = [y,p_y] = 1 \tag{4.7.189}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}[S_0, S_3] &= \omega\left[A(x,p_x), xp_y - yp_x\right] + \omega\left[B(y,p_y), xp_y - yp_x\right] \\ &= \frac{\omega}{2m}\left[p_x^2,x\right]p_y - \frac{1}{2}m\omega^3\left[x^2,p_x\right]y + \frac{1}{2}m\omega^3\left[y^2,p_y\right]x - \frac{\omega}{2m}\left[p_y^2,y\right]p_x \\ &= \frac{\omega}{m}\left([p_x,x] - [p_y,y]\right)\left(p_xp_y + m^2\omega^2 xy\right) \equiv 0\end{aligned} \tag{4.7.190}$$

dado que

$$[p_x,x] = [p_y,y] = -1 \tag{4.7.191}$$

Del carácter nulo de los corchetes de Poisson de S_i con el Hamiltoniano, deducimos que las tres cantidades S_i, así definidas, son constantes del movimiento.

(c) Pasamos a calcular los corchetes de Poisson de S_i. En primer lugar, tenemos

$$\begin{aligned}[S_1, S_2] &= \left[A(x,p_x), \frac{1}{m}p_xp_y + m\omega^2 xy\right] - \left[B\left(y,p_y\right), \frac{1}{m}p_xp_y + m\omega^2 xy\right] \\ &= \frac{1}{2}\omega^2\left(\left[x^2,p_x\right]p_y + \left[p_x^2,x\right]y - \left[y^2,p_y\right]p_x - \left[p_y^2,y\right]x\right) \\ &= \omega^2\left(xp_y - yp_x\right)\left([x,p_x] + [y,p_y]\right)\end{aligned} \tag{4.7.192}$$

resultado que al aplicar el valor de los corchetes fundamentales se reduce a

$$[S_1, S_2] = 2\omega S_3 \tag{4.7.193}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned}[S_1, S_3] &= \omega\left[A(x,p_x), xp_y - yp_x\right] - \omega\left[B\left(y,p_y\right), xp_y - yp_x\right] \\ &= \frac{\omega}{2m}\left[p_x^2,x\right]p_y - \frac{1}{2}m\omega^3\left[x^2,p_x\right]y - \frac{1}{2}m\omega^3\left[y^2,p_y\right]x + \frac{\omega}{2m}\left[p_y^2,y\right]p_x \\ &= -2\omega\frac{1}{m}\left(p_xp_y + m^2\omega^2 xy\right) = -2\omega S_2\end{aligned} \tag{4.7.194}$$

e intercambiando el orden de los factores

$$[S_3, S_1] = 2\omega S_2 \tag{4.7.195}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}[S_2, S_3] &= \left[\frac{1}{m}p_xp_y + m\omega^2 xy, \omega\left(xp_y - yp_x\right)\right] \\ &= \frac{\omega}{m}\left(p_y^2\left[p_x,x\right] - p_x^2\left[p_y,y\right]\right) + m\omega^3\left(x^2\left[y,p_y\right] - y^2\left[x,p_x\right]\right) \\ &= \frac{\omega}{m}\left(p_x^2 - p_y^2\right) + m\omega^3\left(x^2 - y^2\right) = 2\omega S_1\end{aligned} \tag{4.7.196}$$

Como conclusión, podemos reunir todos los resultados en una única fórmula tensorial

$$[S_i, S_j] = 2\omega\epsilon_{ijk}S_k \tag{4.7.197}$$

que muestra la misma estructura de corchetes que las componentes del momento angular

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk}L_k \tag{4.7.198}$$

Concluimos así que el *vector* de componentes $(2\omega)^{-1}(S_1, S_2, S_3)$ tiene los mismos corchetes de Poisson que las componentes de un *vector* momento angular abstracto. Recordando que el momento angular físico se relaciona con la simetría de un sistema bajo las rotaciones espaciales, este momento angular abstracto $(2\omega)^{-1}(S_1, S_2, S_3)$ debe estar relacionado con la simetría del sistema bajo las rotaciones, pero en el espacio físico, sino en el espacio de configuración interno, intrínseco del sistema.

4.7.9. Ley de movimiento en función de corchetes de Poisson

Sea $f(q(t), p(t))$ una función dada de las variables canónicas, que no depende explícitamente del tiempo t, y f_0 su valor en $t = 0$, y sea $H(q, p)$ el Hamiltoniano del sistema, supuesto independiente del tiempo.

(a) Determine el valor de la función en el instante t, utilizando los corchetes de Poisson para determinar los distintos términos de la expansión de Taylor

$$f(q(t), p(t)) \equiv f(t) = f_0 + \left(\frac{df}{dt}\right)_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_0 t^2 + .. \tag{4.7.199}$$

(b) Utilice el resultado del apartado anterior para encontrar la posición y el momento en el instante t de una partícula de masa m, sometida a una fuerza constante. Confirme que se obtiene el resultado esperado.

(c) Utilice el mismo resultado para encontrar la posición y el momento en el instante t de una partícula de masa m que realiza un movimiento armónico simple. Confirme que se obtiene el resultado esperado.

(a) Las sucesivas derivadas totales respecto al tiempo, para una cantidad f que no depende explícitamente del tiempo, están dadas en el formalismo Hamiltoniano por los sucesivos corchetes de Poisson

$$\frac{df}{dt} = [f, H] \tag{4.7.200}$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{d}{dt}[f, H] = [[f, H], H] \tag{4.7.201}$$

y siguientes. Por tanto, el desarrollo de Taylor para la función f será de la forma

$$f(t) = f_0 + ([f, H])_0 t + \frac{1}{2}([[f, H], H])_0 t^2 + .. \tag{4.7.202}$$

(b) Para una fuerza constante $F = -dV/dq \equiv$ cte, el potencial está dado por $V = -Fq$, y Hamiltoniano del sistema se escribe

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} - Fq \tag{4.7.203}$$

Una vez obtenido el Hamiltoniano, para obtener la solución al movimiento del sistema, podemos aplicar el resultado anterior para las dos variables canónicas, esto es, definiendo las funciones $f = p$ y $f = q$. Calculando los corchetes de Poisson obtenemos como primer resultado

$$[p, H] = \left[p, \frac{p^2}{2m} - Fq\right] = F \quad , \quad [q, H] = \left[q, \frac{p^2}{2m} - Fq\right] = \frac{p}{m} \tag{4.7.204}$$

y de aquí

$$[[p,H],H]=\left[F,\frac{p^2}{2m}-Fq\right]=0\quad,\quad[[q,H],H]=\left[\frac{p}{m},\frac{p^2}{2m}-Fq\right]=\frac{F}{m}\tag{4.7.205}$$

En este punto, dado que hemos obtenido valores constantes, todos los corchetes de Poisson sucesivos serán nulos.
Introduciendo estos valores en el desarrollo de Taylor de las cantidades $q(t)$ y $p(t)$, como indica el apartado anterior, deducimos que para una fuerza constante, la ley de movimiento exacta es

$$q(t)=q_0+\frac{p_0}{m}t+\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2\tag{4.7.206}$$

$$p(t)=p_0+Ft\tag{4.7.207}$$

que coincide con el resultado esperado.

Para el oscilador armónico, el Hamiltoniano es

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2\tag{4.7.208}$$

Con esta definición, los primeros corchetes de Poisson para la cantidad $f=q$ tienen el valor,

$$[q,H]=\frac{p}{m}\tag{4.7.209}$$

$$[[q,H],H]=\left[\frac{p}{m},H\right]=-\omega^2q\tag{4.7.210}$$

$$[[[q,H],H],H]=-\omega^2[q,H]=-\omega^2\frac{p}{m}\tag{4.7.211}$$

$$[[[[q,H],H],H],H]=-\omega^2\left[\frac{p}{m},H\right]=\omega^4q\tag{4.7.212}$$

y siguientes. Viendo la secuencia de valores obtenidos, y recordando el desarrollo en serie del seno y el coseno, la ley de movimiento para la coordenada resulta ser

$$\begin{aligned}q(t)&=q_0\left(1-\frac{1}{2}\omega^2t^2+\frac{1}{24}\omega^4t^4-..\right)+\frac{p_0}{m\omega}\left(\omega t-\frac{1}{6}\omega^3t^3+..\right)\\&=q_0\cos\omega t+\frac{p_0}{m\omega}\operatorname{sen}\omega t\end{aligned}\tag{4.7.213}$$

Para la cantidad $f=p$, llegaríamos de forma análoga al resultado

$$\begin{aligned}p(t)&=p_0\left(1-\frac{1}{2}\omega^2t^2+\frac{1}{24}\omega^4t^4-..\right)-m\omega q_0\left(\omega t-\frac{1}{6}\omega^3t^3+..\right)\\&=p_0\cos\omega t-m\omega q_0\operatorname{sen}\omega t\end{aligned}\tag{4.7.214}$$

Ambos resultados, para $q(t),p(t)$, son los esperados.

4.7.10. Corchetes de Poisson para partícula en campo magnético

Para una partícula cargada de masa m en el seno de un campo magnético, el Hamiltoniano del sistema es

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\right)^2 \tag{4.7.215}$$

siendo e la carga de la partícula, c la velocidad de la luz, y $\boldsymbol{A}$ el potencial vector, tal que el campo magnético está dado por las componentes

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \to B_i = \epsilon_{ijk}\nabla_j A_k \tag{4.7.216}$$

Obtenga la expresión de la velocidad de la partícula, y determine los corchetes de Poisson entre sí de sus distintas componentes cartesianas. Interprete físicamente el resultado en el caso de un campo magnético constante.

En el formalismo Hamiltoniano, la velocidad de la partícula se obtiene de la ecuación de Hamilton correspondiente a la variable q, esto es,

$$\boldsymbol{v} \equiv \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{1}{m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\right) \tag{4.7.217}$$

Por tanto, tenemos que determinar el valor de los corchetes de Poisson, en la notación tensorial,

$$[v_i, v_j] = \left[\frac{1}{m}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i(q)\right), \frac{1}{m}\left(p_j - \frac{e}{c}A_j(q)\right)\right] \tag{4.7.218}$$

Utilizando las propiedades de los corchetes de Poisson, deducimos que

$$[v_i, v_j] = -\frac{e}{m^2 c}\left([A_i(q), p_j] + [p_i, A_j(q)]\right) \tag{4.7.219}$$

y junto a

$$[A_i(q), p_j] = \nabla_k A_i\,[q_k, p_j] = \nabla_k A_i \delta_{kj} = \nabla_j A_i \tag{4.7.220}$$

$$[p_i, A_j(q)] = \nabla_k A_j\,[p_i, q_k] = -\nabla_k A_j \delta_{ki} = -\nabla_i A_j \tag{4.7.221}$$

llegamos al resultado final

$$[v_i, v_j] = \frac{e}{m^2 c}\left(\nabla_i A_j - \nabla_j A_i\right) = \frac{e}{m^2 c}\epsilon_{ijk}B_k \tag{4.7.222}$$

Como puede verse en el resultado anterior, en el caso de un campo constante, el corchete de Poisson de cualquier par de componentes de la velocidad es constante. En general, el corchete de Poisson de dos constantes del movimiento también es constante del movimiento (véase el ejercicio 4.7.4). Dicho esto, puede concluirse antes de realizar un cálculo detallado, que para un campo constante alguna de las componentes de la velocidad será constante del movimiento.

• En particular, la cuestión clave es que el Hamiltoniano depende únicamente de la velocidad, luego la constancia de cualquier componente de la velocidad se debe deducir de la expresión

$$[H, v_i] = 0 \tag{4.7.223}$$

para una cierta v_i. En notación en componentes, tenemos el desarrollo

$$[H, v_i] = [\frac{1}{2}mv_j v_j, v_i] = mv_j[v_i, v_j] = -\frac{e}{mc}\epsilon_{ijk}v_j B_k = -\frac{e}{mc}\left(\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)_i \tag{4.7.224}$$

esto es, en notación vectorial

$$[H, \mathbf{v}] = -\frac{e}{mc}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{4.7.225}$$

Si multiplicamos escalarmente por el vector $\mathbf{n}$ unitario en la dirección de $\mathbf{B}$ tenemos

$$\mathbf{n} \cdot [H, \mathbf{v}] = 0 \tag{4.7.226}$$

Hasta aquí no hemos exigido que el campo sea constante. Si lo es, su vector $\mathbf{n}$ será constante, y podemos introducirlo como factor constante en el corchete de Poisson, con el resultado

$$[H, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] = 0 \tag{4.7.227}$$

que indica que la componente de la velocidad en la dirección del campo $\mathbf{B}$ constante, es una constante del movimiento.
Además, el estudio de esta constante puede hacerse sin analizar en detalle el movimiento del sistema, según este desarrollo previo. Partiendo de la expresión obtenida

$$[H, \mathbf{v}] = -\frac{e}{mc}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{4.7.228}$$

dado que H es constante, $\mathbf{v}$ será constante, si el lado derecho $-\frac{e}{mc}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ es constante, y lo será cuando $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ sea cero, eso es, cuando $\mathbf{v}$ sea paralela a $\mathbf{B}$, y ésta es la componente que mencionamos en el párrafo anterior como *alguna* componente.

4.8. Ejercicios adicionales resumidos

Transformaciones canónicas

4.8.1. Aplicación sucesiva de dos transformaciones canónicas

Demuestre que la aplicación sucesiva de dos transformaciones canónicas infinitesimales del tipo 2,

$$F_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{P} + \delta\alpha \left(\boldsymbol{q}^2 + \boldsymbol{P}^2\right) \tag{4.8.1}$$

donde $\delta\alpha$ es un parámetro infinitesimal, es igual a la aplicación de una única transformación canónica con parámetro de magnitud $2\delta\alpha$, lo que constituye la *propiedad de grupo* de las transformaciones canónicas.

(a) Ecuaciones de transformación (rotación de ángulo $2\delta\alpha$ según los ejes perpendiculares a planos (q_i, p_i))

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{P} + 2\delta\alpha\, \boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} - 2\delta\alpha\, \boldsymbol{q} \tag{4.8.2}$$

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{P}} = \boldsymbol{q} + 2\delta\alpha\, \boldsymbol{P} = \boldsymbol{q} + 2\delta\alpha\, (\boldsymbol{p} - 2\delta\alpha\, \boldsymbol{q}) \approx \boldsymbol{q} + 2\delta\alpha\, \boldsymbol{p} \tag{4.8.3}$$

(b) Aplicación sucesiva de transformaciones

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P} - 2\delta\alpha\, \boldsymbol{Q} \tag{4.8.4}$$
$$\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{Q} + 2\delta\alpha\, \boldsymbol{P} \tag{4.8.5}$$

y en el mismo orden de aproximación

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{p} - 2\delta\alpha\, \boldsymbol{q} - 2\delta\alpha\, (\boldsymbol{q} + 2\delta\alpha\, \boldsymbol{p}) \approx \boldsymbol{p} - 4\delta\alpha\, \boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{p} - 2\,(\delta\alpha)'\, \boldsymbol{q} \tag{4.8.6}$$
$$\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{q} + 2\delta\alpha\, \boldsymbol{p} + 2\delta\alpha\, (\boldsymbol{p} - 2\delta\alpha\, \boldsymbol{q}) \approx \boldsymbol{q} + 4\delta\alpha\, \boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{q} + 2\,(\delta\alpha)'\, \boldsymbol{p} \tag{4.8.7}$$

con el parámetro $(\delta\alpha)' = 2\delta\alpha$.

4.8.2. Invariante bajo transformación canónica

Demuestre que la cantidad dinámica definida en el espacio de fases

$$f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{q}^2 + \boldsymbol{p}^2 \tag{4.8.8}$$

es un invariante para la transformación canónica infinitesimal analizada en el ejercicio 4.8.1.

(a)

$$f(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}) \equiv \boldsymbol{Q}^2 + \boldsymbol{P}^2 = (\boldsymbol{q} + 2\delta\alpha\,\boldsymbol{p})^2 + (\boldsymbol{p} - 2\delta\alpha\,\boldsymbol{q})^2 \approx \boldsymbol{q}^2 + \boldsymbol{p}^2 + O\left((\delta\alpha)^2\right) \tag{4.8.9}$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{q}^2 + \boldsymbol{p}^2 \equiv \boldsymbol{Q}^2 + \boldsymbol{P}^2 \;\Rightarrow\; f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \text{inv.} \tag{4.8.10}$$

Por ejemplo

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) &= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{q}^2\right) \\ K(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}) &= H(\boldsymbol{q}\left(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}\right),\boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}\right)) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{P}^2 + \boldsymbol{Q}^2\right) \end{aligned} \tag{4.8.11}$$

4.8.3. Transformación canónica para movimiento en caída libre

Determine la función generadora de tipo 2 que transforma el Hamiltoniano de una partícula de masa m en movimiento vertical en presencia de la gravedad

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq \tag{4.8.12}$$

en el Hamiltoniano de la partícula en un sistema de referencia en caída libre

$$K(Q,P) = \frac{P^2}{2m} \tag{4.8.13}$$

z

(a) Ley de movimiento

$$q(t) = q_0 + \frac{p_0}{m}t - \frac{1}{2}gt^2\ ,\ p(t) = p_0 - mgt \tag{4.8.14}$$

$$Q(t) = Q_0 + \frac{P_0}{m}t\ ,\ P(t) = \text{cte} \equiv P_0 \tag{4.8.15}$$

Instante inicial $t = 0$

$$Q(0) = q(0)\ ,\ P(0) = p(0) \rightarrow Q_0 = q_0\ ,\ P_0 = p_0 \tag{4.8.16}$$

(b1) Ecuaciones de transformación canónica

$$q(t) = Q_0 + \frac{P_0}{m}t - \frac{1}{2}gt^2 \equiv Q(t) - \frac{1}{2}gt^2 \tag{4.8.17}$$

$$p(t) = p_0 - mgt = P_0 - mgt \equiv P(t) - mgt \tag{4.8.18}$$

(b2) Función generadora

$$F \equiv F_2(q,P,t) \tag{4.8.19}$$

$$
\begin{aligned}
&p = \left(\frac{\partial F_2}{\partial q}\right)_P = P - mgt \longrightarrow F_2(q,P,t) = q(P-mgt) + f(P,t) \\
&q + \frac{1}{2}gt^2 = Q = \left(\frac{\partial F_2}{\partial P}\right)_q = q + \frac{\partial f}{\partial P} \longrightarrow f(P,t) = \frac{1}{2}gt^2P + g(t) \\
&\implies F_2(q,P,t) = (q + \frac{1}{2}gt^2)P - mgqt + g(t)
\end{aligned}
\tag{4.8.20}
$$

(b3) Nuevo Hamiltoniano

$$K(Q,P) = H(q,p) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{4.8.21}$$

siendo

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} \equiv K(Q(q,P),P) - H(q,p(q,P)) = \frac{P^2}{2m} - \frac{(P-mgt)^2}{2m} - mgq \tag{4.8.22}$$

Esto es,

$$
\begin{aligned}
&gtP - mgq + g'(t) \equiv \frac{P^2}{2m} - \frac{(P-mgt)^2}{2m} - mgq = gtP - \frac{1}{2}mg^2t^2 \\
&\implies g(t) = -\frac{1}{6}mg^2t^3
\end{aligned}
\tag{4.8.23}
$$

(b3) Función generadora

$$F_2(q,P,t) = (q + \frac{1}{2}gt^2)P - mgqt - \frac{1}{6}mg^2t^3 \tag{4.8.24}$$

Corchetes de Poisson

4.8.4. Corchetes de Poisson para Lagrangiano bidimensional

Considere el siguiente Lagrangiano de un sistema bidimensional:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - \frac{1}{2}m\omega^2\left(q_1^2 + q_2^2\right) + m\omega K\left(\dot{q}_1 q_2 - \dot{q}_2 q_1\right) \tag{4.8.25}$$

donde K es una constante positiva. Utilizando el corchete de Poisson, determine bajo qué condiciones la función ℓ definida en el espacio de fases del sistema

$$\ell \equiv q_1 p_2 - q_2 p_1 \tag{4.8.26}$$

es una cantidad conservada. ¿Existe alguna simetría del sistema que dé lugar a este resultado?

(a) Momentos y velocidades

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q}_1 + m\omega K q_2 \quad , \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m\dot{q}_2 - m\omega K q_1 \tag{4.8.27}$$

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1}{m} - K\omega q_2 \quad , \quad \dot{q}_2 = \frac{p_2}{m} + K\omega q_1 \tag{4.8.28}$$

(b) Hamiltoniano

$$H = \dot{q}_1 p_1 + \dot{q}_2 p_2 - L = .. = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(1 + K^2\right)\left(q_1^2 + q_2^2\right) + K\omega\ell \tag{4.8.29}$$

(c) Cantidades conservadas

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \to H = \text{cte} \quad , \quad H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(1 + K^2\right) \boldsymbol{q}^2 + K\omega\ell \equiv H_0 + K\omega\ell$$

$$\ell \equiv \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}_3 = \epsilon_{3ij} q_i p_j \to \begin{cases} [\ell, H_0] = 0 \ , \ H_0 \text{ escalar} \\ [\ell, K\omega\ell] = 0 \ , \ \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}_3 \text{ 3-escalar} \end{cases}$$

$$\frac{d\ell}{dt} = [\ell, H] = 0 \to \ell = \text{cte} \ \forall K \ , \ \text{(simetría rotación eje 3)} \tag{4.8.30}$$

4.8.5. Partícula cargada en presencia de campo magnético

El Lagrangiano de una partícula no relativista que se mueve en un espacio de tres dimensiones en presencia de un campo magnético de potencial vector $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, dependiente de las coordenadas pero no del tiempo, está dado por

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{2} m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{e}{c} \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{4.8.31}$$

donde e es la carga de la partícula. Obtenga el Hamiltoniano H y determine qué condiciones debe cumplir la función $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ para que la cantidad

$$f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) \equiv \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p} - 2Ht \tag{4.8.32}$$

sea una cantidad conservada del sistema. ¿Existe alguna simetría asociada que dé lugar a este resultado?

(a1) Momento y velocidad

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{e}{c} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{4.8.33}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} - \frac{e}{mc} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{4.8.34}$$

(a2) Hamiltoniano

$$H = \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{p} - L = .. = \frac{\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2}{2m} \tag{4.8.35}$$

(b1) Cantidades conservadas

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \to H = \text{cte} \tag{4.8.36}$$

$$f = \text{cte} \to \frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \to [\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}, H] = 2H \tag{4.8.37}$$

(b2) Corchetes de Poisson

$$\left[\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p},\frac{\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}{2m}\right]=\frac{1}{m}\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\left[\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right]$$

$$\begin{aligned}\left[\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right]&=\boldsymbol{p}[\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}]+\boldsymbol{r}[\boldsymbol{p},-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}]\\ &\to\boldsymbol{p}[\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}]=\boldsymbol{p}\\ &\to\boldsymbol{r}[\boldsymbol{p},-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}]=\frac{e}{c}\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{A}[\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}]=\frac{e}{c}\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{A}\end{aligned}\tag{4.8.38}$$

$$\Rightarrow\left[\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p},H\right]=\frac{1}{m}\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{A}\right)$$

$$\Rightarrow 2H=\frac{1}{m}(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A})^2$$

(b3) Condición para $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$

$$\left[\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p},H\right]=2H\to\ \ \boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{r}^{-1}\tag{4.8.39}$$

(c1) Simetría. Transformación infinitesimal de escala

$$\boldsymbol{R}=(1+\alpha)\,\boldsymbol{r}\ ,\ \boldsymbol{P}=\frac{\boldsymbol{p}}{1+\alpha}\tag{4.8.40}$$

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{r}^{-1}\Rightarrow\boldsymbol{A}'=\frac{1}{1+\alpha}\boldsymbol{A}\tag{4.8.41}$$

Hamiltoniano

$$H=\frac{\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2}{2m}\to H'=\frac{H}{(1+\alpha)^2}\tag{4.8.42}$$

Generador

$$G\equiv F_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{P})=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{P}\tag{4.8.43}$$

Cantidad conservada

$$\begin{aligned}\alpha[H,G]=\delta H\equiv H'-H=-2\alpha H\ &\Rightarrow\ [G,H]=2H\\ f\equiv G-2Ht\ &\Rightarrow\ \frac{df}{dt}=0\end{aligned}\tag{4.8.44}$$

4.9. Autoevaluación

Ejercicios

4.9.1. Transformación infinitesimal en serie de potencias (R)

Considere la siguiente función generadora

$$F_2(q,P) = qP + \varepsilon\left(a \cdot q^3 P + b \cdot qP^3\right) \tag{4.9.1}$$

siendo ε un parámetro infinitesimal, y donde a, b son constantes numéricas.

(a) Derive la transformación canónica correspondiente, expresando (q,p) en función de (Q,P) como un desarrollo en serie de potencias de ε hasta términos de orden uno.

(b) Usando dicha transformación canónica encuentre los valores de a y b para que el Hamiltoniano

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right) + \varepsilon \cdot \beta q^4 \tag{4.9.2}$$

se transforme en

$$K(Q,P) = \frac{1}{2}\left(P^2 + \omega^2 Q^2\right) + \varepsilon \cdot c\left(P^2 + \omega^2 Q^2\right)^2 \tag{4.9.3}$$

en primer orden de ε para una constante numérica c, por determinar.

(c) Compruebe si para el nuevo Hamiltoniano la función

$$f(Q,P) = P^2 + \omega^2 Q^2 \tag{4.9.4}$$

es una constante del movimiento. Indique, sin necesidad de completar los cálculos, la resolución de las ecuaciones de Hamilton.

4.9.2. Transformación canónica dependiente del tiempo (R)

Dadas las ecuaciones de transformación para Q_1, P_1, P_2

$$Q_1 = q_1 + f\left(p_1, t\right) \quad , \quad P_1 = p_1 \quad , \quad P_2 = p_2 \tag{4.9.5}$$

donde f es una función arbitraria de (p_1, t),

(a) Determine la transformación más general para Q_2 de forma que la transformación $(q,p) \to (Q,P)$ sea canónica.

(b) Determine una función generadora para la transformación del apartado anterior.

(c) Si el Hamiltoniano del sistema está dado por

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + f_1\left(p_1, t\right) + f_2\left(p_2, t\right) + q_1 \tag{4.9.6}$$

donde f_i son funciones conocidas de (p_1, t) y (p_2, t), seleccione una transformación particular para Q_2 de forma que el nuevo Hamiltoniano no dependa explícitamente del tiempo.

4.9.3. Corchete de Poisson de función f con L_z (R)

Demuestre que $[f, L_z] = 0$, siendo f una función con simetría esférica, y siendo L_z el momento angular respecto al eje z arbitrario.

4.9.4. Hamiltoniano del oscilador armónico en variables a, a^* (R)

El Hamiltoniano para un oscilador armónico simple está dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{4.9.7}$$

Introduciendo las cantidades complejas (esto es, en el plano complejo $\mathbb{C}$)

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(q + \frac{p}{m\omega}i\right) \quad , \quad a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(q - \frac{p}{m\omega}i\right) \tag{4.9.8}$$

donde i es la unidad imaginaria,

(a) Analice si la transformación de variables $(q, p) \to (a, a^*)$ puede definirse como una transformación canónica, y determine el nuevo Hamiltoniano en función de a, a^*.

(b) Calcule los corchetes de Poisson de estas variables (a, a^*) con el Hamiltoniano.

(c) A partir del resultado en el apartado anterior, verifique que la ley de movimiento para las nuevas variables es sencilla de determinar, resolviéndola. Invierta entonces las ecuaciones de transformación para hallar la solución $q(t)$ y $p(t)$, verificando que corresponde al movimiento del oscilador en las variables originales.

4.9.5. Transformaciones infinitesimales más usuales (R)

Discuta el significado físico de las transformaciones canónicas infinitesimales descritas por las siguientes funciones de tipo 2,

(1) $F_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{P} + \delta\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{P}$

(2) $F_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{P} + \boldsymbol{\delta\varphi} \cdot (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{P})$

(3) $F_2(q, P, t) = qP + \delta\tau \cdot H(q, P, t)$

(4) $F_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{P} + \delta\alpha \cdot \left(q^2 + P^2\right)$

donde $\delta\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\delta\varphi}, \delta\tau, \delta\alpha$ son en todos los casos parámetros infinitesimales.

4.9.6. Constante del movimiento dependiente del momento angular (R)

Sea el Hamiltoniano de un sistema bidimensional para una partícula puntual, por simplicidad asumiendo $m = 1$, definido por la expresión

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + V(x, y) \tag{4.9.9}$$

(a) Determine la forma general del potencial $V(x, y)$ para que el sistema tenga una constante del movimiento de la forma

$$I = L^2 + d\,(x, y) \tag{4.9.10}$$

siendo L el momento angular del sistema.

(b) Verifique el resultado obtenido para un potencial de la forma $V\,(x, y) = f\left(x^2 + y^2\right)$, donde f es una función arbitraria, demostrando que efectivamente I es una constante del movimiento independiente del movimiento, al ser

$$[I, H] \equiv 0 \tag{4.9.11}$$

Interprete físicamente el resultado.

Cuestionarios en línea

4.9.7. Transformaciones canónicas

- Enlace al cuestionario

4.9.8. Corchetes de Poisson

- Enlace al cuestionario

4.10. Aplicaciones. Sistemas integrables

4.10.1. Introducción

Constantes del movimiento En un sistema de n grados de libertad, el cálculo de $2n$ *constantes del movimiento* del tipo $f_i(q,p,t) = \text{cte} \equiv C_i$ permite, en principio, integrar el problema, esto es, resolver el problema al menos por cuadraturas (véase como ejemplo el ejercicio 3.6.5). Para ello es necesario que las funciones f_i tengan las propiedades adecuadas, esto es, determinen de forma implicita las funciones $q(t), p(t)$. A las constantes del movimiento también se las denomina *integrales primeras*[1].

Integrales primeras en el formalismo Hamiltoniano Dentro del conjunto de integrales primeras, o constantes de movimiento, en general dependientes del tiempo, en el formalismo Hamiltoniano nos interesarán las integrales primeras *independientes del tiempo*. Redefinamos específicamente en esta sección una integral primera F del movimiento como toda función independiente del tiempo cuyo corchete de Poisson con el Hamiltoniano es nulo, $[F,H] = 0$, y por tanto, es una constante del movimiento (véase como ejemplo el ejercicio 4.7.2), al ser

$$\frac{dF}{dt} = \cancelto{0}{\frac{\partial F}{\partial t}} + [F,H] \equiv 0 \tag{4.10.1}$$

Lo interesante del formalismo Hamiltoniano es que será suficiente evaluar un conjunto de integrales primeras independientes entre sí (y que no dependan explícitamente del tiempo) para asegurar la integrabilidad del sistema. Esta eliminación del papel del tiempo se consigue al pasar de un sistema de n ecuaciones de Euler−Lagrange de segundo orden en el formalismo Lagrangiano a un sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden en el formalismo Hamiltoniano, de forma que una integral primera de este último sistema de ecuaciones, aunque sea independiente del tiempo, podrá integrarse por cuadraturas de una forma directa, pudiendo surgir entonces la dependencia explícita en el tiempo.

Funciones en involución Por definición, dos funciones F_1 y F_2 están en involución si su corchete de Poisson es nulo, esto es, si $[F_1,F_2] = 0$. Si aplicamos esta definición a las integrales primeras, vemos que dos integrales primeras están en involución si $[F_1,F_2] = 0$, pero además, recordando el resultado del ejercicio 4.7.4, sabemos que F_1, F_2 son constantes de movimiento, también lo será $[F_1,F_2]$, y el hecho de que esta nueva constante sea idénticamente nula, al estar en involución, nos indica que no podemos extraer constantes adicionales independientes a partir de F_1, F_2. Este resultado es clave para el teorema de integrabilidad dentro del formalismo Hamiltoniano.

4.10.2. Teorema de Liouville sobre integrabilidad

Teorema de Liouville El teorema de Liouville establece que para un sistema dinámico con n grados de libertad (y por tanto, con un espacio de fases $2n-$dimensional) tener n integrales primeras en involución es equivalente a tener una ley de movimiento totalmente integrable por cuadraturas. Además, el hecho de que las integrales estén en involución asegura que sean independientes entre sí.

Ejemplo. Sistema bidimensional En un sistema de dos dimensiones, si conocemos una integral primera adicional F, independiente del Hamiltoniano H independiente del tiempo, entonces el sistema es integrable por cuadraturas. Sucede por ejemplo con el movimiento en el plano bajo una fuerza central, cuya integral primera, además del Hamiltoniano, es la componente z del momento angular.

[1] Véase la sección 12.2 para el tratamiento de las mismas dentro formalismo Lagrangiano y la sección 13.4 y siguientes, donde se detalla su relación con las simetrías de una EDO, con numerosos ejemplos prácticos no específicamente ligados al formalismo Lagrangiano

Ejemplo. Peonza pesada simétrica Como se muestra en el ejercicio 4.11.2, para una peonza simétrica que gira respecto al punto fijo de su base, tenemos tres integrales primeras en involución, el Hamiltoniano H, el momento angular L_z respecto al eje z en el espacio, y el momento angular L_3 respecto al eje de simetría del sólido (los ángulos de giro respecto al eje z y al eje del sólido son coordenadas cíclicas). Por tanto, este sistema es integrable por cuadraturas.

4.10.3. Teorema de Bertrand-Darboux

Sea el Hamiltoniano de un sistema con dos grados de libertad (por simplicidad en la notación consideraremos en este apartado un valor unitario de la masa, $m = 1$)

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + V(x, y) \tag{4.10.2}$$

Entonces, las tres propiedades siguientes son equivalentes:

(1) El sistema Hamiltoniano admite una constante I del movimiento (independiente de H), cuadrática en los momentos de la forma

$$I = a\,(x, y)\,p_x^2 + 2b\,(x, y)\,p_x p_y + c\,(x, y)\,p_y^2 + d(x, y) \tag{4.10.3}$$

(2) La ecuación de Hamilton−Jacobi (véase el capítulo 5) del sistema es separable al menos en uno de los sistemas ortogonales del plano bidimensional: cartesiano, polar, elíptico o parabólico.

(3) La tercera condición se refiere a la ecuación diferencial general que debe satisfacer la función $V(x, y)$ para la separabilidad, y que da lugar también a la constante de movimiento I. Por su generalidad no la estudiaremos aquí, y sólo analizaremos a continuación de forma práctica los casos más sencillos.

Ejemplo Supongamos que queremos determinar la forma general del potencial $V(x, y)$ para que el sistema tenga una integral primera en la forma funcional

$$I = p_x p_y + d\,(x, y) \equiv \dot{x}\dot{y} + d\,(x, y) \tag{4.10.4}$$

Entonces, aplicando las ecuaciones del movimiento

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \tag{4.10.5}$$

obtenemos la condición $dI/dt \equiv 0$ en la forma desarrollada

$$\frac{dI}{dt} = \ddot{x}\dot{y} + \dot{x}\ddot{y} + \frac{\partial d}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial d}{\partial y}\dot{y} = -\dot{y}\frac{\partial V}{\partial x} - \dot{x}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial d}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial d}{\partial y}\dot{y} = 0 \tag{4.10.6}$$

En la expresión obtenida debemos igualar los coeficientes de las velocidades generalizadas $\dot{x}, \dot{y}$ por separado, obteniendo las dos condiciones que relacionan las derivadas parciales del potencial con las derivadas parciales de la función d que aparece en la integral primera I:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial d}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial d}{\partial y} \tag{4.10.7}$$

Podemos obtener una única ecuación para $V(x, y)$ que sea independiente de la función $d(x, y)$. Para ello aplicamos respectivamente los operadores $\partial/\partial y$, $\partial/\partial x$ a las condiciones anteriores, eliminamos d, y llegamos al resultado

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \tag{4.10.8}$$

Una de las soluciones más sencilla es la que corresponde al oscilador armónico bidimensional

$$V(x,y) = \frac{1}{2}k\left(x^2+y^2\right) \tag{4.10.9}$$

en cuyo caso, la función d satisface $d(x,y) = kxy + \text{cte}$, y la integral primera resulta ser

$$I = p_x p_y + kxy + \text{cte} \tag{4.10.10}$$

Comparamos este resultado con la descripción de las constantes del oscilador del ejercicio 4.7.8. Para el oscilador armónico en dos dimensiones, tanto el Hamiltoniano, como las tres cantidades

$$S_1 = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 - p_y^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2-y^2\right) \tag{4.10.11}$$

$$S_2 = \frac{1}{m}p_x p_y + m\omega^2 xy \tag{4.10.12}$$

$$S_3 = \omega\left(xp_y - yp_x\right) \tag{4.10.13}$$

son constantes del movimiento y sus corchetes de Poisson satisfacen

$$[S_i, S_j] = 2\omega\epsilon_{ijk}S_k \tag{4.10.14}$$

En estos casos el sistema dinámico se denomina *superintegrable*, puesto que tiene un número de integrales primeras del movimiento, en este caso 4, mayor que el número de grados de libertad, $n = 2$ (véase el apéndice 5.11 para una explicación más detallada y un caso práctico).

4.11. Ejercicios resueltos

4.11.1. Peonza de Euler

Un sólido rígido gira libremente (esto es, en ausencia de fuerzas) en el espacio tridimensional respecto a un punto fijo O. Demuestre la integrabilidad del sistema.

Nota: Para describir el movimiento del sólido rígido tenemos dos opciones, utilizar los ángulos de Euler (φ, θ, ψ) referidos a un sistema fijo en el espacio, o podemos tomar un sistema de referencia ligado a los ejes principales del sólido rígido (y por tanto no inercial), en función de los ángulos de rotación respectivos $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, dando lugar al movimiento de *nutación*, *precesión* y *espín*.

El movimiento del sistema se compone de un única rotación respecto a un eje arbitrario que cambia en el tiempo, y está dirigido en la dirección del vector unitario, digamos $\boldsymbol{n}$. El sistema es invariante bajo la rotación de ángulo φ en torno a este eje, de forma que se conserva su momento conjugado, que será el momento angular respecto a ese eje. Y como la dirección dada por $\boldsymbol{n}$ es arbitraria, deducimos que se conservará el momento angular $\boldsymbol{L}$ respecto a cualquier sistema de ejes fijos

$$\boldsymbol{L} = \text{cte} \tag{4.11.1}$$

Ahora, en el sistema de referencia ligado al sólido, el momento angular tiene la expresión

$$\boldsymbol{L} = L_1\boldsymbol{e}_1 + L_2\boldsymbol{e}_2 + L_3\boldsymbol{e}_3 \tag{4.11.2}$$

siendo $\boldsymbol{e}_i$ los vectores unitarios en las tres direcciones principales. De la variación nula en el tiempo de $\boldsymbol{L}$ obtenemos

$$0 = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \equiv \frac{dL_1}{dt}\boldsymbol{e}_1 + \frac{dL_2}{dt}\boldsymbol{e}_2 + \frac{dL_3}{dt}\boldsymbol{e}_3 + L_1\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} + L_2\frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} + L_3\frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt} \tag{4.11.3}$$

y de la variaciones respectivas de los vectores unitarios bajo la rotación con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i \tag{4.11.4}$$

siendo, como indicamos, ω la velocidad angular de rotación del sólido respecto a los ejes fijos, deducimos las ecuaciones de movimiento de Euler para las componentes del momento angular

$$\frac{dL_1}{dt} = -L_2 \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_2\right)_1 - L_3 \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_3\right)_1 \tag{4.11.5}$$

y de forma similar para los otros dos índices. Dado que respecto a los ejes principales del sólido rígido la velocidad angular se relaciona linealmente con el momento angular, mediante el tensor de inercia I,

$$\boldsymbol{L} = I : \boldsymbol{\omega} = I_1\omega_1\boldsymbol{e}_1 + I_2\omega_2\boldsymbol{e}_2 + I_3\omega_3\boldsymbol{e}_3 \tag{4.11.6}$$

siendo (I_1, I_2, I_3) los momentos principales de inercia, las ecuaciones de movimiento se pueden escribir en la forma

$$\frac{dL_1}{dt} = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right) L_2 L_3 \tag{4.11.7}$$

y de forma similar para los otros dos índices.

A partir de aquí, debemos elegir la descripción dinámica de la rotación, en nuestro caso elegiremos la ligada al sistema de ejes del sólido, de forma que $L = (L_1, L_2, L_3) = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$ y $\omega = (\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3)$. Además, el sistema es conservativo, con el Lagrangiano L igual a la energía cinética de rotación respecto a sus ejes principales

$$L = T = \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\varphi}_3^2 \tag{4.11.8}$$

mientras que el Lagrangiano respecto al sistema fijo en el espacio estaría dado por

$$L' = L + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L} \tag{4.11.9}$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ debe quedar expresada en este caso en función de los ángulos de Euler.
El momento conjugado de las coordenadas angulares es el momento angular de rotación del sólido

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}} = (I_1\dot{\varphi}_1, I_2\dot{\varphi}_2, I_3\dot{\varphi}_3) \tag{4.11.10}$$

y dado que el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, el Hamiltoniano se conserva y tiene el valor

$$H = \dot{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \boldsymbol{L} - L = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3} \tag{4.11.11}$$

Conviene recordar que esta notación, aunque sea Hamiltoniana, no es simpléctica, ya que las componentes del momento angular no pueden tomarse como verdaderas variables canónicas, ya que sus corchetes de Poisson entre sí son no nulos, y además no satisfacen las ecuaciones de Hamilton, ya que de ser así, de

$$\left(\frac{dL_1}{dt}\right)_s = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_1} = 0 \tag{4.11.12}$$

se deduciría el resultado erróneo $L_1 = \text{cte}$. Aquí el subíndice s denota que la variación se toma respecto al sistema de referencia del sólido. En realidad, para hallar su evolución en el tiempo, debemos considerar que L_1 es una función de las variables canónicas y no una variable canónica, de forma que

$$\left(\frac{dL_1}{dt}\right)_s = -\left[L_1, H\right] = \frac{L_2}{I_2}\left[L_1, L_2\right] + \frac{L_3}{2I_3}\left[L_1, L_3\right] \tag{4.11.13}$$

Teniendo en cuenta el valor de los corchetes fundamentales de Poisson para el momento angular $[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$, llegamos al resultado anterior

$$\left(\frac{dL_1}{dt}\right)_s = \frac{L_2 L_3}{I_3} - \frac{L_2 L_3}{I_2} \tag{4.11.14}$$

En resumen, hemos visto que aunque el sistema tiene tres grados de libertad, que pueden tomarse como las tres componentes del momento angular $\boldsymbol{L}$, sólo dos de ellas son independientes puesto que se conserva $\boldsymbol{L}$ y por tanto, su módulo $\sqrt{\boldsymbol{L}^2} = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}$. Con las cuatro constantes de movimiento, el Hamiltoniano y las tres componentes del momento angular respecto a unos ejes fijos en el espacio, sólo nos queda mostrar que existen al menos dos constantes en involución. Para ello, las componentes del momento angular que satisfacen $[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$ no son las candidatas correctas, pero sí lo son el Hamiltoniano H y $\boldsymbol{L}^2$. En función de ellas, el sistema de ecuaciones del movimiento

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} L_2 L_3 \quad , \quad \frac{dL_2}{dt} = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} L_3 L_1 \quad , \quad \frac{dL_3}{dt} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} L_1 L_2 \tag{4.11.15}$$

puede resolverse por cuadraturas.

4.11.2. Peonza pesada de Lagrange

Un sólido rígido gira en el espacio tridimensional respecto a un punto fijo O, bajo la acción de su peso. Si las ecuaciones del movimiento (respecto al sistema de referencia ligado al sólido) son

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{M} \equiv \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{P} \quad , \quad \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{P} = 0 \tag{4.11.16}$$

donde $\boldsymbol{M}$ es el momento de fuerzas, $\boldsymbol{P}$ es el vector peso aplicado en el centro de masas del sólido, $\boldsymbol{a}$ es el vector de posición del centro de masas respecto del punto fijo O, y $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de rotación del sólido,

(a) Determine bajo qué condiciones el sistema es integrable.

(b) Siendo el sistema integrable, utilice como coordenadas del sistema los ángulos de Euler, y justifique y desarrolle la resolución del problema por cuadraturas.

(a) La primera ecuación de movimiento es la segunda ley de Newton para la rotación respecto a un sistema de referencia en rotación, y sometido al par de fuerzas generado sobre el punto fijo O por el peso del cuerpo. La segunda ecuación indica la variación de dirección del vector peso en el sistema ligado al sólido. Dicha variación se debe a la variación de posición del centro de masas en el movimiento del sólido.
Considerando ambas ecuaciones, podemos deducir de ellas las siguientes constantes del movimiento en el sistema de referencia ligado al sólido. Multiplicando la segunda ecuación por el vector $\boldsymbol{P}$, obtenemos la constancia de su módulo al cuadrado

$$\boldsymbol{P} \cdot \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} + \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{P} = 0 \rightarrow \boldsymbol{P}^2 = \text{cte} \tag{4.11.17}$$

Multiplicando la primera ecuación por $\boldsymbol{P}$ y la segunda por $\boldsymbol{L}$, y sumando el resultado obtenemos

$$0 = \boldsymbol{P} \cdot \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} + \boldsymbol{L} \cdot \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} + \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{P} \rightarrow \frac{d\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{P}}{dt} = 0 \tag{4.11.18}$$

por lo que $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{P}$ resulta también constante del movimiento. Finalmente tenemos la conservación de la energía. El Hamiltoniano será la suma de la energía cinética (la misma que corresponde a la peonza libre) y la energía potencial debida al peso. Para la energía cinética tenemos

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{L}\cdot I^{-1}\cdot\boldsymbol{L} \tag{4.11.19}$$

donde la matriz I^{-1} es la inversa a la matriz de inercia, y es diagonal respecto al sistema de ejes principales del sólido. Para la energía potencial, siendo $\boldsymbol{a}$ el vector de posición del centro de masas respecto del punto fijo O, tenemos

$$V = mgh = mga\cos\theta = -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P} \tag{4.11.20}$$

siendo h la posición z del centro de masas, θ el ángulo que forma el vector $\boldsymbol{a}$ con el eje z, y entonces $\pi-\theta$ es el ángulo que forma el vector $\boldsymbol{a}$ con el vector $\boldsymbol{P}$. Con esto, el Hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{L}\cdot I^{-1}\cdot\boldsymbol{L} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P} \tag{4.11.21}$$

Verificamos directamente que es constante del movimiento, en el sistema de referencia ligado al sólido (para el cual por ejemplo el vector $\boldsymbol{a}$ al estar fijado al cuerpo, no varía en el tiempo), y por tanto

$$\frac{dH}{dt} = \boldsymbol{L}\cdot I^{-1}\cdot\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} - \boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{L}\cdot I^{-1}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{P} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{P} \equiv 0 \tag{4.11.22}$$

Ahora, para ver si las constantes halladas están en involución, introducimos los corchetes fundamentales para el momento angular y el vector peso, que son

$$[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk}L_k \quad , \quad [P_i, P_j] = 0 \tag{4.11.23}$$

puesto que $\boldsymbol{P}$ es un vector constante, al menos respecto al sistema de ejes fijos en el espacio. Para hallar los corchetes de Poisson del peso con el momento angular, debemos saber que respecto al sistema ligado al sólido rígido, que es donde se evalúan las componentes L_i del momento angular, las componentes del peso no son constantes. Para determinar $[L_i, P_j]$, comenzamos con $[L_i, f] = 0$, válido cualquier función escalar f, y tomamos $f = \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{P} \equiv L_jP_j$. Utilizando las propiedades generales del corchete de Poisson, llegamos con la convención sobre los índices repetidos, a

$$0 = [L_i, L_jP_j] = P_j\,[L_i, L_j] + L_j\,[L_i, P_j] = \varepsilon_{ijk}P_jL_k + L_j\,[L_i, P_j] \tag{4.11.24}$$

Dado que $\varepsilon_{ijk}P_jL_k = (\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{L})_i = -(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{P})_i = -\varepsilon_{ijk}L_jP_k$, la ecuación anterior se escribe

$$\varepsilon_{ijk}L_jP_k = L_j\,[L_i, P_j] \to L_j\,(\varepsilon_{ijk}P_k - [L_i, P_j]) = 0 \tag{4.11.25}$$

Ya que la componente L_j es arbitraria, la ecuación anterior se satisface sólo si

$$[L_i, P_j] = \varepsilon_{ijk}P_k \tag{4.11.26}$$

que es la expresión buscada.

Una vez obtenidos los corchetes de Poisson fundalmentales, verificamos si las constantes de movimiento están en involución. Obtenemos obviamente

$$[\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{P}, H] = 0 = \left[\boldsymbol{P}^2, H\right] \tag{4.11.27}$$

y también,

$$\begin{aligned}\left[\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}^2\right] &\equiv [L_iP_i, P_jP_j] = L_i\,[P_i, P_jP_j] + P_i\,[L_i, P_jP_j] \\ &= 2P_jL_i\,[P_i, P_j] + 2P_jP_i\,[L_i, P_j] = 0 + 2\varepsilon_{ijk}P_jP_iP_k = 0\end{aligned} \tag{4.11.28}$$

Tenemos por tanto, dos constantes en involución y un sistema de tres coordenadas generalizadas, por ejemplo los tres ángulos de Euler. El sistema será integrable si encontramos al menos una constante más en involución con las anteriores.

Dado que $\boldsymbol{a}$ es un vector constante en el sistema de referencia del sólido, podemos ver que de la primera ecuación de movimiento se deduce la variación temporal

$$\frac{d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{P}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L} \tag{4.11.29}$$

y la involución para $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{L}$

$$[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{L},H]=0\quad,\quad\left[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}^2\right]=\boldsymbol{a}\cdot\left[\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}^2\right]=0 \tag{4.11.30}$$

y también,

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{L},\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{P}]\equiv[a_iL_i,L_jP_j]&=a_iL_j\left[L_i,P_j\right]+a_iP_j\left[L_i,L_j\right]\\&=a_i\varepsilon_{ijk}\left(L_jP_k+P_jL_k\right)=0\end{aligned} \tag{4.11.31}$$

Por tanto, la cantidad $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{L}$ cumple las condiciones exigidas y sólo nos queda analizar en qué casos puede ser constante del movimiento, y en consecuencia el sistema resulta ser integrable. Buscamos entonces las condiciones para

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}=0 \tag{4.11.32}$$

Si nos referimos al sistema de ejes principales del sólido, tenemos $\boldsymbol{L}=I\boldsymbol{\omega}$ donde I es la matriz de inercia en su forma diagonal $I=(I_1,I_2,I_3)$, y diagonal $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ la velocidad angular del sólido. Finalmente tomamos el eje 3 en la dirección que une el centro de masas del sólido con el punto fijo O tenemos $\boldsymbol{a}=(0,0,a)$. Con todo ello, la condición anterior se desarrolla como

$$a\omega_1\omega_2\left(I_2-I_1\right)=0 \tag{4.11.33}$$

Por tanto, el sistema será integrable sólo en el caso de un sólido simétrico, $I_2=I_1$, que tenga esta simetría de rotación en torno al eje 3 (*peonza de Lagrange*).

Una vez analizada la integrabilidad del sistema, pasamos a construir su solución en función de los ángulos de Euler (φ,θ,ψ). En este sistema de coordenadas angulares, la velocidad angular está dada por (véase los apuntes de Mecánica y Ondas del curso virtual, en los que deben corregirse las ecuaciones $\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_z+\dot{\theta}\boldsymbol{u}_n+\dot{\psi}\,\overrightarrow{u}_3$ y $\boldsymbol{u}_3=\cos\psi\boldsymbol{u}_1+\operatorname{sen}\psi\boldsymbol{u}_2$ y la fórmula correspondiente)

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi+\dot{\theta}\cos\psi\\\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\cos\psi-\dot{\theta}\operatorname{sen}\psi\\\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\end{pmatrix} \tag{4.11.34}$$

Las velocidades angulares asociadas a los ángulos de Euler reciben los nombres de precesión $(\dot{\varphi})$, nutación $\left(\dot{\theta}\right)$ y espín $\left(\dot{\psi}\right)$. En estas mismas coordenadas el vector peso tiene las componentes

$$\begin{pmatrix}P_1\\P_2\\P_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi\\P\operatorname{sen}\theta\cos\psi\\P\cos\theta\end{pmatrix} \tag{4.11.35}$$

Con esto, las constantes del movimiento tienen la expresión, recordando que en este caso $I_2=I_1$,

$$\boldsymbol{p}^2=P^2 \tag{4.11.36}$$

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{p}=I_j\omega_jP_j=P\dot{\varphi}\left(I_1\operatorname{sen}^2\theta+I_3\cos^2\theta\right)+I_3P\dot{\psi}\cos\theta \tag{4.11.37}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{L}=aI_3\omega_3=aI_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\right) \tag{4.11.38}$$

junto con el Hamiltoniano

$$H=\frac{1}{2}I_1\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)+\frac{1}{2}I_3\omega_3^2-aP\cos\theta=\frac{1}{2}I_1\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta\right)+\frac{1}{2}I_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\right)^2-aP\cos\theta \tag{4.11.39}$$

Con ayuda de las dos constantes del movimiento $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{P}=-mgL_z=\text{cte}$ y $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{L}=aL_3=\text{cte}$, y utilizando que se relacionan en la forma

$$-mgL_z=I_1P\dot{\varphi}\,\text{sen}^2\,\theta+PL_3\cos\theta\rightarrow\dot{\varphi}\,\text{sen}^2\,\theta=-\frac{L_3}{I_1}\cos\theta-\frac{L_z}{I_1} \tag{4.11.40}$$

podemos construir un Hamiltoniano directamente resoluble por cuadraturas para la coordenada θ:

$$H=\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2+V_{ef}\left(\theta\right)=\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I_1\left(\frac{L_3\cos\theta+L_z}{I_1\,\text{sen}\,\theta}\right)^2-aP\cos\theta+\frac{L_3^2}{2I_3} \tag{4.11.41}$$

Una vez integrada la función $\theta(t)$ para este problema reducido unidimensional, las otras coordenadas del sistema están dadas por

$$\varphi\left(t\right)=\int\dot{\varphi}dt=-\frac{1}{I_1}\int\frac{L_3\cos\theta+L_z}{\text{sen}^2\,\theta}dt \tag{4.11.42}$$

$$\psi\left(t\right)=\int\dot{\psi}dt=\frac{L_3}{I_3}t-\int\dot{\varphi}\cos\theta dt=\frac{L_3}{I_3}t+\frac{1}{I_1}\int\frac{L_3\cos^2\theta+L_z\cos\theta}{\text{sen}^2\,\theta}dt \tag{4.11.43}$$

4.11.3. Sistema bidimensional con potencial $A\left(x^2+4y^2\right)$

Sea el sistema bidimensional con el Hamiltoniano (por simplicidad asumiendo $m=1$)

$$H=\frac{1}{2}\left(p_x^2+p_y^2\right)+A\left(x^2+4y^2\right) \tag{4.11.44}$$

Demuestre que el sistema es resoluble por cuadraturas, y que por tanto es integrable, y analice si existen más de dos 2 cantidades conservadas en involución, lo que daría al sistema la super-integrabilidad.

Dado que el sistema es separable en las coordenadas cartesianas

$$H=\frac{1}{2}p_x^2+Ax^2+\frac{1}{2}p_y^2+4Ay^2=E_x+E_y \tag{4.11.45}$$

donde E_x,E_y son las energías totales en cada dirección del movimiento, el sistema es resoluble por cuadraturas

$$t=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E_x-Ax^2}}\quad,\quad t=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{E_y-4Ay^2}} \tag{4.11.46}$$

y corresponde con la combinación bidimensional de dos osciladores no acoplados. Por el teorema de Liouville, esto significa que existen dos constantes del movimiento independientes, además del Hamiltoniano, que están en involución. Obviamente $[E_x,E_y]=0$, por tanto E_x,E_y son las candidatas adecuadas.

Como puede comprobarse de forma directa, este sistema tiene la constante adicional del movimiento de la forma

$$I=p_xL+2Ax^2y=xp_xp_y-yp_x^2+2Ax^2y \tag{4.11.47}$$

siendo L el momento angular del sistema. Con ello, el sistema es superintegrable, y el número máximo de constantes independientes en involución es igual a la dimensión del sistema, en este caso 2. Podemos comprobarlo en este caso. Obtenemos, aplicando las propiedades del corchete de Poisson

$$[E_x,I]=2Ax^2p_y-p_x^2p_y-y\left[Ax^2,p_x^2\right]+Ay\left[p_x^2,x^2\right]=\left(2Ax^2-p_x^2\right)p_y \tag{4.11.48}$$

$$[E_y,I]=[H-E_x,I]=[H,I]-[E_x,I]=-\left[E_x,I\right]=\left(p_x^2-2Ax^2\right)p_y \tag{4.11.49}$$

y ambas son distintas de cero.

4.11.4. El problema de Kepler y el vector de Laplace-Runge-Lenz

Consideremos el problema de Kepler de un partícula de masa m sometida al potencial central

$$V(r) = -\frac{k}{r} \tag{4.11.50}$$

Demuestre que existe un vector constante en el movimiento que tiene la forma

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - mk\boldsymbol{u}_r \tag{4.11.51}$$

siendo $\boldsymbol{p}$ el momento lineal, $\boldsymbol{L}$ el momento angular y $\boldsymbol{u}_r$ el vector unitario en dirección radial en coordenadas esféricas. Demuestre que el sistema es superintegrable con siete constantes del movimiento, determine la relación funcional entre las mismas, y deduzca la ecuación de la órbita en función del módulo del vector $\boldsymbol{a}$.

Nota: Véase también la sección 15.2, dedicada a las simetrías en el problema de Kepler.

Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton, y la constancia del momento angular

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} = -\frac{dV}{dr}\boldsymbol{u}_r \quad , \quad \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{0} \tag{4.11.52}$$

la variación temporal del vector $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}$ está dada por

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}) = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{L} = -m\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \tag{4.11.53}$$

Utilizando la propiedad del triple producto vectorial

$$\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{v} \tag{4.11.54}$$

y al ser

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt} = r\frac{dr}{dt} \tag{4.11.55}$$

y entonces,

$$(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{v} = r\left(\frac{dr}{dt}\boldsymbol{r} - r\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = -r^3\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{4.11.56}$$

obtenemos

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}) = mr^2\frac{dV}{dr}\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{4.11.57}$$

En el caso del potencial de Kepler, $V(r) = -k/r$,

$$r^2\frac{dV}{dr} = k \tag{4.11.58}$$

con lo cual

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}) = mk\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \rightarrow \frac{d}{dt}(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - mk\boldsymbol{u}_r) = 0 \tag{4.11.59}$$

Y por tanto, el vector $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - mk\boldsymbol{u}_r$ es constante del movimiento

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = 0 \tag{4.11.60}$$

En resumen, las constantes del movimiento del sistema son la energía total, el momento angular $\boldsymbol{L}$ y el vector de Laplace-Runge-Lenz $\boldsymbol{a}$. En total son siete cantidades escalares, una cantidad mayor que la dimensión del sistema $n = 3$, por lo que el sistema es superintegrable. Este sistema es maximal y el número de constantes de movimiento independientes es igual a $2n - 1 = 5$. Necesitamos encontrar entonces cuáles son las dos dependencias funcionales que relacionan las constantes (o parte de ellas) entre sí.

Teniendo en cuenta la estructura del vector $\boldsymbol{a}$, es fácil ver que una de las relaciones que buscamos es directamente

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{L} = -mk\boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{L} = -mkr\boldsymbol{u}_r \cdot (\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{p}) \equiv 0 \tag{4.11.61}$$

Ya que la órbita de la partícula se sitúa en un plano perpendicular al vector $\boldsymbol{L}$, la condición $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{L} = 0$ indica que al ser el vector $\boldsymbol{a}$ perpendicular a $\boldsymbol{L}$, es un vector constante situado en el plano de la órbita. La otra relación se puede obtener evaluando el módulo del vector $\boldsymbol{a}$, dado por

$$|\boldsymbol{a}|^2 = (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L})^2 + (mk)^2 = p^2L^2 + (mk)^2 \tag{4.11.62}$$

sobreentendiéndose que el momento $\boldsymbol{p}$ se sitúa en el plano de la órbita perpendicular a $\boldsymbol{L}$. Dado el valor de la energía

$$E = \frac{p^2}{2m} \tag{4.11.63}$$

obtenemos la segunda relación funcional

$$|\boldsymbol{a}| = mk\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \tag{4.11.64}$$

Pasamos entonces a obtener la ecuación de la órbita. Hemos visto que el vector $\boldsymbol{a}$ es un vector constante situado en el plano de la órbita. Utilizando coordenadas polares (r, φ) con el eje polar en la dirección de $\boldsymbol{a}$, tenemos

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} = |\boldsymbol{a}| r \cos\varphi \tag{4.11.65}$$

siendo

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}L - mk\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u}_r = L^2 - mkr \tag{4.11.66}$$

y por tanto,

$$|\boldsymbol{a}| r \cos\varphi = L^2 - mkr \to r = \frac{L^2/mk}{1 + \frac{|\boldsymbol{a}|}{mk}\cos\varphi} \tag{4.11.67}$$

que es un cónica

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \tag{4.11.68}$$

de excentricidad proporcional a $|\boldsymbol{a}|$, y de magnitud

$$e = \frac{|\boldsymbol{a}|}{mk} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \tag{4.11.69}$$

4.11.5. El oscilador armónico y el tensor de Fradkin

Sea el sistema tridimensional de un oscilador isótropo

$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{r}^2 \tag{4.11.70}$$

Se denomina tensor de Fradkin al tensor cuya representación matricial tiene los elementos

$$F_{ij} = v_i v_j + \omega^2 r_i r_j \tag{4.11.71}$$

en función de las componentes de la velocidad y del vector de coordenadas de la partícula. Demuestre que cada F_{ij} es constante del movimiento, y de forma que el sistema es superintegrable. Determine el número de constantes del movimiento y la relación funcional entre las mismas. Determine finalmente la ecuación de la órbita en un plano a partir de los elementos del tensor de Fradkin.

Calculando las derivadas temporales, obtenemos

$$\frac{d}{dt}F_{ij} = \left(\frac{dv_i}{dt} + \omega^2 r_i\right) v_j + \left(\frac{dv_j}{dt} + \omega^2 r_j\right) v_i \tag{4.11.72}$$

y con ayuda de la ecuación de movimiento

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}} = -m\omega^2\boldsymbol{r} \rightarrow \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \omega^2\boldsymbol{r} = 0 \tag{4.11.73}$$

llegamos al resultado pedido

$$\frac{d}{dt}F_{ij} = 0 \tag{4.11.74}$$

El tensor de Fradkin es importante porque sus elementos son constantes del movimiento, y porque además caracteriza la órbita de la partícula de la misma forma que el vector de Laplace-Runge-Lenz lo hace en el problema de Kepler (sección 15.2 y ejercicio 4.11.4). Dado que es un tensor simétrico en tres dimensiones tiene 6 componentes independientes, que junto con la energía total y el vector momento angular $\boldsymbol{L}$ proporcionan 10 constantes del movimiento, por lo que el sistema es superintegrable. Este sistema es maximal y el número de constantes de movimiento independientes es igual a $2n - 1 = 5$. Necesitamos encontrar entonces cuáles son las cinco dependencias funcionales que relacionan las constantes (o parte de ellas) entre sí.

Un tensor queda caracterizado completamente por sus vectores propios $\boldsymbol{u}_i$ y autovalores λ_i. Los vectores propios vienen dados por los tres vectores fila $\boldsymbol{u}_{f,i} = (F_{i1}, F_{i2}, F_{i3})$ o por los tres vectores columna $\boldsymbol{u}_{c,i} = (F_{1i}, F_{2i}, F_{3i})$ obtenidos a partir de la matriz de F. La traza del vector es un invariante bajo transformaciones de semejanza, y en este caso es proporcional a la energía total del sistema

$$\operatorname{tr} F = F_{11} + F_{22} + F_{33} = \sum_i \left(v_i^2 + \omega^2 r_i^2\right) = \frac{1}{m^2}\boldsymbol{p}^2 + \omega^2\boldsymbol{r}^2 = \frac{2}{m}E \tag{4.11.75}$$

Por lo tanto, la primera relación funcional buscada es

$$E = \frac{m}{2}\left(F_{11} + F_{22} + F_{33}\right) = \frac{m}{2}\operatorname{tr} F = \frac{m}{2}\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\right) \tag{4.11.76}$$

Esta relación también indica que sólo dos autovalores son independientes, que el rango de la matriz F es dos, y que el movimiento se localiza en un plano. En el problema de Kepler el vector constante $\boldsymbol{a}$ era proporcional al vector $\boldsymbol{L}$ y se situaba en el plano de la órbita. De forma análoga, en este caso son los tres vectores propios de F los que son perpendiculares al vector $\boldsymbol{L}$, como se

demuestra directamente.

El producto escalar

$$\boldsymbol{u}_{f,i} \cdot \boldsymbol{L} \equiv F_{ij} L_j = v_i v_j L_j + \omega^2 r_i r_j L_j \tag{4.11.77}$$

es idénticamente cero, ya que se satisface con suma en el índice j

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{L} \equiv v_j L_j = m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \equiv 0 \tag{4.11.78}$$

y también

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{L} \equiv r_j L_j = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \equiv 0 \tag{4.11.79}$$

Por tanto, tenemos una relación funcional más en la forma

$$\boldsymbol{u}_{f,i} \cdot \boldsymbol{L} = 0 \tag{4.11.80}$$

Del mismo modo, cuando los vectores propios se toman como los vectores columna, tenemos el producto escalar

$$\boldsymbol{u}_{c,i} \cdot \boldsymbol{L} \equiv L_j F_{ji} = L_j v_j v_i + L_j \omega^2 r_j r_i \tag{4.11.81}$$

Y por la misma razón anterior, obtenemos la relación funcional en la forma

$$\boldsymbol{u}_{c,i} \cdot \boldsymbol{L} = 0 \tag{4.11.82}$$

Al ser el tensor F simétrico, estas dos relaciones funcionales escalares son idénticas entre sí. Por tanto, por ahora hemos encontrado 2 de las cinco relaciones funcionales esperadas.

Nos queda comprobar si existe relación entre las componentes de F, o sus elementos diagonales, y las componentes del momento angular, de forma análoga al problema de Kepler donde obteníamos

$$|\boldsymbol{a}|^2 = p^2 L^2 + (mk)^2 \tag{4.11.83}$$

Dado que el movimiento se localiza en un plano es útil considerar la proyección del tensor F sobre dicho plano arbitrario. Por ejemplo, si el plano de la órbita fuera el plano (x, y), el momento angular sólo tendría la componente z, y el tensor de Fradkin tendría la expresión

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{m^2} \begin{pmatrix} p_x^2 + m^2\omega^2 x^2 & p_x p_y + m^2\omega^2 xy \\ p_x p_y + m^2\omega^2 xy & p_y^2 + m^2\omega^2 y^2 \end{pmatrix} \tag{4.11.84}$$

de forma que, de nuevo

$$E = \frac{m}{2}\left(F_{11} + F_{22}\right) = \frac{m}{2}\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) \tag{4.11.85}$$

Otro elemento que es invariante bajo transformaciones de semejanza es el determinante de una matriz. Para la notación anterior del tensor F, el determinante está dado por

$$\det F = F_{11} F_{22} - \left(F_{12}\right)^2 \tag{4.11.86}$$

y tiene el valor

$$\begin{aligned} \det F &= \left(p_x^2 + m^2\omega^2 x^2\right)\left(p_y^2 + m^2\omega^2 y^2\right) - \left(p_x p_y + m^2\omega^2 xy\right)^2 \\ &= m^2\omega^2 \left(y p_x - x p_y\right)^2 \equiv m^2\omega^2 L_z^2 \end{aligned} \tag{4.11.87}$$

Este resultado se explica porque en dos dimensiones bajo fuerza central existe la propiedad de simetría bajo rotación en torno al eje z perpendicular al plano de la órbita, de forma que cualquier escalar definido en el plano de la órbita, como es el determinante del tensor F, es una cantidad invariante, en este caso constante del movimiento. Por tanto, tenemos la relación funcional

$$F_{11}F_{22} - (F_{12})^2 = m^2\omega^2 L_z^2 \tag{4.11.88}$$

Sin mucho esfuerzo, llegaríamos a obtener las dos relaciones análogas para los otros dos planos del espacio tridimensional

$$F_{11}F_{33} - (F_{13})^2 = m^2\omega^2 L_y^2 \tag{4.11.89}$$

y

$$F_{22}F_{33} - (F_{23})^2 = m^2\omega^2 L_x^2 \tag{4.11.90}$$

Con esto hemos hallado las cinco relaciones funcionales que esperábamos de forma que efectivamente este sistema superintegrable maximal tiene 5 constantes del movimiento independientes.

Nos queda finalmente obtener la ecuación de la órbita en función de las componentes del tensor de Fradkin. Para ello analizamos la proyección del tensor sobre el plano del movimiento (x, y), y forma análoga al problema de Kepler donde se utilizó el escalar $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}$, considerar el escalar cuadrático $\boldsymbol{r} \cdot F \cdot \boldsymbol{r}$, que en el plano (x, y) tiene la forma

$$\boldsymbol{r} \cdot F \cdot \boldsymbol{r} \equiv x^2 F_{11} + 2xyF_{12} + y^2 F_{22} \tag{4.11.91}$$

y satisface además, desarrollando

$$\boldsymbol{r} \cdot F \cdot \boldsymbol{r} = \frac{1}{m^2}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p})^2 + \omega^2 r^4 \tag{4.11.92}$$

Para obtener una ecuación dependiente sólo de las coordenadas, necesitamos eliminar el término $(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p})^2$, encontrando para ello su dependencia con las coordenadas y el tensor F. Viendo que, en el plano del movimiento, tenemos

$$\boldsymbol{p}^2 \equiv p_r^2 + \frac{L_z^2}{r^2} = \frac{1}{r^2}\left((\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p})^2 + L_z^2\right) \rightarrow (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p})^2 = r^2\boldsymbol{p}^2 - L_z^2 \tag{4.11.93}$$

utilizando en el lado derecho la ecuación de la energía,

$$(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p})^2 = 2mEr^2 - m^2\omega^2 r^4 - L_z^2 \tag{4.11.94}$$

y la traza de F, encontramos la forma buscada para el término $(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p})^2$

$$\frac{1}{m^2}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p})^2 = r^2\left(\operatorname{tr} F - \omega^2 r^2\right) - \frac{L_z^2}{m^2} \tag{4.11.95}$$

Eliminando entonces este término, llegamos finalmente a la ecuación de la órbita escrita en la forma

$$\begin{aligned} x^2F_{11} + 2xyF_{12} + y^2F_{22} &= r^2\left(\operatorname{tr} F - \omega^2 r^2\right) - \frac{L_z^2}{m^2} + \omega^2 r^4 \\ &= (F_{11} + F_{22})\left(x^2 + y^2\right) - \frac{L_z^2}{m^2} \end{aligned} \tag{4.11.96}$$

Tomando como ejemplo el caso más directo, cuando los ejes de coordenadas están elegidos en la dirección de los ejes principales del tensor F, de forma que éste tiene forma diagonal, con $F_{12} = 0$, la ecuación de la órbita queda

$$F_{22}x^2 + F_{11}y^2 = \frac{L_z^2}{m^2} \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.11.97}$$

que corresponde como esperábamos a una elipse en el plano (x, y) de semiejes

$$a = \sqrt{\frac{1}{F_{22}}}\frac{L_z}{m} \quad , \quad b = \sqrt{\frac{1}{F_{11}}}\frac{L_z}{m} \tag{4.11.98}$$

4.11.6. Teorema de Bertrand-Darboux para sistemas superintegrables

Para un sistema bidimensional con el Hamiltoniano (por simplicidad asumiendo $m = 1$)

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + V(x, y) \tag{4.11.99}$$

sabiendo que tiene la constante del movimiento

$$A_1 = p_x^2 + d_1(x) \tag{4.11.100}$$

(a) Determinar todos los potenciales superintegrables en la forma

$$V\left(x, y\right) = f\left(x\right) + g(y) \tag{4.11.101}$$

para que el sistema tenga una segunda constante de movimiento A_2 también cuadrática en los momentos, e independiente del Hamiltoniano. ¿En qué sistemas de coordenadas es separable cada ecuación de Hamilton−Jacobi correspondiente?

(b) Como último ejemplo, estudiar la forma general del potencial para que el sistema tenga una constante del movimiento de la forma

$$I = p_x L + d\left(x, y\right) \tag{4.11.102}$$

siendo L el momento angular del sistema, y confirmar el resultado obtenido para un potencial de la forma $V\left(x, y\right) = Ax^2 + By^2$, verificando que efectivamente I es constante del movimiento.

(a) Partimos de los resultados detallados en la sección 4.10.3 y en la sección 5.11. El corchete de Poisson de H con la segunda constante A_2, escrita en la forma

$$A_2 = A\left(x, y\right) p_x^2 + 2B\left(x, y\right) p_x p_y + C\left(x, y\right) p_y^2 + D(x, y) \tag{4.11.103}$$

nos llevaría a la involución

$$\left[H, A_2\right] = 0 \tag{4.11.104}$$

siempre que se cumpla el sistema asociado de ecuaciones en derivadas parciales para las funciones implicadas A, B, C, D. Obtenemos

$$\frac{\partial A}{\partial y} + 2\frac{\partial B}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial C}{\partial x} + 2\frac{\partial B}{\partial y} = 0 \tag{4.11.105}$$

Y de aquí, deducimos en primer lugar la forma funcional de las funciones A, B, C, dado que satisfacen, a partir de las ecuaciones anteriores

$$A = A\left(y\right) \quad , \quad C = C(x) \tag{4.11.106}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dA}{dy}x + G\left(y\right) = B\left(x, y\right) = -\frac{1}{2}\frac{dC}{dx}y + F(x) \tag{4.11.107}$$

donde F, G son funciones arbitrarias de sus argumentos. De la última relación para la función B, deducimos la ecuación separable para A y C

$$\frac{d^2A}{dy^2} = \frac{d^2C}{dx^2} = \text{cte} \equiv b \tag{4.11.108}$$

con la solución conjunta

$$A\left(y\right) = \frac{1}{2}by^2 + c_1 y \quad , \quad C\left(x\right) = \frac{1}{2}bx^2 + c_2 x \tag{4.11.109}$$

donde c, d son constantes, de forma que

$$B\left(x,y\right)=-bxy-\frac{1}{2}\left(c_1x+c_2y\right) \tag{4.11.110}$$

Junto a este resultado, recuperamos las dos ecuaciones restantes que determinan la forma del potencial superseparable

$$C\frac{dg}{dy}+B\frac{df}{dx}-\frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial y}=0 \quad , \quad A\frac{df}{dx}+B\frac{dg}{dy}-\frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial x}=0 \tag{4.11.111}$$

A partir de las funciones A, B, C obtenidas, y eliminando la función $D(x, y)$ tomando derivadas cruzadas, llegamos a

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(A(y)\frac{df}{dx}+B(x,y)\frac{dg}{dy}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(C(x)\frac{dg}{dy}+B(x,y)\frac{df}{dx}\right) \tag{4.11.112}$$

Desarrollando los dos miembros, obtenemos la fórmula final

$$\left(\frac{dA}{dy}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)\frac{df}{dx}+\left(\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{dC}{dx}\right)\frac{dg}{dy}+B\left(\frac{d^2g}{dy^2}-\frac{d^2f}{dx^2}\right)=0 \tag{4.11.113}$$

ó en virtud de la relación de A con B y de C con B,

$$-3\frac{\partial B}{\partial x}\frac{df}{dx}+3\frac{\partial B}{\partial y}\frac{dg}{dy}+B\left(\frac{d^2g}{dy^2}-\frac{d^2f}{dx^2}\right)=0 \tag{4.11.114}$$

El análisis subsiguiente debería realizarse introduciendo en esta ecuación cada una de las soluciones posibles para la función B. Resolvemos aquí el caso más general. Dado que la ecuación anterior es lineal en f, g, podemos resolver el potencial superintegrable para cada coordenada por separado. Tomando en primer lugar $f(x)$, la ecuación anterior se lee

$$3\frac{\partial B}{\partial x}\frac{df}{dx}=B\frac{d^2f}{dx^2} \tag{4.11.115}$$

Sabiendo que la forma más general de B es $B\left(x,y\right)=-bxy-\frac{1}{2}\left(c_1x+c_2y\right)$, estudiamos la superintegrabilidad caso por caso.

- Para $b=1$, $c_1=c_2=0$, tenemos el resultado ya conocido

$$3\frac{df}{dx}+x\frac{d^2f}{dx^2}=0\rightarrow f=\alpha x^{-2} \tag{4.11.116}$$

- Para $c_1=1$, $b=c_2=0$, obtenemos el mismo caso anterior, $f=\alpha x^{-2}$.

- Por último, para $c_2=1$, $c_1=b=0$, obtenemos

$$0=\frac{d^2f}{dx^2}\rightarrow f=\alpha x \tag{4.11.117}$$

Pasamos a evaluar el potencial $g(y)$ para el que la superintegrabilidad exige que

$$3\frac{\partial B}{\partial y}\frac{dg}{dy}+B\frac{d^2g}{dy^2}=0 \tag{4.11.118}$$

Para $b=1$, $c_1=c_2=0$, tenemos el resultado ya conocido

$$3\frac{dg}{dy}+y\frac{d^2g}{dy^2}=0\rightarrow g=\beta y^{-2} \tag{4.11.119}$$

- Para $c_2 = 1$, $b = c_1 = 0$, obtenemos el mismo caso anterior, $g = \beta y^{-2}$.
- Por último, para $c_1 = 1$, $c_2 = b = 0$, obtenemos

$$0 = \frac{d^2 g}{dy^2} \rightarrow g = \beta y \tag{4.11.120}$$

Nos queda una última opción que revisar en cada caso, ya que dependiendo de la forma funcional de B el sistema podría resolverse también en forma separable

$$3\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial y}\frac{dg}{dy} + \frac{d^2 g}{dy^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} - 3\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial x}\frac{df}{dx} \tag{4.11.121}$$

- Para $b = 1$, $c_1 = c_2 = 0$, tenemos

$$3\frac{1}{y}\frac{dg}{dy} + \frac{d^2 g}{dy^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} + 3\frac{1}{x}\frac{df}{dx} \equiv m \tag{4.11.122}$$

  y admite la solución superintegrable adicional

$$V(x, y) = \frac{m}{8}\left(x^2 + y^2\right) \tag{4.11.123}$$

- Para $c_1 = 1$, $c_2 = b = 0$, tenemos

$$\frac{d^2 g}{dy^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} - 3\frac{1}{x}\frac{df}{dx} \equiv m \tag{4.11.124}$$

  y admite la solución superintegrable adicional

$$V(x, y) = \frac{m}{8}\left(x^2 + 4y^2\right) \tag{4.11.125}$$

- Para $c_2 = 1$, $c_1 = b = 0$, tenemos

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 g}{dy^2} - 3\frac{1}{y}\frac{dg}{dy} \equiv m \tag{4.11.126}$$

  y admite la solución superintegrable adicional

$$V(x, y) = \frac{m}{8}\left(4x^2 + y^2\right) \tag{4.11.127}$$

Resumiendo, hemos encontrado los siguientes potenciales superintegrables:

- Para $b = 1$, $c_1 = c_2 = 0$

$$V(x, y) = \frac{m}{8}\left(x^2 + y^2\right) + \alpha x^{-2} + \beta y^{-2} \tag{4.11.128}$$

- Para $c_1 = 1$, $c_2 = b = 0$

$$V(x, y) = \frac{m}{8}\left(x^2 + 4y^2\right) + \alpha x^{-2} + \beta y \tag{4.11.129}$$

- Para $c_2 = 1$, $b = c_1 = 0$,

$$V(x, y) = \frac{m}{8}\left(4x^2 + y^2\right) + \alpha x + \beta y^{-2} \tag{4.11.130}$$

Resumimos ahora la superseparabilidad de dichos potenciales. El primer caso ya ha sido analizado (veáse la sección 5.11.1), y es separable en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares. Los otros dos casos son separables en coordenadas cartesianas, no lo son en coordenadas polares,pero sí lo son en coordenadas parabólicas (ξ, η), definidas por las ecuaciones de transformación respecto a las coordenadas cartesianas, en la forma

$$x = \sqrt{\xi\eta} \tag{4.11.131}$$

$$y = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \tag{4.11.132}$$

(b) Por definición, en este sistema bidimensional el momento angular es perpendicular al plano del movimiento, y su módulo está dado por

$$L = (r \times p)_z = xp_y - yp_x \tag{4.11.133}$$

Por tanto, la constante del movimiento en función de las coordenadas y sus velocidades generalizadas se escribe

$$I = xp_xp_y - yp_x^2 + d(x, y) = x\dot{x}\dot{y} - y\dot{x}^2 + d(x, y) \tag{4.11.134}$$

Exigiendo que sea constante del movimiento, y con ayuda de las ecuaciones del movimiento

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \tag{4.11.135}$$

encontramos la condición

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= x\ddot{x}\dot{y} + x\dot{x}\ddot{y} - 2y\dot{x}\ddot{x} + \frac{\partial d}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial d}{\partial y}\dot{y} \\ &= \left(-x\frac{\partial V}{\partial y} + 2y\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial x}\right)\dot{x} + \left(\frac{\partial d}{\partial y} - x\frac{\partial V}{\partial x}\right)\dot{y} = 0 \end{aligned} \tag{4.11.136}$$

Igualando los coeficientes de las velocidades generalizadas $\dot{x}, \dot{y}$ por separado obtenemos las dos condiciones que deben satisfacerse

$$\begin{aligned} -x\frac{\partial V}{\partial y} + 2y\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial d}{\partial y} - x\frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{4.11.137}$$

Podemos deducir ahora una ecuación diferencial para $V(x, y)$ que sea independiente de la función $d(x, y)$. Aplicando respectivamente los operadores $\partial/\partial y$, $\partial/\partial x$, llegamos al resultado

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial V}{\partial y} - 2y\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V}{\partial x}\right) \tag{4.11.138}$$

ó

$$x\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) - 3\frac{\partial V}{\partial x} - 2y\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0 \tag{4.11.139}$$

Introduciendo finalmente la forma del potencial para la comprobación, $V(x, y) = Ax^2 + By^2$, las constantes A, B están relacionadas por la condición que resulta de la ecuación anterior

$$x(2B - 2A) - 6Ax = 0 \rightarrow B = 4A \tag{4.11.140}$$

por lo que el potencial debe ser de la forma $V(x, y) = A\left(x^2 + 4y^2\right)$.

Pasamos a determinar la función $d(x,y)$, cuyas derivadas parciales estarían dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial d}{\partial x} &= x\frac{\partial V}{\partial y} - 2y\frac{\partial V}{\partial x} = 4Axy \\ \frac{\partial d}{\partial y} &= x\frac{\partial V}{\partial x} = 2Ax^2\end{aligned} \tag{4.11.141}$$

que tras la integración

$$\begin{aligned}\frac{\partial d}{\partial x} &= 4Axy \rightarrow d = 2Ax^2y + g(y) \\ \frac{\partial d}{\partial y} &= 2Ax^2 \rightarrow d = 2Ax^2y + h(x)\end{aligned} \tag{4.11.142}$$

tiene la solución única $d = 2Ax^2y + \text{cte}$. Con esto, la expresión para la función I, respecto a las variables canónicas, es

$$I = xp_xp_y - yp_x^2 + 2Ax^2y + \text{cte} \tag{4.11.143}$$

Nos resta verificar que efectivamente I es constante del movimiento, determinando el valor de su corchete $[H,I]$ con el Hamiltoniano del sistema, independiente del tiempo

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + A\left(x^2 + 4y^2\right) \tag{4.11.144}$$

obteniendo el valor esperado

$$\begin{aligned}[H,I] &\equiv \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial I}{\partial p_x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial I}{\partial p_y} - \frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial I}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y} \\ &= 2Ax\left(xp_y - 2yp_x\right) + 8Axyp_x - p_x\left(p_xp_y + 4Axy\right) - p_y\left(-p_x^2 + 2Ax^2\right) \equiv 0\end{aligned} \tag{4.11.145}$$

4.12. Apéndice A. Condiciones que aseguran la transformación canónica

A la hora de analizar si una transformación en el espacio de fases es una transformación canónica, la opción más habitual es encontrar la función generadora asociada, cuando sea posible. Si existe esta función generadora, automáticamente la transformación es canónica. Pero también podremos analizar el problema más rápidamente, y sin tener que descender al detalle de obtener la función generadora. Explicamos a continuación los dos métodos estándar utilizados en estos casos.

4.12.1. Condiciones cruzadas

Este método puede utilizarse cuando la transformación no depende explícitamente del tiempo, por lo que

$$K \equiv H + \cancelto{0}{\frac{\partial F}{\partial t}} \equiv H \tag{4.12.1}$$

La cuestión clave es que de esta manera las ecuaciones de Hamilton para las nuevas variables canónicas tienen la misma forma funcional que las ecuaciones para las variables originales, esto es

$$\dot{Q} \equiv \frac{\partial H}{\partial P} \quad , \quad \dot{q} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} \tag{4.12.2}$$

$$\dot{P} \equiv -\frac{\partial H}{\partial Q} \quad , \quad \dot{p} \equiv -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{4.12.3}$$

Esto quiere decir que si partimos de la transformación canónica, expresada en la forma (recordamos que sólo trabajamos con transformaciones independientes del tiempo)

$$Q \equiv Q(q,p) \quad , \quad P \equiv P(q,p) \tag{4.12.4}$$

podemos eliminar el Hamiltoniano de las ecuaciones anteriores, y quedarnos con una relación funcional válida entre las variables (Q,P) y las variables (q,p), que al no depender del Hamiltoniano, tendrá un carácter *canónico*. Estas relaciones se denominan *condiciones cruzadas* para la transformación canónica, y si son satisfechas podemos asegurar que la transformación de partida es una transformación canónica.

Realizándolo en detalle, tenemos por un lado

$$\dot{Q} \equiv \frac{\partial H}{\partial P} \equiv \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial P} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial P} \tag{4.12.5}$$

y por otro

$$Q = Q(q,p) \Rightarrow \ \dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial p}\dot{p} \equiv \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} \tag{4.12.6}$$

Dado que ambas expresiones deben ser equivalentes, igualando los coeficientes de los términos independientes de la transformación (esto es, los gradientes del Hamiltoniano), obtenemos las condiciones cruzadas, con la expresión explícita de las derivadas parciales

$$\left(\frac{\partial p}{\partial P}\right)_Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)_p \quad , \quad \left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)_Q = -\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_q \tag{4.12.7}$$

Procediendo de forma análoga con la evaluación conjunta de $\dot{P}$, obtenemos las condiciones cruzadas adicionales

$$\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)_P = \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_q \quad , \quad \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_P = -\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)_p \tag{4.12.8}$$

que realmente son las relaciones inversas de las anteriores, e igualmente útiles por separado.

4.12.2. Método simpléctico

Este segundo método también se utiliza prioritariamente para las transformaciones independientes del tiempo, y hace uso de la notación simpléctica[1] por lo que se denomina *método simpléctico*. Definiendo las variables canónicas en la notación simpléctica

$$\boldsymbol{\xi} \equiv \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\chi} \equiv \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \tag{4.12.9}$$

respecto a las cuales, las ecuaciones de Hamilton se escriben en la forma, al ser el nuevo Hamiltoniano $K \equiv H$ dado que $\partial F/\partial t = 0$,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = J \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad , \quad \dot{\boldsymbol{\chi}} = J \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\chi}} \tag{4.12.10}$$

siendo

$$J \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.12.11}$$

la matriz simpléctica, queremos determinar si la transformación en el espacio de fases independiente del tiempo

$$\boldsymbol{\chi} \equiv \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi}) \tag{4.12.12}$$

es una transformación canónica.

[1] Véase el último parágrafo de la sección 3.3.1 para una explicación detallada de esta notación

• La cuestión clave es que aunque la expresión anterior no tenga notación simpléctica, sí la tiene la transformación deducida para las *velocidades*, definida por

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \dot{\boldsymbol{\xi}} \tag{4.12.13}$$

que podemos escribir en la forma matricial

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} \equiv M \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad , \quad M \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \tag{4.12.14}$$

definida por la matriz M asociada a la transformación.

• El procedimiento ahora es el mismo que para las condiciones cruzadas. Podemos eliminar el Hamiltoniano de las ecuaciones anteriores, y quedarnos con una relación funcional válida entre las variables $\boldsymbol{\chi}$ y las variables $\boldsymbol{\xi}$, que en este caso se expresará como una relación funcional para la matriz M, relación que al no depender del Hamiltoniano, tendrá un carácter *canónico*. Y si se satisface esta relación podemos asegurar que la transformación de partida es una transformación canónica.

Condición simpléctica para M Realizándolo en detalle, tenemos por un lado

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} \equiv M \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} \equiv M \cdot J \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\xi}} = M \cdot J \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\chi}} \equiv M \cdot J \cdot M^T \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\chi}} \tag{4.12.15}$$

donde T indica la trasposición matricial. Por otro lado sabemos que

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = J \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\chi}} \tag{4.12.16}$$

Dado que ambas expresiones deben ser equivalentes, igualando los coeficientes de los términos independientes de la transformación (esto es, los gradientes del Hamiltoniano), obtenemos la relación matricial

$$M \cdot J \cdot M^T = J \tag{4.12.17}$$

denominada *condición simpléctica* para la transformación canónica. Como hemos indicado, si se satisface esta condición para la matriz M de la transformación, podemos asegurar que la transformación de partida es una transformación canónica.

Determinante de la matriz M Por su importancia posterior, dedicamos un apartado al cálculo detallado del determinante de la matriz M, matriz asociada a la transformación canónica. Tomando determinantes en la relación matricial anterior, deducimos que[1]

$$(\det M)^2 \det J = \det J \longrightarrow \det M = 1 \tag{4.12.18}$$

condición que puede utilizarse también para comprobar si una transformación dada es canónica. Para ello, lo más habitual es recuperar la notación original (no simpléctica) de la transformación independiente del tiempo

$$Q = Q(q,p) \quad , \quad P = P(q,p) \tag{4.12.19}$$

para la cual la matriz M tiene la expresión explícita

$$M \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \tag{4.12.20}$$

[1] Son dos las propiedades generales de los determinantes que utilizamos aquí: el determinante de un producto de matrices es igual del producto de los determinantes individuales y el determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz transpuesta. Adicionalmente descartamos como resultado el valor $\det M = -1$, ya que no representa una transformación válida en el espacio de fases, definida por $d\boldsymbol{\chi} \equiv \det M d\boldsymbol{\xi}$, con $\det M > 0$.

de forma que la condición $\det M = 1$ queda desarrollada en la forma

$$\det M \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1 \tag{4.12.21}$$

que nos aporta una condición adicional para la verificación directa, y sencilla, del carácter canónico de la transformación dada en el espacio de fases.

4.13. Apéndice B. Generadores de simetría

4.13.1. Corchetes de Poisson del momento angular. Álgebra de Lie

Corchete de Poisson para función vectorial $\boldsymbol{F}$ Sea $\boldsymbol{F}$ una función vectorial definida en un espacio de fases de tipo vectorial $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$, siendo $\boldsymbol{r}$ el vector de posición usual. Como sabemos, (4.6.42), su transformación infinitesimal bajo el generador G está dada por la ecuación

$$\delta \boldsymbol{F} = \varepsilon [\boldsymbol{F}, G] \tag{4.13.1}$$

y en el caso de una rotación arbitraria de ángulo $\varepsilon = d\theta$ alrededor de un eje con vector unitario $\boldsymbol{n}$, con (4.6.70), tenemos

$$\delta \boldsymbol{F} = d\theta \, [\boldsymbol{F}, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L}] \tag{4.13.2}$$

siendo $\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ el vector momento angular.
Por otro lado, siendo $\boldsymbol{F}$ un vector, desde el punto de vista puramente geométrico este cambio está dado por la expresión general asociada a cualquier vector (4.6.65)

$$\delta \boldsymbol{F} = \boldsymbol{n} d\theta \times \boldsymbol{F} \tag{4.13.3}$$

Comparando ambos resultados podemos concluir que el corchete de Poisson de $\boldsymbol{F}$ con la componente $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L}$ del momento angular tiene el valor

$$[\boldsymbol{F}, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L}] = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F} \tag{4.13.4}$$

resultado válido para cualquier vector $\boldsymbol{F}$ arbitrario.

Corchetes de Poisson para el momento angular Aplicamos el resultado anterior al propio vector momento angular, con el resultado

$$[\boldsymbol{L}, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L}] = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{L} \tag{4.13.5}$$

Dado que $\boldsymbol{n}$ es un vector arbitrario, y aparece en los dos lados de la expresión, podemos eliminarlo y obtener el valor de los corchetes de Poisson para las distintas componentes del momento angular. Utilizando la notación tensorial tenemos por un lado, al ser $\boldsymbol{n}$ un vector constante,

$$[\boldsymbol{L}, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L}] \equiv [L_i, n_j L_j] = n_j [L_i, L_j] \tag{4.13.6}$$

donde los índices i, j recorren los valores cartesianos $i, j = x, y, z$. Por el otro lado, tenemos

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{L} \equiv (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{L})_i \equiv \epsilon_{ijk} n_j L_k \tag{4.13.7}$$

siendo ϵ_{ijk} el tensor totalmente antisimétrico (véase la sección 11.2.5).
Igualando entonces las expresiones tensoriales obtenidas

$$n_j [L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} n_j L_k \tag{4.13.8}$$

concluimos, ya que n_j es arbitrario,

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k \tag{4.13.9}$$

y obtenemos así los corchetes de Poisson entre las distintas componentes del momento angular, que en su forma desarrollada tienen la expresión

$$[L_x, L_y] = L_z \quad , \quad [L_y, L_z] = L_x \quad , \quad [L_z, L_x] = L_y \tag{4.13.10}$$

donde sólo hemos indicado los resultados distintos de cero (por ejemplo, no mencionamos el valor trivial $[L_x, L_x] \equiv 0$ que responde también a las propiedades generales de los corchetes de Poisson).

Álgebra de Lie de los generadores Extendiendo el resultado general de que $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L}$ es el generador para la rotación entorno al eje definido por el vector $\boldsymbol{n}$, podemos decir que $L_x \equiv \boldsymbol{u}_x\cdot\boldsymbol{L}$ es el generador para la rotación entorno al eje x, y de forma análoga para los generadores resultantes L_y, L_z.
De esta forma los corchetes de Poisson para las componentes del momento angular pueden definirse como los corchetes de Poisson para los generadores de las tres rotaciones independientes en el espacio cartesiano, formado por el triedro de ejes x, y, z. Esta estructura matemática, basada en los corchetes de Poisson, se denomina *Álgebra de Lie*, en este caso, para el grupo de las rotaciones en el espacio euclídeo, y constituye la característica básica que representa al grupo de estas transformaciones.

Relacionado con este resultado, podemos ver en la sección 13.5 la descripción general de lo que es un álgebra de Lie y de sus principales propiedades, y donde podemos ver que el papel del corchete de Poisson para los generadores lo juega en general el denominado *conmutador* de los generadores

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] \equiv \boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}\boldsymbol{X} \tag{4.13.11}$$

La equivalencia en este sentido es completa. Puede comprobarse de forma directa que el conmutador tiene exactamente las mismas propiedades matemáticas que el corchete de Poisson, que hemos listado en la sección 4.6.1.

Lo destacable aquí, y es lo más característico de cualquier álgebra de Lie, definido de forma génerica como el conjunto de todos los generadores, digamos $\{\boldsymbol{X}_a\}$, más el conjunto de las denominadas *constantes de estructura* (esto es, los valores de todos los conmutadores posibles de cada par de generadores[1]), es que no depende de la representación (en este caso, vectorial) elegida para los generadores.
Por ejemplo, si hubieramos elegido una representación matricial de los generadores, por ejemplo utilizando la notación simpléctica, las relaciones de conmutación (constantes de estructura) serían las mismas substituyendo el operador vectorial $\boldsymbol{X}_a\boldsymbol{X}_b$ por su correspondiente expresión matricial como producto de dos matrices X_aX_b. En este sentido, la estructura del álgebra de Lie es universal y sólo depende de las propiedades de transformación del grupo y no de su representación.

4.13.2. Corchetes de Poisson del Hamiltoniano y el momento angular

Analizamos aquí brevemente las leyes de conservación asociadas a las transformaciones (las rotaciones) cuyos generadores son las componentes del momento angular. El primer resultado a considerar es que el corchete de Poisson del momento angular con una cantidad (función) que sea un *escalar*[2] es idénticamente nulo. Matemáticamente se expresa en la forma

$$0 \equiv \delta f \equiv \varepsilon[f,\boldsymbol{L}] \Rightarrow\ [f,\boldsymbol{L}] = 0 \tag{4.13.12}$$

Partiendo de este resultado inicial, podemos deducir los siguientes resultados adicionales:

(1) Si el Hamiltoniano es una cantidad escalar (por ejemplo, si no depende de un campo externo que fije una dirección privilegiada en el espacio), tenemos

$$[H,\boldsymbol{L}] = 0 \Rightarrow\ \delta H \equiv \varepsilon[H,\boldsymbol{L}] = 0 \tag{4.13.13}$$

y por tanto el Hamiltoniano resulta, como esperabamos, invariante bajo las rotaciones. Además, en este caso tenemos el resultado ya conocido para el propio momento angular

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \equiv [\boldsymbol{L},H] = 0 \Rightarrow\ \boldsymbol{L} = \text{cte} \tag{4.13.14}$$

esto es, el generador de las rotaciones ($\boldsymbol{L}$) es una cantidad conservada si el Hamiltoniano es invariante bajo dicha transformación.

[1] Y que en el caso de las rotaciones serían las componentes del tensor ϵ_{ijk}
[2] Para el espacio euclídeo usual una cantidad escalar es aquella que es invariante bajo las rotaciones, por ejemplo, el producto escalar de dos vectores $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, o la norma de un vector $a \equiv \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

(2) Analizamos ahora el caso de un Hamiltoniano que tiene un término dependiente de un campo externo (por ejemplo, una fuerza externa constante $\boldsymbol{F}$, en cuyo caso el potencial es $V = -\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$)

$$H \equiv H_0 - \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r} \tag{4.13.15}$$

siendo H_0 la parte propiamente *escalar* del Hamiltoniano. En este caso, tenemos los corchetes de Poisson con el generador

$$[H_0, \boldsymbol{L}] = 0 \tag{4.13.16}$$

por ser escalar, y

$$[\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}, \boldsymbol{L}] = \boldsymbol{r}\times[\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}] : \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{M} \tag{4.13.17}$$

al ser en notación tensorial $[\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}] \equiv [r_i, p_j] = \delta_{ij}$, y donde $\boldsymbol{M}$ denota el momento de fuerzas, y : es el símbolo de la contracción tensorial, tal que

$$[\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}] : \boldsymbol{F} \equiv [r_i, p_j]F_j = \delta_{ij}F_j = F_i \equiv \boldsymbol{F} \tag{4.13.18}$$

Con estos resultados vemos que el Hamiltoniano no es invariante bajo las rotaciones, por la presencia del factor externo,

$$\delta H = \varepsilon[H, \boldsymbol{L}] \equiv \varepsilon[H_0 - \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}, \boldsymbol{L}] = -\varepsilon[\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}, \boldsymbol{L}] = -\varepsilon\boldsymbol{M} \tag{4.13.19}$$

y en consecuencia el generador (el momento angular) no es constante del movimiento, y satisface por su parte la ley de movimiento asociada, que expresamos en la forma

$$\delta H = -\varepsilon\boldsymbol{M} \equiv -\varepsilon\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M} \tag{4.13.20}$$

(3) No obstante, todavía disponemos de una simetría adicional particular para este último ejemplo, dado que tenemos la constante del movimiento

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{F}) = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\cdot\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F} \equiv 0 \tag{4.13.21}$$

Esta constante es proporcional a la componente L_F del momento angular en la dirección de $\boldsymbol{F}$, y por tanto actúa como el generador de las rotaciones entorno a la dirección marcada por este campo externo, de vector director

$$\boldsymbol{n} \equiv \frac{\boldsymbol{F}}{||\boldsymbol{F}||} \tag{4.13.22}$$

Definiendo

$$L_F \equiv \frac{\boldsymbol{F}}{||\boldsymbol{F}||}\cdot\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L} \tag{4.13.23}$$

comprobamos que efectivamente el Hamiltoniano es invariante, digamos $\boldsymbol{F}-$invariante, esto es,

$$\delta H \equiv -\varepsilon\left([H_0, L_F] - [\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}, L_F]\right) \equiv 0 \tag{4.13.24}$$

donde el primer corchete es nulo por el caracter escalar de H_0 y el segundo es nulo por el carácter $\boldsymbol{F}-$escalar de $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$:

$$[\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}, L_F] = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \equiv 0 \tag{4.13.25}$$

4.14. Videoclases

Tipo	Duración	Contenidos	Enlace
Teoría	90 mn	Secciones 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.6	S.4.1−S.4.4, S.4.6
Problemas	90 mn	Problemas secciones 4.5, 4.7, 4.11	S.4.5, S.4.7, S.4.11
Autoevaluación	20 mn	Problemas sección 4.9	S.4.9
Otros	90 mn	Apéndices 4.12, 4.13 y sección 4.10	S.4.10

Capítulo 5

Ecuación de Hamilton−Jacobi

5.1. Ecuación de Hamilton−Jacobi. Función principal

5.1.1. Transformación canónica fundamental

Ley del movimiento En general, la ley del movimiento para las variables canónicas (q, p) que describen al sistema está dada por la solución dependiente del tiempo

$$q \equiv q(q_0, p_0, t) \quad , \quad p \equiv p(q_0, p_0, t) \tag{5.1.1}$$

y dependiente de las condiciones iniciales $(q_0 \equiv q(0), p_0 \equiv p(0))$ en el instante inicial $t = 0$. La evolución del sistema en el tiempo quedará totalmente descrita por la trayectoria $(q(t), p(t))$ en el espacio de fases. Esta trayectoria puede visualizarse como el conjunto de puntos dependientes del tiempo en un único espacio de fases genérico, ó también como puntos aislados en sucesivos espacios de fases, cada uno de ello representando el estado del sistema en un instante de tiempo.

Espacio de fases (q_0, p_0) Nos interesa en particular, como veremos, la segunda opción, para la cual, entonces, el espacio de fases en el instante inicial podrá ser designado como (q_0, p_0), entendiendo que contendrá *todos* los posibles estados iniciales del sistema, aunque sólo uno de ellos será el real. Del mismo modo, $(q(t), p(t))$ será el espacio de fases que contiene *todos* los posibles estados [2] del sistema en el instante t.

Transformación canónica fundamental Habiendo descrito el sistema en función de espacios de fases *distintos*, la transformación entre el espacio de fases (q_0, p_0) y el espacio de fases $(q(t), p(t)$ será canónica (ya que está dada por la evolución temporal generada por el Hamiltoniano del sistema), y en este sentido la ley de movimiento

$$q \equiv q(q_0, p_0, t) \quad , \quad p \equiv p(q_0, p_0, t) \tag{5.1.2}$$

puede interpretarse como las *ecuaciones* de esta transformación canónica, en el sentido matemático de que para cada valor particular (q_0, p_0) se obtiene un valor particular $(q(t), p(t))$. Y existirá además una transformación inversa, también canónica, dada por las ecuaciones

$$q_0 \equiv q_0(q, p, -t) \quad , \quad p_0 \equiv p_0(q, p, -t) \tag{5.1.3}$$

dada por la misma evolución temporal con el parámetro de tiempo cambiado de signo (que por tanto no será una evolución *física*).

[2] Dado que la evolución temporal es continua, los estados en el instante t serán aquellos, y sólo aquellos, que se derivan de la evolución temporal a partir de los estados en el instante $t = 0$. Dicho de otra forma, si seleccionamos los estados posibles en el instante $t = 0$ estaremos fijando también los estados posibles para cualquier instante posterior. Es interesante aquí revisar la sección 3.1.3 y el significado que tiene un valor continuo del tiempo.

Valores iniciales constantes del movimiento Los valores iniciales del movimiento

$$q_0 \equiv q(0) \quad , \quad p_0 \equiv p(0) \tag{5.1.4}$$

tienen una particularidad muy importante: son constantes del movimiento.
Lo comprobamos recordando que para un movimiento particular, lo que analizamos *sólo* son los puntos sobre espacios de fases sucesivos, y no el contenido completo de cada espacio de fases, y por tanto podemos deducir que la transformación canónica inversa (5.1.3) representa para un movimiento particular la ley de conservación

$$q_0 \equiv q_0(q(t), p(t), -t) = \text{cte} \quad , \quad p_0 \equiv p_0(q(t), p(t), -t) = \text{cte} \tag{5.1.5}$$

dado que, para cualquier instante de tiempo t, obtenemos por inversión temporal (con parámetro $-t$) el mismo y único valor de las variables canónicas iniciales.

Teoría de Hamilton−Jacobi Tenemos ya los dos ingredientes para dar forma a una teoría que nos permita obtener la solución para el movimiento del sistema de forma directa, aplicando una transformación canónica:

- La transformacion canónica a realizar es *única*[1].
- Las variables canonicas transformadas (esto es, los valores iniciales (q_0, p_0)) son constantes del movimiento.

La teoría basada en la aplicación de estas dos propiedades se denomina en general *teoría de Hamilton−Jacobi*.

5.1.2. Ecuación de Hamilton−Jacobi

Kamiltoniano K idénticamente nulo Si revisamos las ecuaciones dinámicas para las nuevas variables canónicas (sección 4.1.2)

$$\dot{Q} \equiv \frac{\partial K}{\partial P} \quad , \quad \dot{P} \equiv -\frac{\partial K}{\partial Q} \tag{5.1.6}$$

en términos del nuevo Hamiltoniano K, el denominado *Kamiltoniano*, vemos que si conseguimos tras la transformación canónica que K sea idénticamente nulo[2]

$$K \equiv 0 \tag{5.1.7}$$

entonces la solución a las ecuaciones de Hamilton para este K será

$$\dot{Q} = 0 \Rightarrow \; Q = \text{cte} \quad , \quad \dot{P} = 0 \Rightarrow \; P = \text{cte} \tag{5.1.8}$$

Esto es, las nuevas variables canónicas serán constantes del movimiento.

Ecuación de Hamilton−Jacobi Por tanto, la solución a los requisitos de la teoría de Hamilton−Jacobi es sencilla y directa: la transformación canónica que lleva al sistema en el instante t a su estado en el instante $t = 0$ será tal que el nuevo Hamiltoniano, definido por la ecuación de la transformación canónica

$$K \equiv H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad , \quad K \equiv 0 \tag{5.1.9}$$

[1] La cuestión relevante es localizar esta transformación única, ya que en ausencia de este requisito, sería perfectamente posible obtener la solución para el movimiento del sistema aplicando sucesivas transformaciones infinitesimales, de parámetro dt, hasta alcanzar el valor t del tiempo. Ó de forma totalmente análoga obtener $q(t)$ mediante su desarrollo en serie en términos de los corchetes de Poisson sucesivos evaluados en $t = 0$, como se detalla en la sección 4.6.3.

[2] No debemos confundir esta identidad con el caso de un Hamiltoniano dependiente de las variables canónicas cuyo valor sea cero, por ejemplo, cuando la energía del sistema es cero.

sea idénticamente cero. Aquí F es la función generadora y dependiendo de su tipo obtendremos distintos tipos de expresiones.
En general, la expresión anterior debe interpretarse como una ecuación para la función F desconocida, cuya solución determina por completo la solución al movimiento del sistema, una vez aplicadas las ecuaciones de transformación correspondientes $(Q, P) \to (q, p)$. Concluimos por tanto que la ecuación fundamental para aplicar la teoría de Hamilton−Jacobi es la ecuación para la función generadora F

$$H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{5.1.10}$$

que se denomina *ecuación de Hamilton−Jacobi*.

Comentario adicional. Cantidades conservadas Debemos hacer un inciso importante. Aplicando únicamente la ecuación de Hamilton−Jacobi y su resolución, no nos asegura que las nuevas variables canónicas sean exactamente los valores iniciales $q(0), p(0)$ del movimiento, ya que el único requisito que estamos aplicando es que las cantidades obtenidas tengan valor constante, y obviamente cualquier función de estas constantes también será una constante. Resumiendo, aunque no den como resultado los valores $(q(0), p(0))$, los valores constantes obtenidos, digamos (Q_0, P_0), *sí* estarán relacionados con $(q(0), p(0))$, y por tanto, éstos podrán deducirse de aquellos. Estaremos hablando entonces de un conjunto de $2n$ cantidades conservadas para un sistema de n grados de libertad[1].

5.1.3. Función principal S

Para pasar a la práctica lo primero que debemos hacer es elegir el tipo de representación para la función generadora[2]. Lo más recomendado es trabajar con el tipo 2, ya que este tipo contiene la transformación identidad $F_2 = qP$ que representa físicamente la evolución temporal con $dt = 0$, lo que nos servirá por ejemplo para verificar nuestro resultado en este límite.

Ecuación de Hamilton−Jacobi Para una función generadora de tipo 2, $F_2 \equiv F(q, P, t)$ la ecuación de Hamilton−Jacobi para el Hamiltoniano $H(q, p)$ se escribe

$$H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \Rightarrow \; H\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{5.1.11}$$

ya que en este caso q es una variable independiente, y p la variable dependiente dada por

$$p \equiv \frac{\partial F}{\partial q} \tag{5.1.12}$$

Del mismo modo, una vez resuelta la ecuación de Hamilton−Jacobi y obtenida la función $F(q, P, t)$ la nueva coordenada canónica Q, también variable dependiente para este tipo de representación, está dada por la definición

$$Q \equiv \frac{\partial F}{\partial P} \tag{5.1.13}$$

Función principal S Como veremos, por las propiedades que tiene, la función generadora para la ecuación de Hamilton−Jacobi se denomina *función principal* de Hamilton, definida para el tipo 2

$$S \equiv S(q, P, t) \tag{5.1.14}$$

[1] Y, como resultado general, para que sea posible esta inversión, y pueda obtenerse la ley de movimiento $(q(t), p(t))$ en función de estas constantes, la expresión funcional de al menos *una* de ellas debe depender explícitamente del tiempo.

[2] Y por simplicidad trabajaremos en la mayoría de los casos con Hamiltonianos que no dependan explícitamente del tiempo, ya que son los más habituales, y además para ellos la ecuación de Hamilton−Jacobi se resuelve de forma más sencilla.

y dado que las nuevas variables canónicas (Q, P) son constantes del movimiento, digamos (β, α), podemos escribir

$$S \equiv S(q, \alpha, t) \tag{5.1.15}$$

y por tanto dependerá funcionalmente de n constantes α. Así mismo, de la definición de Q, obtenemos

$$Q \equiv \frac{\partial S}{\partial P} \equiv \frac{\partial S}{\partial \alpha} \equiv \beta = \text{cte} \tag{5.1.16}$$

que resulta ser una ecuación para la variable independiente q en función de las constantes α, β y del tiempo, cuya solución será por tanto la ley de movimiento $q \equiv q(\alpha, \beta, t)$.
Y finalmente para la variable dependiente p obtenemos, en este caso, la ley de movimiento de forma directa

$$p \equiv \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q} \equiv p(q(\alpha, \beta, t), \alpha, t) \equiv p(\alpha, \beta, t) \tag{5.1.17}$$

Condiciones iniciales del movimiento Como hemos indicado anteriormente, con el método de Hamilton−Jacobi hemos podido deducir la ley del movimiento en función de una serie de constantes que no tienen por qué ser los valores iniciales del movimiento aunque sí estan relacionados con ellos. De hecho, habiendo obtenido la ley de movimiento, los valores iniciales del movimiento satisfacen obviamente

$$q_0 \equiv q(0) = q(\alpha, \beta, 0) \quad , \quad p_0 \equiv p(0) = p(\alpha, \beta, 0) \tag{5.1.18}$$

y por tanto despejando α, β en estas relaciones obtenemos las relaciones en la forma

$$\alpha \equiv \alpha(q_0, p_0) \quad , \quad \beta \equiv \beta(q_0, p_0) \tag{5.1.19}$$

lo que nos permite obtener definitivamente la ley de movimiento en la forma esperada

$$q \equiv q(\alpha(q_0, p_0), \beta(q_0, p_0), t) = q(q_0, p_0, t) \tag{5.1.20}$$

y

$$p \equiv p(\alpha(q_0, p_0), \beta(q_0, p_0), t) = p(q_0, p_0, t) \tag{5.1.21}$$

5.1.4. Significado físico de S

La función principal de Hamilton tiene un significado preciso que determinamos tomando como referencia el tipo 2 para la representación de la función generadora. En este caso,

$$p \equiv \frac{\partial S}{\partial q} \tag{5.1.22}$$

y además, por la propia ecuación de Hamilton−Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \tag{5.1.23}$$

Con estos dos resultados es directo ver que el diferencial dS satisface, al ser α constante,

$$S \equiv S(q, \alpha, t) \Rightarrow \; dS \equiv \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial q} dq \equiv -H dt + p dq \equiv (p\dot{q} - H)\, dt \tag{5.1.24}$$

y teniendo en cuenta la definición del Lagrangiano, dentro del formalismo Hamiltoniano, y cuando sea posible,

$$L \equiv p\dot{q} - H \tag{5.1.25}$$

deducimos que

$$dS = L dt \Rightarrow \; S \equiv \int L dt \tag{5.1.26}$$

En conclusión, la función principal S es igual a la acción del sistema, y de ahí su representación con la letra S.

Esta equivalencia nos servirá también para determinar la función S sin resolver la ecuación de Hamilton−Jacobi, y sólo con la integración directa del Lagrangiano. Con una salvedad importante, ya que el Lagrangiano como tal depende de coordenadas y velocidades, y al integrarse en el tiempo el resultado dependerá únicamente de las coordenadas (inicial y final) del movimiento. En consecuencia, la función S así derivada dependerá de la coordenada inicial Q y de la coordenada final q del movimiento, y por tanto, por definición será de inicio una función generadora de tipo 1.

5.1.5. Función característica W

Separación de variables Nos habiamos referido al hecho que la ecuación de Hamilton−Jacobi se resuelve de forma más sencilla para un Hamiltoniano que no dependa explícitamente del tiempo. Lo comprobamos ahora, tomando un Hamiltoniano genérico $H = H(q, p)$. La ecuación de Hamilton−Jacobi correspondiente para la función principal $S(q, \alpha, t)$ se escribe

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{5.1.27}$$

y por su expresión admite lo que se denomina una *solución por separación de variables*,

$$S(q, \alpha, t) \equiv W(q, \alpha) + X(\alpha, t) \tag{5.1.28}$$

El término *separación* indica que la dependencia en las variables de la función, en este caso, q y t ya que α es constante, se ha *separado* en dos términos: una función que depende únicamente de q, y de α, y una función que depende únicamente de t, y de α.

Nos queda verificar entonces que la solución así planteada es correcta. Introduciendo esta expresión funcional en la ecuación de Hamilton−Jacobi, obtenemos

$$H\left(q, \frac{dW}{dq}\right) + \frac{dX}{dt} = 0 \tag{5.1.29}$$

ya que las derivadas parciales se transforman en derivadas totales de las funciones respectivas respecto a su argumento. Escribiendo esta ecuación diferencial en la forma

$$H\left(q, \frac{dW}{dq}\right) = -\frac{dX}{dt} \tag{5.1.30}$$

comprobamos lo siguiente. Funcionalmente el lado izquierdo es función únicamente de q y el lado derecho es función únicamente de t, siendo q, t independientes. Ésto *sólo* puede ser cierto si ambos lados son iguales a una misma constante, que podemos elegir arbitrariamente como la constante que teníamos indeterminada α. Con esto, la ecuación anterior se desdobla en dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$H\left(q, \frac{dW}{dq}\right) = \alpha \tag{5.1.31}$$

$$\frac{dX}{dt} = -\alpha \Rightarrow\ X = -\alpha t \tag{5.1.32}$$

La segunda ecuación ha tenido una solución directa mientras que la solución de la primera dependerá de la forma específica del Hamiltoniano. En cualquier caso, sí podemos saber además el valor de la constante indeterminada, al ser

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow\ H = \text{cte} \equiv E \Rightarrow\ \alpha = H = E \tag{5.1.33}$$

Esto es, la constante α es igual a la energía del sistema, en su sentido más amplio, y así será el nuevo momento $P \equiv E$. Y la función principal tendrá la expresión *separable*

$$S(q, E, t) \equiv W(q, E) - Et \tag{5.1.34}$$

Función característica W El resultado separable anterior es válido para cualquier Hamiltoniano independiente del tiempo, de ahí su importancia. Esta importancia también se manifiesta en una denominación específica para la función W, como *función característica* de Hamilton, y que en cierto modo juega el mismo papel que la función principal en los sistemas conservativos, con $H \equiv E = \text{cte}$.

5.2. Ejemplo detallado. Oscilador armónico

Desarrollamos en detalle la resolución del movimiento del oscilador armónico de frecuencia ω y Hamiltoniano

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{5.2.1}$$

Ecuación de Hamilton−Jacobi. Solución separable La ecuación de Hamilton−Jacobi para la función principal $S \equiv S(q,\alpha,t)$ de este sistema mecánico se escribe en la forma

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \Rightarrow \ \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{5.2.2}$$

y admite la solución separable

$$S(q,\alpha,t) = W(q,\alpha) - \alpha t \tag{5.2.3}$$

siendo α la constante indeterminada.

Primera constante del movimiento Esta constante está dada por

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \equiv -\alpha \Rightarrow \ \alpha = H \equiv E \tag{5.2.4}$$

dado que el sistema satisface las condiciones para la conservación de la energía

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \ H = T + V = \text{cte} = E \tag{5.2.5}$$

Concluimos por tanto que el sistema tiene una primera constante de movimiento

$$\alpha = E \tag{5.2.6}$$

Función característica Dado que el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, resulta más conveniente utilizar la función característica $W(q,E)$ que satisface la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E \tag{5.2.7}$$

al ser

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} \equiv \frac{dW}{dq} \tag{5.2.8}$$

Esta ecuación para W es resolubre por cuadraturas en la forma

$$W = \sqrt{2mE}\int \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}}\,dq \tag{5.2.9}$$

integral que, en principio, no necesitamos resolver de forma explícita. Y con ello obtenemos también la expresión para la función principal

$$S(q,E,t) = \sqrt{2mE}\int \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}}\,dq - Et \tag{5.2.10}$$

Segunda constante del movimiento Aplicando la transformación canónica $(q,p) \to (Q \equiv \beta, P \equiv E)$, la nueva coordenada Q viene dada por la ecuación de transformación

$$Q \equiv \frac{\partial S}{\partial P} \tag{5.2.11}$$

correspondiente a una transformacion de tipo 2, siendo S la función generadora. Dado tiene el valor constante β (que será la segunda constante del movimiento), tendremos la expresión equivalente, al ser $P \equiv E$,

$$\beta \equiv \frac{\partial S}{\partial E} \tag{5.2.12}$$

que da lugar al resultado

$$\beta = m \int \frac{dq}{\sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}} - t \tag{5.2.13}$$

expresión que tiene una integral directa, con el resultado final

$$\beta = \frac{1}{\omega} \text{arcsen} \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q \right) - t \tag{5.2.14}$$

Ley del movimiento Para obtener la ley del movimiento basta invertir las ecuaciones de la transformación canónica $(q,p) \to (\beta, E)$ para llegar a la expresión

$$q(t) \equiv q(\beta, E, t) \quad , \quad p(t) \equiv p(\beta, E, t) \tag{5.2.15}$$

Concretamente obtenemos

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \,\text{sen}\,(\omega t + \omega\beta) \tag{5.2.16}$$

y de aquí al ser

$$p \equiv \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{dW}{dq} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \tag{5.2.17}$$

obtenemos

$$p(t) \equiv \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q(t)^2} = \sqrt{2mE}\cos(\omega t + \omega\beta) \tag{5.2.18}$$

Para interpretar el significado de las constantes (β, E) deberemos obtener primero su expresión en términos de las condiciones iniciales del movimiento.

Condiciones iniciales del movimiento Los valores iniciales del movimiento (q_0, p_0) corresponden al instante t, y por tanto están definidos por

$$q_0 \equiv q(0) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \,\text{sen}\,\omega\beta \tag{5.2.19}$$

$$p_0 \equiv p(0) \equiv \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q_0^2} = \sqrt{2mE}\cos\omega\beta \tag{5.2.20}$$

De estas dos relaciones podemos despejar el valor de las constantes (β, E) en la forma

$$\tan\omega\beta = \frac{m\omega q_0}{p_0} \equiv \frac{\omega q_0}{\dot{q}_0} \tag{5.2.21}$$

y

$$E = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2 \tag{5.2.22}$$

y por tanto corresponden al valor de la fases inicial $\phi \equiv \omega\beta$ y la energía inicial del movimiento (y por conservación, igual a la energía del oscilador en todo instante de tiempo).

5.3. Separación de variables

5.3.1. Criterio de separabilidad de Levi-Civita (V)

Ecuación de Hamilton−Jacobi separable Decimos que la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica W

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E \tag{5.3.1}$$

es *totalmente* separable si tiene una solución de la forma

$$W(q) \equiv A_i f_i(q_i) \tag{5.3.2}$$

con suma en el índice i, con valores $i = 1, .., n$ para un sistema de n grados de libertad.

Criterios de separabilidad Dado un Hamiltoniano resulta natural preguntarse si la ecuación de Hamilton−Jacobi correspondiente tiene una solución aditivamente separable en el sistema de coordenadas utilizado. El criterio más general, junto con las denominadas *condiciones de Staëckel* que no utilizaremos por ser demasiado específicas, es el siguiente teorema, cuya demostración se desarrolla en el apéndice 5.10.1,

Teorema de Levi-Civita La ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo admite una solución aditivamente separable sí y sólo si

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \tag{5.3.3}$$

para cada par de valores distintos de los índices i, j que numeran las coordenadas y momentos del sistema.

5.3.2. Ejemplos detallados

Ejemplo Analizamos un Hamiltoniano en coordenadas polares del tipo

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + f(r)p_\theta^2\right) + g\left(r\right)U\left(\theta\right) \tag{5.3.4}$$

donde f, g, U son funciones arbitrarias de sus argumentos, y analicemos para que funciones concretas la ecuación de Hamilton−Jacobi es separable en estas coordenadas. Como sólo tenemos dos coordenadas, sólo necesitamos aplicar el teorema de Levi-Civita para $q_i = r$, $q_j = \theta$ y $p_i = p_r$, $p_j = p_\theta$

$$\frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial p_\theta} + \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial p_\theta}\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial p_\theta} + \frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial p_\theta}\frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial \theta} \tag{5.3.5}$$

Para la estructura del Hamiltoniano, tenemos las cuatro derivadas segundas

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial p_\theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial \theta} = 0 \tag{5.3.6}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial \theta} = g'\left(r\right)U'\left(\theta\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial p_\theta} = \frac{1}{m}p_\theta f'(r) \tag{5.3.7}$$

y las cuatro derivadas primeras

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{2m}f'(r) + g'\left(r\right)U\left(\theta\right) \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \tag{5.3.8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = g\left(r\right) U'\left(\theta\right) \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m} f(r) \tag{5.3.9}$$

Con ello, para la separabilidad se debe satisfacer

$$\frac{p_r p_\theta}{m^2} U'\left(\theta\right) \left(f(r) g'\left(r\right) - g\left(r\right) f'(r)\right) = 0 \tag{5.3.10}$$

El conjunto de soluciones, y por tanto, el conjunto de Hamiltonianos separables en coordenadas polares es el siguiente, distribuido por casos,

- Para $p_r \equiv 0$,

$$H = \frac{p_\theta^2}{2m} f(r) + g\left(r\right) U\left(\theta\right) \tag{5.3.11}$$

  para funciones f, g cualesquiera.

- Para $p_\theta \equiv 0$,

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + g\left(r\right) U\left(\theta\right) \tag{5.3.12}$$

  para funciones g, U cualesquiera.

- Para $U'\left(\theta\right) \equiv 0$, esto es, con $U\left(\theta\right) = \text{cte}$,

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + f(r) p_\theta^2\right) + U g\left(r\right) \tag{5.3.13}$$

  para funciones f, g cualesquiera.

- Finalmente, para la solución tal que

$$f\left(r\right) g'\left(r\right) - g\left(r\right) f'\left(r\right) \equiv 0 \rightarrow f^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{g}{f}\right) = 0 \tag{5.3.14}$$

  con la solución $g = \text{cte} \cdot f$, el Hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + f(r) p_\theta^2\right) + \text{cte} \cdot f(r) U\left(\theta\right) \tag{5.3.15}$$

Ejemplo En este caso analizamos el Hamiltoniano en un sistema de dos coordenadas (q_1, q_2), del tipo

$$H = p_1^2 + p_2^2 + a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + f\left(q_1^2 + q_2^2\right) \tag{5.3.16}$$

donde f es función arbitraria de su argumentos, y determinemos para que función f concreta, dependiente de sus variables, la ecuación de Hamilton−Jacobi es separable en estas coordenadas. Como sólo tenemos dos coordenadas, sólo necesitamos aplicar el teorema de Levi-Civita para $i = 1$, $j = 2$. Y por la estructura funcional del Hamiltoniano, tenemos las cuatro derivadas segundas

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_2} = 0 \tag{5.3.17}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_2} = 4 q_1 q_2 f''\left(q_1^2 + q_2^2\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_2} = 0 \tag{5.3.18}$$

Con ello, para la separabilidad se debe satisfacer

$$16 p_1 p_2 q_1 q_2 f''\left(q_1^2 + q_2^2\right) = 0 \tag{5.3.19}$$

con la única solución físicamente aceptable

$$f''\left(q_1^2 + q_2^2\right) = 0 \rightarrow f = A + B\left(q_1^2 + q_2^2\right) \tag{5.3.20}$$

Ejemplo En este caso analizamos el Hamiltoniano en un sistema de dos coordenadas (q_1, q_2), del tipo

$$H = f_1(q_1)p_1^2 + f_2(q_2)p_2^2 + V(q_1, q_2) \tag{5.3.21}$$

donde f_1, f_2, V son funciones arbitraria de sus argumentos, y determinamos para que función concreta $V(q_1, q_2)$, dependiente de sus variables, la ecuación de Hamilton−Jacobi es separable en estas coordenadas. Como sólo tenemos dos coordenadas, sólo necesitamos aplicar el teorema de Levi-Civita para $i = 1$, $j = 2$. Y por la estructura funcional del Hamiltoniano, tenemos las cuatro derivadas segundas

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_2} = 0 \tag{5.3.22}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \quad , \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_2} = 0 \tag{5.3.23}$$

Con ello, para la separabilidad se debe satisfacer

$$4p_1 p_2 f_1(q_1) f_2(q_2) \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} = 0 \tag{5.3.24}$$

con la única solución físicamente aceptable

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} = 0 \rightarrow V = g_1(q_1) + g_2(q_2) \tag{5.3.25}$$

Ejemplo Sea el Hamiltoniano en un sistema de dos coordenadas (q_1, q_2), del tipo

$$H = A(q_1, q_2)\left(p_1^2 + f_1(q_1)\right) + B(q_1, q_2)\left(p_2^2 + f_2(q_2)\right) \tag{5.3.26}$$

donde f_1, f_2, A, B son funciones arbitraria de sus argumentos, y analicemos para qué funciones específicas $A(q_1, q_2)$ y $B(q_1, q_2)$ la ecuación de Hamilton−Jacobi es separable en estas coordenadas. Para realizar el cálculo de la forma más sencilla posible redefinimos el Hamiltoniano en la forma

$$H \equiv A(q_1, q_2)\, p_1^2 + B(q_1, q_2)\, p_2^2 + Q(q_1, q_2) \tag{5.3.27}$$

Para esta estructura del Hamiltoniano, el criterio de Levi-Civita para la separabilidad da lugar a la ecuación

$$AB\left(A_{12}p_1^2 + B_{12}p_2^2 + Q_{12}\right) = AB_1\left(A_2 p_1^2 + B_2 p_2^2 + Q_2\right) + BA_2\left(A_1 p_1^2 + B_1 p_2^2 + Q_1\right) \tag{5.3.28}$$

donde los subíndices en las funciones A, B, Q indican la derivada parcial respecto a la coordenada de ese índice (pe, A_{12} representa la derivada parcial segunda de la función A respecto a q_1 y a q_2). La condición anterior debe ser válida para todo valor del momento p_1 y del momento p_2. Igualando los coeficientes dichos momentos en ambos lados de esta expresión, y el coeficiente para el término independiente de éstos, obtenemos tres condiciones que se deben satisfacer simultáneamente para la separabilidad, y que escribimos en la forma

$$\begin{aligned} p_1 : &\quad B(AA_{12} - A_2A_1) = AA_2B_1 \\ p_2 : &\quad A(BB_{12} - B_1B_2) = BA_2B_1 \\ 1 : &\quad AB_1Q_2 + BA_2Q_1 = ABQ_{12} \end{aligned} \tag{5.3.29}$$

Introduciendo la definición de la función $Q \equiv Af_1 + Bf_2$, podemos comprobar con un cálculo directo que la tercera ecuación de satisface idénticamente, esto es, la separabilidad para las funciones A, B es independiente funcionalmente de las funciones f_1 y f_2. Para resolver las dos ecuaciones restantes, multiplicamos la primera por B, la segunda por A e igualamos el resultado obteniendo

$$B^2(AA_{12} - A_2A_1) = A^2(BB_{12} - B_1B_2) \tag{5.3.30}$$

De esta expresión ya tenemos deducir una primera solución de forma directa, con $A \equiv 0$ ó $B \equiv 0$. Esta solución da lugar a una separabilidad trivial, ya que en estos casos el sistema sólo tiene un grado de libertad, q_2 y q_2 respectivamente. Considerando entonces el caso más general, $A \neq 0$, $B \neq 0$, la relación anterior, escrita en la forma

$$\frac{AA_{12} - A_2A_1}{A^2} = \frac{BB_{12} - B_2B_1}{B^2} \tag{5.3.31}$$

representa la ecuación en derivadas parciales

$$\partial_{12}\left(\ln A\right) = \partial_{12}\left(\ln B\right) \tag{5.3.32}$$

como puede comprobarse de forma directa. La solución de esta ecuación diferencial nos da por tanto la solución más general, en la forma

$$\partial_{12}\left(\ln A - \ln B\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \ln A - \ln B = F(q_1) + G(q_2) \tag{5.3.33}$$

siendo F y G funciones arbitrarias de sus argumentos, y de aquí directamente

$$\frac{A}{B} = e^{F(q_1)+G(q_2)} \equiv e^{F(q_1)} \cdot e^{G(q_2)} \equiv f(q_1)g(q_2) \tag{5.3.34}$$

que determina que el cociente entre la función A y la función B es una función factorizada en las coordenadas. Nos queda entonces introducir este resultado parcial en la primera relación de 5.3.29, para deducir el perfil específico para la función B, por ejemplo. Es un ejercicio directo ver que en este caso la función B satisface necesariamente una factorización en la forma

$$\frac{1}{B} \equiv h(q_1)g(q_2) \tag{5.3.35}$$

en cuyo caso tenemos directamente

$$A = \frac{f(q_1)}{h(q_1)} \equiv K(q_1) \tag{5.3.36}$$

Tenemos además la solución indepediente que resulta del intercambio directo de A por B y 1 por 2, esto es, con la expresión

$$\frac{1}{A} \equiv h(q_2)g(q_1) \quad , \quad B = K(q_2) \tag{5.3.37}$$

En conclusión, para la separabilidad de la ecuación de Hamilton−Jacobi será necesaria una de las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} &\bullet \quad A \equiv 0 \quad , \quad B = f(q_2) \\ &\bullet \quad A = f(q_1) \quad , \quad B \equiv 0 \\ &\bullet \quad A = f(q_1)g(q_2) \quad , \quad B = h(q_2) \\ &\bullet \quad A = f(q_1) \quad , \quad B = g(q_1)h(q_2) \end{aligned} \tag{5.3.38}$$

siendo f, g, h funciones arbitrarias de sus argumentos. Dento de este conjunto de soluciones, está incluida la solución para la separabilidad en su forma más sencilla, que podíamos haber predicho sin realizar ningún cálculo,

$$A = A\left(q_1\right) \quad , \quad B = B(q_2) \tag{5.3.39}$$

5.4. Ejercicios resueltos

5.4.1. Función principal S para partícula libre

Para una partícula libre de masa m en una dimensión,

(a) Calcule la acción construida a partir del Lagrangiano, para el movimiento de la partícula desde su estado inicial (x_i, t_i) a su estado final (x, t), siendo x la coordenada espacial, y t el tiempo.

(b) Demuestre que la acción así construida satisface la ecuación de Hamilton−Jacobi. Verifique que el resultado obtenido es independiente del estado de la partícula que se tome en consideración.

(c) Resuelva la ecuación de Hamilton−Jacobi para la partícula libre por el método de separación de variables.

(d) Recordando que S puede identificarse con la función generadora de la transformación canónica que cambia el sistema de su estado actual al estado inicial, y que el Hamiltoniano resultante es idénticamente nulo, determine la solución general del movimiento de la partícula libre a partir de la función principal. Verifique que obtenemos la solución esperada.

(e) Resuelva de nuevo el apartado anterior considerando que S es una función generadora de tipo 3. Para ello, utilice, deduciéndola, la expresión de la ecuación de Hamilton−Jacobi que debe satisfacer este tipo de función principal.

(a) Para una partícula libre que se mueva en una dimensión, el Lagrangiano y la ecuación de movimiento son, respectivamente

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad , \quad \ddot{x} = 0 \tag{5.4.1}$$

Integrando la ecuación de movimiento, obtenemos la solución general $\overline{x}(\overline{t})$ de la trayectoria que une los estados inicial (x_i, t_i) y final (x, t)

$$\overline{x} = x_i + \left(\frac{x - x_i}{t - t_i} \right) \left(\overline{t} - t_i \right) \tag{5.4.2}$$

donde las variables $(\overline{x}, \overline{t})$ denotan la posición y el tiempo de cualquier estado intermedio de la partícula.

En este caso la acción para la trayectoria descrita por la partícula se obtiene integrando en el tiempo el Lagrangiano entre el instante inicial y final. Dado que la velocidad de la partícula es constante

$$v \equiv \frac{d\overline{x}}{d\overline{t}} = \text{cte} \tag{5.4.3}$$

la variable S se obtiene con el desarrollo directo de la integral, en la forma

$$\begin{aligned} S\left(x, t; x_i, t_i\right) &\equiv \int_{t_i}^{t} L d\overline{t} = \int_{t_i}^{t} \frac{1}{2} m \frac{d\overline{x}}{d\overline{t}} \frac{d\overline{x}}{d\overline{t}} d\overline{t} = \frac{1}{2} m \frac{d\overline{x}}{d\overline{t}} \int_{x_i}^{x} \frac{d\overline{x}}{d\overline{t}} d\overline{x} \\ &= \frac{1}{2} m \frac{d\overline{x}}{d\overline{t}} \int_{x_i}^{x} d\overline{x} = \frac{1}{2} m \left(x - x_i\right) \frac{d\overline{x}}{d\overline{t}} \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Sin embargo, el cálculo no estará completo hasta que expresemos el resultado en función de las variables de espacio y tiempo, que son las que determinan funcionalmente a S. Para ello, determinamos la velocidad de la partícula, al ser constante, por el valor promedio, también constante,

$$\frac{d\overline{x}}{d\overline{t}} = \frac{x - x_i}{t - t_i} \tag{5.4.5}$$

y obtenemos finalmente

$$S\left(x, t; x_i, t_i\right) = \frac{1}{2} m \frac{\left(x - x_i\right)^2}{t - t_i} \tag{5.4.6}$$

(b) En términos de esta acción, expresada en función de coordenadas y tiempos, podemos deducir la expresión del momento y la energía de la partícula con las identificaciones

$$p \equiv mv = m\frac{x - x_i}{t - t_i} \equiv \frac{\partial S}{\partial x} \tag{5.4.7}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{\left(x - x_i\right)^2}{\left(t - t_i\right)^2} \equiv -\frac{\partial S}{\partial t} \tag{5.4.8}$$

Por tanto, considerando las fórmulas obtenidas, de la definición del Hamiltoniano de la partícula libre

$$H = E = \frac{p^2}{2m} \tag{5.4.9}$$

deducimos la ecuación de Hamilton−Jacobi para la variable S,

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{5.4.10}$$

que será entonces función principal de Hamilton para este sistema.

Ya que hemos utilizado exclusivamente los valores (x, t) al derivar para obtener p y E, y estos corresponden al estado final de la partícula, podría pensarse que la ecuación obtenida sólo es válida para el estado final, y no para todo tiempo. Sin embargo, dado que el estado final es totalmente arbitrario puede tomarse en consideración como estado final igualmente válido cualquier estado intermedio, de forma que se satisface también

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial \overline{x}}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial \overline{t}} = 0 \tag{5.4.11}$$

en cualquier estado de la trayectoria.

Como ultima comprobación, escogamos ahora el estado inicial (x_i, t_i), respecto al cual, derivando de forma directa como en el caso anterior llegaríamos a1

$$p \equiv mv = m\frac{x - x_i}{t - t_i} \equiv -\frac{\partial S}{\partial x_i} \tag{5.4.12}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{\left(x - x_i\right)^2}{\left(t - t_i\right)^2} \equiv \frac{\partial S}{\partial t_i} \tag{5.4.13}$$

por lo que debería concluirse que para el estado inicial no se satisface la ecuación de Hamilton−Jacobi. El error aquí está en pretender calcular una ecuación de evolución del sistema que lleve la trayectoria del sistema hacia el estado inicial. Pero esto sólo puede realizarse cuando el incremento del tiempo es negativo, es decir, para $t - t_i < 0$. De esta forma, es requisito indispensable seleccionar un tiempo $t < t_i$, de forma que al intercambiar entre sí estado final e inicial, la acción real sería

$$S' \equiv S\left(x_i, t_i; x, t\right) = \frac{1}{2}m\frac{\left(x_i - x\right)^2}{t_i - t} = -S\left(x, t; x_i, t_i\right) \tag{5.4.14}$$

Con esto, las fórmulas anteriores, escritas respecto a la acción real S', deben leerse

$$p \equiv mv = m\frac{x_i - x}{t_i - t} \equiv \frac{\partial S'}{\partial x_i} \tag{5.4.15}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{(x_i - x)^2}{(t_i - t)^2} \equiv -\frac{\partial S'}{\partial t_i} \tag{5.4.16}$$

confirmándose que efectivamente satisface la ecuación de Hamilton−Jacobi también en este caso.

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S'}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial S'}{\partial t_i} = 0 \tag{5.4.17}$$

(c) Resolvemos ahora la ecuación de Hamilton−Jacobi para cualquier estado intermedio de la trayectoria de la partícula

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial \overline{x}}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial \overline{t}} = 0 \tag{5.4.18}$$

por separación de variables, esto es, asumiendo en la forma

$$S\left(\overline{x}, \overline{t}\right) = W\left(\overline{x}\right) - E\overline{t} \tag{5.4.19}$$

donde la función característica W de Hamilton satisface la ecuación correspondiente

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{d\overline{x}}\right)^2 = E \tag{5.4.20}$$

con la integral directa

$$W = \sqrt{2mE}\overline{x} + \text{cte} \tag{5.4.21}$$

y por tanto, con la solución general para la función principal

$$S\left(\overline{x}, \overline{t}\right) = \sqrt{2mE}\overline{x} - E\overline{t} + \text{cte} \tag{5.4.22}$$

(d) La ecuación de Hamilton−Jacobi, escrita en función del Hamiltoniano y la función principal

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} \equiv 0 \tag{5.4.23}$$

representa la aplicación de una transformación canónica, dependiente del tiempo, siendo S la función generadora correspondiente, de forma que el nuevo Hamiltoniano es idénticamente nulo,

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} \equiv 0 \tag{5.4.24}$$

Dicha condición lleva a la constancia de los nuevas variables canónicas (tanto coordenadas como momentos) al ser

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \equiv 0 \to Q = \text{cte} \tag{5.4.25}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \equiv 0 \to P = \text{cte} \tag{5.4.26}$$

que se relacionan directamente con las condiciones iniciales del sistema. Entonces, para obtener la ecuación del movimiento, debe invertirse la transformación canónica, resolviendo las variables canónicas actuales, esto es, en el tiempo t, en función de las variables canónicas constantes, Q, P. Para realizar esta inversión, en primer lugar es necesario elegir el tipo de función generadora que

representa S.

Esta elección es totalmente arbitraria, y no influye en el resultado final, ya que un cambio del tipo supone meramente una redefinición de variables canónicas constantes. Dado que la función principal obtenida en el apartado anterior es de la forma

$$S\left(\overline{x},\overline{t}\right)=\sqrt{2mE}\overline{x}-E\overline{t}+\text{cte} \tag{5.4.27}$$

queda claro que S puede elegirse como una función generadora del tipo 2, ya que depende únicamente de la variable canónica actual $\overline{x}$ y del nuevo momento canónico constante, que podemos identificar con la energía, y que además depende explícitamente del tiempo.

Por tanto la energía debe corresponder al nuevo momento canónico, $P\equiv E$, mientras que la nueva variable canónica se identifica con una constante adicional, digamos $Q\equiv\beta$, dada por la fórmula de transformación correspondiente al tipo 2

$$Q\equiv\beta=\frac{\partial S}{\partial E} \tag{5.4.28}$$

con el resultado

$$\beta=\sqrt{\frac{m}{2E}}\overline{x}-\overline{t} \tag{5.4.29}$$

que nos permite encontrar directamente la solución al problema despejando la coordenada $\overline{x}$ de la trayectoria real en función del tiempo, con el resultado

$$\overline{x}=\sqrt{\frac{2E}{m}}\left(\overline{t}+\beta\right)=v\left(\overline{t}+\beta\right) \tag{5.4.30}$$

una vez utilizado el valor de la velocidad v de la partícula.

Podemos comparar esta ley de movimiento con el resultado esperado, si aplicamos las condiciones iniciales, $\overline{x}=x_i$ cuando $\overline{t}=t_i$, para eliminar la constante desconocida. Obtenemos

$$\overline{x}=x_i+v\left(\overline{t}-t_i\right) \tag{5.4.31}$$

y dado que la velocidad queda definida en el intervalo de tiempo entre el instante inicial y final por el cociente

$$v=\frac{x-x_i}{t-t_i} \tag{5.4.32}$$

llegamos de nuevo a la solución de partida del problema

$$\overline{x}=x_i+\left(\frac{x-x_i}{t-t_i}\right)\left(\overline{t}-t_i\right) \tag{5.4.33}$$

(e) Dado que una función del tipo 3 depende del momento, y no de la coordenada, debemos resolver el primer lugar la ecuación de Hamilton−Jacobi para la función principal $S(p,\overline{t})$. Si en general, para un Hamiltoniano $H(\overline{x},p)$, $S(\overline{x},\overline{t})$ es solución de

$$H\left(\overline{x},\frac{\partial S}{\partial\overline{x}}\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \tag{5.4.34}$$

donde $p\equiv\partial S/\partial\overline{x}$, para una función S del tipo 2, cuando S es del tipo 3, es la coordenada x la que queda definida según la derivada $\overline{x}\equiv-\partial S/\partial p$, por tanto la ecuación de Hamilton−Jacobi debe escribirse

$$H\left(-\frac{\partial S}{\partial p}, p\right)+\frac{\partial S}{\partial \overline{t}}=0 \tag{5.4.35}$$

En el caso de la partícula libre, no existe dependencia en $\overline{x}$ del Hamiltoniano, y por tanto la ecuación resultante anterior

$$\frac{p^2}{2m}+\frac{\partial S}{\partial \overline{t}}=0 \tag{5.4.36}$$

admite la integración directa

$$S\left(p,t\right)=-\frac{p^2}{2m}\overline{t}+f(p,Q) \tag{5.4.37}$$

siendo f una función por determinar, de p y posiblemente de constantes del movimiento dependientes de Q. Obtenemos entonces S como una función generadora del tipo 3, ya que depende únicamente del momento canónico actual p y de la nueva variable canónica Q constante, todavía sin identificar, y que además depende explícitamente del tiempo.

Además, el nuevo momento canónico P se identifica con una constante adicional, dada por la fórmula de transformación correspondiente al tipo 3

$$P\equiv-\frac{\partial S}{\partial Q}=-\frac{\partial f}{\partial Q} \tag{5.4.38}$$

mientras que la ley de movimiento se deduce de la definición formal de la coordenada $\overline{x}$ bajo esta transformación

$$\overline{x}=-\frac{\partial S}{\partial p}=\frac{p}{m}\overline{t}-\frac{\partial f}{\partial p} \tag{5.4.39}$$

El problema queda así resuelto cuando aplicamos las condiciones iniciales, $\overline{x}=x_i$ para $\overline{t}=t_i$, identificando las constantes desconocidas. Con el resultado obtenido,

$$x_i=\frac{p}{m}t_i-\frac{\partial f}{\partial p}\rightarrow\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{p}{m}t_i-x_i \tag{5.4.40}$$

expresamos la ley de movimiento en la forma

$$\overline{x}=x_i+\frac{p}{m}\left(\overline{t}-t_i\right) \tag{5.4.41}$$

que coincide con el resultado esperado

$$\overline{x}=x_i+v\left(\overline{t}-t_i\right) \tag{5.4.42}$$

al ser $p=mv$.

Finalmente, podemos obtener la función f en la forma

$$\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{p}{m}t_i-x_i\rightarrow f\left(p,Q\right)=\frac{p^2}{2m}t_i-x_ip \tag{5.4.43}$$

y la expresión completa de la función principal de tipo 3

$$S\left(p,t\right)=-\frac{p^2}{2m}\left(\overline{t}-t_i\right)-x_ip \tag{5.4.44}$$

Revisando esta expresión, podemos completar el análisis del caso identificando la nueva variable canónica $Q\equiv x_i$ con el valor constante de la coordenada en el tiempo inicial, a diferencia de la

energía como sucedía con el tipo 2. Finalmente, en este caso, el nuevo momento canónico P queda identificado con el momento actual

$$P = -\frac{\partial S}{\partial x_i} = p \tag{5.4.45}$$

ambos constantes.

5.4.2. Función principal S para sistema Hamiltoniano unidimensional

Para el sistema unidimensional con el Hamiltoniano

$$H(x,p) = \frac{x^2 p^2}{2m} \tag{5.4.46}$$

siendo m una constante,

(a) Calcule la acción construida a partir del Lagrangiano, para el movimiento del sistema desde su estado inicial (x_i, t_i) a su estado final (x, t), siendo x la coordenada espacial, y t el tiempo.

(b) Demuestre que la acción así construida satisface la ecuación de Hamilton−Jacobi. Verifique que el resultado obtenido es independiente del estado del sistema que se tome en consideración.

(c) Resuelva la ecuación de Hamilton−Jacobi del sistema por el método de separación de variables.

(d) Recordando que S puede identificarse con la función generadora de la transformación canónica que cambia el sistema de su estado actual al estado inicial, y que el Hamiltoniano resultante es idénticamente nulo, determine la solución general del movimiento del sistema a partir de la función principal. Verifique que obtenemos la solución esperada.

(e) Resuelva de nuevo el apartado anterior considerando que S es una función generadora de tipo 3. Para ello, utilice, deduciéndola, la expresión de la ecuación de Hamilton−Jacobi que debe satisfacer este tipo de función principal.

(a) Para poder integrar el Lagrangiano respecto al tiempo, en primer lugar debemos obtener la ley de movimiento del sistema, que será solución de las ecuaciones de Hamilton, definidas por las expresiones

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{x^2 p}{m} \tag{5.4.47}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{p^2 x}{m} \tag{5.4.48}$$

que en función del Hamiltoniano, que es constante del movimiento por no depender explícitamente del tiempo, se escriben

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2H}{m}}\, x \tag{5.4.49}$$

$$\dot{p} = -\sqrt{\frac{2H}{m}}\, p \tag{5.4.50}$$

Integrando la ecuación de movimiento resultante para la coordenada x, obtenemos la solución general

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2H}{m}}\, x \quad \Longrightarrow \quad \overline{x}\left(\overline{t}\right) = C e^{\sqrt{\frac{2H}{m}}\,\overline{t}} \tag{5.4.51}$$

y una vez aplicada la condición inicial del movimiento, obtenemos la trayectoria que une los estados inicial (x_i, t_i) y el punto genérico $(\overline{x}, \overline{t})$

$$\overline{x}\left(\overline{t}\right) = x_i e^{\sqrt{\frac{2H}{m}}\left(\overline{t}-t_i\right)} \tag{5.4.52}$$

Aplicando aquí la condición final del movimiento

$$\overline{x}\left(t\right) = x \tag{5.4.53}$$

obtenemos la expresión del Hamiltoniano en función de las coordenadas y tiempos inicial y final, en la forma

$$x = x_i e^{\sqrt{\frac{2H}{m}}(t-t_i)} \quad \Longrightarrow \quad H = \frac{m}{2}\left(\frac{\ln x - \ln x_i}{t-t_i}\right)^2 \tag{5.4.54}$$

Y con esto, la solución particular para la trayectoria que une los estados inicial (x_i, t_i) y final (x, t) se escribe

$$\overline{x}\left(\overline{t}\right) = x_i e^{\frac{\ln x - \ln x_i}{t-t_i}\left(\overline{t}-t_i\right)} \tag{5.4.55}$$

Por otro lado, una vez definido el momento, el Lagrangiano está dado por

$$L \equiv \dot{x}p - H = \frac{x^2 p}{m}p - \frac{x^2 p^2}{2m} = \frac{x^2 p^2}{2m} \tag{5.4.56}$$

y es constante del movimiento. De aquí que la variable de acción S se integre directamente con el resultado

$$S\left(x, t; x_i, t_i\right) \equiv \int_{t_i}^{t} L d\overline{t} = L\int_{t_i}^{t} d\overline{t} = \left(t-t_i\right)L = \left(t-t_i\right)H = \frac{m}{2\left(t-t_i\right)}\left(\ln x - \ln x_i\right)^2 \tag{5.4.57}$$

(b) En términos de esta variable de acción, expresada en función de coordenadas y tiempos, podemos deducir la expresión del momento y la energía del sistema con las identificaciones

$$p \equiv \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{m\left(\ln x - \ln x_i\right)}{\left(t-t_i\right)}\frac{1}{x} \tag{5.4.58}$$

$$E \equiv -\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{m\left(\ln x - \ln x_i\right)^2}{2\left(t-t_i\right)^2} \tag{5.4.59}$$

Con esto, considerando las fórmulas obtenidas, de la definición del Hamiltoniano del sistema

$$H = E = \frac{x^2 p^2}{2m} \tag{5.4.60}$$

deducimos la ecuación de Hamilton-Jacobi para la variable S,

$$\frac{1}{2m}x^2\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{5.4.61}$$

que será entonces función principal de Hamilton para este sistema.

• Ya que hemos utilizado exclusivamente los valores (x, t) al realizar esta derivación, y estos valores corresponden al estado final del sistema, podría pensarse que la ecuación obtenida sólo es válida para el estado final, y no para todo tiempo. Sin embargo, dado que el estado final es totalmente

arbitrario puede tomarse en consideración como estado final igualmente válido cualquier estado intermedio, de forma que se satisface también

$$\frac{1}{2m}\overline{x}^2\left(\frac{\partial S}{\partial \overline{x}}\right)^2+\frac{\partial S}{\partial \overline{t}}=0 \tag{5.4.62}$$

en cualquier estado de la trayectoria.

• Como ultima comprobación, fijémonos ahora en el estado inicial (x_i,t_i), respecto al cual, derivando simplemente como en el caso anterior llegaríamos a

$$p_i\equiv\frac{\partial S}{\partial x_i}=-\frac{m\left(\ln x-\ln x_i\right)}{(t-t_i)}\frac{1}{x_i} \tag{5.4.63}$$

$$E\equiv-\frac{\partial S}{\partial t_i}=-\frac{m\left(\ln x-\ln x_i\right)^2}{2\left(t-t_i\right)^2} \tag{5.4.64}$$

por lo que debería concluirse que para el estado inicial no se satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi. El error está en pretender calcular una ecuación de evolución del sistema que lleve la trayectoria del sistema hacia el estado inicial. Esto sólo puede realizarse cuando el incremento del tiempo es negativo, es decir, para $t-t_i<0$. De esta forma, es requisito indispensable tomar $t<t_i$, de forma que al intercambiar entre sí estado final e inicial, la variable de acción real sería

$$S^{'}\equiv S\left(x_i,t_i;x,t\right)=-S\left(x,t;x_i,t_i\right) \tag{5.4.65}$$

y las fórmulas anteriores, escritas respecto a la variable de acción real $S^{'}$, deben leerse

$$p\equiv\frac{\partial S^{'}}{\partial x_i}=\frac{m\left(\ln x-\ln x_i\right)}{(t-t_i)}\frac{1}{x_i} \tag{5.4.66}$$

$$E=-\frac{\partial S^{'}}{\partial t_i}=\frac{m\left(\ln x-\ln x_i\right)^2}{2\left(t-t_i\right)^2} \tag{5.4.67}$$

confirmándose que efectivamente satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi también en este caso:

$$\frac{1}{2m}x_i^2\left(\frac{\partial S'}{\partial x_i}\right)^2+\frac{\partial S'}{\partial t_i}=0 \tag{5.4.68}$$

(c) Antes de deducir la ecuación de movimiento a partir de la variable de acción, resolvemos la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{2m}\overline{x}^2\left(\frac{\partial S}{\partial \overline{x}}\right)^2+\frac{\partial S}{\partial \overline{t}}=0 \tag{5.4.69}$$

por separación de variables, esto es, considerando la solución separable

$$S\left(\overline{x},\overline{t}\right)=W\left(\overline{x}\right)-E\overline{t} \tag{5.4.70}$$

donde la función característica W de Hamilton satisface a la vez

$$\frac{1}{2m}\overline{x}^2\left(\frac{dW}{d\overline{x}}\right)^2=E \tag{5.4.71}$$

ecuación diferencial que tiene la integral directa

$$W=\sqrt{2mE}\ln\overline{x}+\text{cte} \tag{5.4.72}$$

y por tanto, obtenemos la solución general para la función principal

$$S\left(\overline{x},\overline{t}\right)=\sqrt{2mE}\ln\overline{x}-E\overline{t}+\text{cte} \tag{5.4.73}$$

(d) La ecuación de Hamilton-Jacobi, escrita en función del Hamiltoniano y la función principal

$$H+\frac{\partial S}{\partial t}\equiv 0 \tag{5.4.74}$$

representa la aplicación de una transformación canónica, dependiente del tiempo, siendo S la función generadora correspondiente, de forma que el nuevo Hamiltoniano es idénticamente nulo,

$$K=H+\frac{\partial F}{\partial t}=H+\frac{\partial S}{\partial t}\equiv 0 \tag{5.4.75}$$

Y dicha condición lleva a la constancia de los nuevas variables canónicas al ser

$$\dot{Q}=\frac{\partial K}{\partial P}\equiv 0 \quad\Longrightarrow\quad Q=\text{cte} \tag{5.4.76}$$

$$\dot{P}=-\frac{\partial K}{\partial Q}\equiv 0 \quad\Longrightarrow\quad P=\text{cte} \tag{5.4.77}$$

que se relacionan directamente con las condiciones iniciales del sistema. Para obtener la ecuación del movimiento debe invertirse la transformación canónica, resolviendo las variables canónicas actuales, esto es, en el tiempo t, en función de las variables canónicas constantes, Q,P. Para realizar esta inversión, en primer lugar es necesario elegir el tipo de función generadora que representa S.

• Esta elección es totalmente arbitraria, y no influye en el resultado final, ya que un cambio del tipo supone meramente una redefinición de las variables canónicas constantes. Dado que la función principal obtenida en el apartado anterior es

$$S\left(\overline{x},\overline{t}\right)=\sqrt{2mE}\ln\overline{x}-E\overline{t}+\text{cte} \tag{5.4.78}$$

queda claro que S puede elegirse como una función generadora del tipo 2, ya que depende únicamente de la variable canónica actual $\overline{x}$ y del nuevo momento canónico constante, que podemos identificar con la energía, y explícitamente del tiempo. Por ello la energía debe corresponder al nuevo momento canónico, $P\equiv E$, mientras que la nueva variable canónica se identifica con una constante adicional, digamos $Q\equiv\beta$, dada por la fórmula de transformación correspondiente al tipo 2

$$Q\equiv\beta=\frac{\partial S}{\partial E} \tag{5.4.79}$$

con el resultado

$$\beta=\sqrt{\frac{m}{2E}}\ln\overline{x}-\overline{t} \tag{5.4.80}$$

que nos permite encontrar directamente la solución al problema despejando la coordenada actual en función del tiempo:

$$\overline{x}=e^{\sqrt{\frac{2E}{m}}\left(\overline{t}+\beta\right)} \tag{5.4.81}$$

Este resultado debe coincidir con la solución general, con la identificación

$$\overline{x}\left(\overline{t}\right)=e^{\sqrt{\frac{2E}{m}}\left(\overline{t}+\beta\right)}=Ce^{\sqrt{\frac{2H}{m}}\overline{t}} \quad\Longrightarrow\quad C\equiv e^{\sqrt{\frac{2E}{m}}\beta} \tag{5.4.82}$$

Para comparar esta ley de movimiento con el resultado esperado, aplicamos las condiciones iniciales, $\overline{x}=x_i$ cuando $\overline{t}=t_i$, para eliminar la constante β desconocida. Obtenemos

$$x_i=e^{\sqrt{\frac{2E}{m}}\left(t_i+\beta\right)} \tag{5.4.83}$$

y con ello,

$$\overline{x}\left(\overline{t}\right) = e^{\sqrt{\frac{2E}{m}}\left(\overline{t}-t_i+\beta+t_i\right)} = x_i e^{\sqrt{\frac{2E}{m}}\left(\overline{t}-t_i\right)} \tag{5.4.84}$$

llegando de nuevo a

$$\overline{x}\left(\overline{t}\right) = x_i e^{\frac{\ln x-\ln x_i}{t-t_i}\left(\overline{t}-t_i\right)} \tag{5.4.85}$$

siendo el valor de la energía

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{\ln x - \ln x_i}{t-t_i}\right)^2 \tag{5.4.86}$$

(e) Dado que una función generadora del tipo 3 depende del momento, y no de la coordenada, debemos resolver en primer lugar la ecuación de Hamilton-Jacobi para la función principal $S(p,\overline{t})$. Si en general, para un Hamiltoniano $H(\overline{x},p)$, la función principal $S(\overline{x},\overline{t})$ es solución de

$$H\left(\overline{x},\frac{\partial S}{\partial \overline{x}}\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \tag{5.4.87}$$

donde $p \equiv \partial S/\partial\overline{x}$ para una función S del tipo 2, cuando S es del tipo 3, en su lugar es la coordenada x la que queda definida según la derivada, $\overline{x} \equiv -\partial S/\partial p$. Siendo así, la ecuación de Hamilton-Jacobi debe escribirse

$$H\left(-\frac{\partial S}{\partial p},p\right)+\frac{\partial S}{\partial \overline{t}}=0 \tag{5.4.88}$$

y resulta ser en nuestro caso

$$\frac{p^2}{2m}\left(-\frac{\partial S}{\partial p}\right)^2+\frac{\partial S}{\partial \overline{t}}=0 \tag{5.4.89}$$

Aplicando entonces la separación de variables, definimos la solución separable

$$S\left(\overline{p},\overline{t}\right) = Z\left(\overline{p}\right) - E\overline{t} \tag{5.4.90}$$

que da lugar a la ecuación diferencial ordinaria para la función Z, dependiente de $\overline{p}$

$$\frac{1}{2m}\overline{p}^2\left(\frac{dZ}{d\overline{p}}\right)^2 = E \tag{5.4.91}$$

con la integral directa

$$Z = -\sqrt{2mE}\ln\overline{p} + \text{cte} \tag{5.4.92}$$

y por tanto, con la solución general para la función principal[1]

$$S\left(\overline{p},\overline{t}\right) = -\sqrt{2mE}\ln\overline{p} - E\overline{t} + \text{cte} \tag{5.4.97}$$

[1] Una cuestión clave aquí es la necesidad de elección del signo negativo en la resolución de

$$\frac{1}{2m}\overline{p}^2\left(\frac{dZ}{d\overline{p}}\right)^2 = E \quad\Longrightarrow\quad \frac{dZ}{d\overline{p}} = -\frac{\sqrt{2mE}}{\overline{p}} \tag{5.4.93}$$

dado que

$$\overline{x} \equiv -\frac{\partial S}{\partial \overline{p}} = -\frac{dZ}{d\overline{p}} = \frac{\sqrt{2mE}}{\overline{p}} \tag{5.4.94}$$

mientras que en la resolución de

$$\frac{1}{2m}\overline{x}^2\left(\frac{dW}{d\overline{x}}\right)^2 = E \quad\Longrightarrow\quad \frac{dW}{d\overline{x}} = \frac{\sqrt{2mE}}{\overline{x}} \tag{5.4.95}$$

se consideró el signo positivo, dado que

$$\overline{p} \equiv \frac{\partial S}{\partial \overline{x}} = \frac{dW}{d\overline{x}} = \frac{\sqrt{2mE}}{\overline{x}} \tag{5.4.96}$$

siendo en este caso $Q \equiv E$ la nueva coordenada canónica, constante.

• Hemos obtenido por tanto S como una función generadora del tipo 3, ya que depende únicamente del momento canónico actual p y de la nueva variable canónica Q constante, y que además depende explícitamente del tiempo.
Y e nuevo momento canónico P se identifica con una constante adicional, digamos α, dada por la fórmula de transformación correspondiente al tipo 3

$$P = -\frac{\partial S}{\partial Q} = -\frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}}\ln \overline{p} + \overline{t} \equiv \alpha \tag{5.4.98}$$

mientras que la ley de movimiento para $\overline{x}$ se deduce de la definición formal de la coordenada $\overline{x}$ bajo esta transformación

$$\overline{x} = -\frac{\partial S}{\partial p} = \frac{\sqrt{2mE}}{p} \tag{5.4.99}$$

El problema queda así resuelto para la función generadora de tipo 3 cuando aplicamos las condiciones iniciales, $\overline{x} = x_i$ para $\overline{t} = t_i$, identificando las dos constantes desconocidas. Con el resultado obtenido, expresamos la ley de movimiento en la forma

$$\begin{aligned} \overline{p} &= e^{-\sqrt{\frac{2E}{m}}(\overline{t}-\alpha)} \\ \overline{x} &= \frac{\sqrt{2mE}}{p} = \sqrt{2mE}e^{\sqrt{\frac{2E}{m}}(\overline{t}-\alpha)} \end{aligned} \tag{5.4.100}$$

que coincide con el resultado esperado, con la identificación

$$\overline{x}\left(\overline{t}\right) = \sqrt{2mE}e^{\sqrt{\frac{2E}{m}}(\overline{t}-\alpha)} = Ce^{\sqrt{\frac{2H}{m}}\overline{t}} \quad \Longrightarrow \quad C \equiv \sqrt{2mE}e^{-\sqrt{\frac{2E}{m}}\alpha} \tag{5.4.101}$$

en cuyo caso, obtenemos efectivamente

$$x_i = \sqrt{2mE}e^{\sqrt{\frac{2E}{m}}(t_i-\alpha)} \tag{5.4.102}$$

y por tanto,

$$\overline{x}\left(\overline{t}\right) = \sqrt{2mE}e^{\sqrt{\frac{2E}{m}}(\overline{t}-t_i+t_i-\alpha)} = x_i e^{\sqrt{\frac{2E}{m}}(\overline{t}-t_i)} \tag{5.4.103}$$

5.4.3. Función principal S para partícula en campo gravitatorio

Para una partícula de masa m que se mueve verticalmente, según el eje z, sometida al campo gravitatorio cerca de la superficie terrestre,

(a) Determine la trayectoria de la partícula entre los puntos inicial (z_0, t_0) y final (z, t). Obtenga la función principal de Hamilton de la forma $S(z, t; z_0, t_0)$ integrando el Lagrangiano en el tiempo a lo largo del movimiento.

(b) Demuestre que la función obtenida $S(z, t; z_0, t_0)$ es la función generadora de tipo 1, para la transformación canónica de las variables canónicas (z, p) a las variables canónicas (z_0, p_0).

(a) Partimos del Lagrangiano del sistema, dado por

$$L\left(z, \dot{z}\right) = T - V = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz \tag{5.4.104}$$

y de la ecuación del movimiento $\ddot{z} = -g$, cuya solución es la trayectoria real entre los estados inicial (z_0, t_0) y final (z, t)

$$z(\bar{t}) = z_0 + \dot{z}_0\left(\bar{t} - t_0\right) - \frac{1}{2}g\left(\bar{t} - t_0\right)^2 \tag{5.4.105}$$

con el perfil de velocidad

$$\dot{z}(\bar{t}) = \dot{z}_0 - g\left(\bar{t} - t_0\right) \tag{5.4.106}$$

y donde la velocidad inicial está dada por

$$\dot{z}_0 = \frac{z - z_0}{t - t_0} + \frac{1}{2}g\left(t - t_0\right) \tag{5.4.107}$$

Integrando este Lagrangiano en el tiempo, encontramos la acción en la forma

$$\begin{aligned} S\left(z, t; z_0, t_0\right) &\equiv \frac{1}{2}m\int_{t_0}^{t}\dot{z}^2 d\bar{t} - mg\int_{t_0}^{t} z d\bar{t} \\ &= \left(\frac{1}{2}m\dot{z}_0^2 - mgz_0\right)\left(t - t_0\right) + mg\left(\frac{1}{3}g\left(t - t_0\right) - \dot{z}_0\right)\left(t - t_0\right)^2 \\ &= \frac{m}{2}\frac{\left(z - z_0\right)^2}{t - t_0} - mg\frac{z + z_0}{2}\left(t - t_0\right) - \frac{1}{24}mg^2\left(t - t_0\right)^3 \end{aligned} \tag{5.4.108}$$

(b) Comprobamos en primer lugar que la función principal depende, además del tiempo, únicamente de las variables independientes correspondientes al tipo 1, que son las coordenadas inicial y final, (z_0, z). Basta demostrar entonces que se satisfacen las definiciones, asociadas a este tipo, para los momentos canónicos en función de las coordenadas (z_0, z). Efectivamente obtenemos las relaciones esperadas

$$\frac{\partial S}{\partial z} = m\frac{z - z_0}{t - t_0} - \frac{mg}{2}\left(t - t_0\right) = m\left(\dot{z}_0 - g\left(t - t_0\right)\right) = m\dot{z} \equiv p \tag{5.4.109}$$

$$\frac{\partial S}{\partial z_0} = -m\frac{z - z_0}{t - t_0} - \frac{mg}{2}\left(t - t_0\right) = -m\dot{z}_0 \equiv -p_0 \tag{5.4.110}$$

5.4.4. Ecuación de Hamilton−Jacobi para partícula en campo gravitatorio

Para una partícula de masa m que se mueve verticalmente en un campo gravitacional cerca de la superficie terrestre,

(a) Resuelva la ecuación de Hamilton−Jacobi por el método de separación de variables.

(b) Utilice este resultado del apartado anterior para determinar la solución general del movimiento para $(z(t), p(t))$. Interprete físicamente el significado de las constantes involucradas.

(a) Partiendo del Hamiltoniano del sistema

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgz \tag{5.4.111}$$

obtenemos la ecuación de Hamilton−Jacobi para la función principal

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + mgz + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{5.4.112}$$

y asumiendo la forma funcional $S\left(z, t, E\right) = W\left(z\right) - Et$, obtenemos la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 + mgz = E \tag{5.4.113}$$

Su solución se reduce a una cuadratura simple en la forma

$$W = \sqrt{2m}\int \sqrt{E - mgz}dz = -\frac{2}{3mg}\sqrt{2m}\left(E - mgz\right)^{3/2} \tag{5.4.114}$$

y por tanto, la función principal está dada por

$$S\left(z,t;E\right) \equiv W\left(z\right) - Et = -\frac{2}{3mg}\sqrt{2m}\left(E - mgz\right)^{3/2} - Et \tag{5.4.115}$$

(b) La segunda constante de movimiento, correspondiente a la nueva coordenada Q, siendo su momento conjugado $P = E$, se obtiene a partir de la función generadora S, de tipo 2, en la forma

$$Q = \beta = \frac{\partial S}{\partial E} = -\frac{\sqrt{2m}}{mg}\left(E - mgz\right)^{1/2} - t \tag{5.4.116}$$

de donde despejamos $z(t)$ en la forma

$$z(t) = \frac{E}{mg} - \frac{1}{2}g\left(t + \beta\right)^2 \tag{5.4.117}$$

De esta solución general podemos deducir que la constante $-\beta$ es el tiempo que tarda la partícula en llegar a su altura máxima, dada por $h = E/mg$. Finalmente, el momento canónico p puede obtener directamente a partir de la función generadora, según la definición del momento asociada al tipo 2

$$p \equiv \frac{\partial S}{\partial z} = \sqrt{2m}\left(E - mgz\right)^{1/2} \tag{5.4.118}$$

y por tanto, resulta una función del tiempo en la forma

$$p\left(t\right) = \sqrt{2m}\left(E - mgz\left(t\right)\right)^{\frac{1}{2}} = -mg\left(t + \beta\right) \tag{5.4.119}$$

5.4.5. Expresión de la energía en función de las coordenadas y el tiempo

A partir de la función principal $S(z,t;E)$, obtenida en el ejercicio 5.4.4, para una partícula de masa m que se mueve verticalmente en un campo gravitacional cerca de la superficie terrestre,

(a) Demuestre que cuando la función principal depende de las variables inicial y final del movimiento, esto es, para la función principal $\widetilde{S}(z,t;z_0,t_0)$, es posible establecer la siguiente relación funcional con la función $S(z,t;E)$, que depende exclusivamente de las variables finales y de la energía:

$$\widetilde{S}(z,t;z_0,t_0) \equiv S(z,t;E) - S(z_0,t_0;E) \tag{5.4.120}$$

Interprete físicamente.

(b) Dado que en su definición anterior de $S(z,t;z_0,t_0)$ aparece explícitamente (en el lado derecho) un valor de E, determine qué ecuación adicional debe añadirse para que dicha dependencia sea nula idénticamente. Resuelva entonces esta ecuación adicional y obtenga el valor de la energía E en función $(z,t;z_0,t_0)$.

(c) Utilizando el valor obtenido para la energía obtenga la expresión explícita de la función principal del tipo 1, $\widetilde{S}(z,t;z_0,t_0)$. Verifique que se obtiene de nuevo la solución descrita en el ejercicio 5.4.3.

(a) Según el resultado del ejercicio 5.4.4, podemos construir las dos funciones conocidas $S(z,t;E)$ y $S(E;z_0,t_0) \equiv -S(z_0,t_0;E)$, cada una de ellas solución de la ecuación de Hamilton−Jacobi

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial \overline{z}}\right)^2 + mg\overline{z} + \frac{\partial S}{\partial \overline{t}} = 0 \tag{5.4.121}$$

para el conjunto de variables correspondientes $\overline{z} = z_0, \overline{t} = t_0$ y $\overline{z} = z, \overline{t} = t$. La primera de ellas determina la evolución del sistema hacia las nuevas variables canónicas constantes (β, E).

Para entender el significado de la segunda acción $S(E;z_0,t_0)$, debemos recordar el análisis realizado en el ejercicio 5.4.1: Para la evolución del sistema que le lleve hacia el estado inicial, es decir, cuando $t < t_0$, la acción real satisface la ecuación de Hamilton−Jacobi al definirse en la forma

$$S' \equiv S(E;z_0,t_0) = -S(z_0,t_0;E) \tag{5.4.122}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que la transformación canónica que lleva del estado final (z,t) al estado inicial (z_0,t_0), puede realizarse en dos etapas siendo (β,E) el estado intermedio, y por tanto, la acción conjunta se puede definir en la forma

$$\widetilde{S}(z,t;z_0,t_0) \equiv S(z,t;E) + S(E;z_0,t_0) \tag{5.4.123}$$

y así, por la propiedad anterior, llegamos finalmente a la relación pedida

$$\widetilde{S}(z,t;z_0,t_0) = S(z,t;E) - S(z_0,t_0;E) \tag{5.4.124}$$

En el lado derecho figuran dos funciones generadoras de tipo 2, y a partir de ellas se construye la función generadora del tipo 1, $\widetilde{S}(z,t;z_0,t_0)$, y que también debe satisfacer la ecuación de Hamilton−Jacobi correspondiente

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \overline{z}}\right)^2 + mg\overline{z} + \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \overline{t}} = 0 \tag{5.4.125}$$

para cada conjunto de variables $\overline{z} = z_0, \overline{t} = t_0$ y $\overline{z} = z, \overline{t} = t$, dado que por ser separable en ambos conjuntos de coordenadas inicial y final (z_0, t_0) y (z, t), $\widetilde{S}$ satisface la ecuación de Hamilton−Jacobi si lo hacen simultáneamente cada una de ellas.

(b) Dado que en el lado derecho de su definición figura explícitamente la constante del movimiento E, debe exigirse que dicha dependencia se anule idénticamente. Para ello, el valor que debemos asignar a la energía en función de las variables $z, t; z_0, t_0$ queda dado por la ecuación adicional

$$\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial E} = 0 \tag{5.4.126}$$

Introduciendo las funciones dadas, obtenemos la nueva acción en la forma

$$\widetilde{S}\left(z, t; z_0, t_0\right) = \frac{2\sqrt{2m}}{3mg}\left[\left(E - mgz_0\right)^{\frac{3}{2}} - \left(E - mgz\right)^{\frac{3}{2}}\right] - E\left(t - t_0\right) \tag{5.4.127}$$

junto con

$$\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial E} = 0 \rightarrow \left(E - mgz_0\right)^{\frac{1}{2}} - \left(E - mgz\right)^{\frac{1}{2}} = g\frac{t - t_0}{\sqrt{2/m}} \tag{5.4.128}$$

Sólo nos queda despejar el valor de la energía en esta última ecuación. Para ello introducimos la velocidad de la partícula en la forma usual

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 \rightarrow v^2 - v_0^2 = -2g\left(z - z_0\right) \tag{5.4.129}$$

y de esta forma la ecuación adicional se lee

$$\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial E} = 0 \rightarrow v = v_0 - g\left(t - t_0\right) \tag{5.4.130}$$

con la solución

$$v = \frac{z - z_0}{t - t_0} - \frac{1}{2}g\left(t - t_0\right) \tag{5.4.131}$$

al ser

$$v_0 = \frac{z - z_0}{t - t_0} + \frac{1}{2}g\left(t - t_0\right) \tag{5.4.132}$$

De aquí, por extensión, obtenemos el valor de la energía en función de las coordenadas y el tiempo, en la forma

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}m\left(\frac{z - z_0}{t - t_0}\right)^2 + \frac{1}{8}mg^2\left(t - t_0\right)^2 + \frac{1}{2}mg\left(z + z_0\right) \tag{5.4.133}$$

(c) Una vez eliminada la dependencia en la energía, podemos escribir la acción en la representación de tipo 1 en la forma

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}\left(z, t; z_0, t_0\right) &= \frac{m}{3g}\left[v_0^3 - v^3\right] - E\left(t - t_0\right) \\
&= \frac{m}{3}\left[2v\left(z - z_0\right) + v_0^2\left(t - t_0\right)\right] - E\left(t - t_0\right) \\
&= \frac{1}{2}m\frac{\left(z - z_0\right)^2}{t - t_0} - \frac{1}{24}mg^2\left(t - t_0\right)^3 - \frac{1}{2}mg\left(z + z_0\right)\left(t - t_0\right)
\end{aligned} \tag{5.4.134}$$

que coincide con la solución obtenida en el ejercicio 5.4.3.

5.4.6. Función principal para oscilador armónico simple

Para un oscilador armónico simple de frecuencia ω y masa m,

(a) Obtenga la función principal de Hamilton $S(x,t;x_0,t_0)$, integrando el Lagrangiano del movimiento a lo largo de la trayectoria real entre los puntos inicial (x_0,t_0) y final (x,t). Deduzca primero la ley de movimiento y de ahí establezca la expresión del Lagrangiano en función del tiempo.

(b) Demuestre que la acción $S(x,t;x_0,t_0)$ es una función generadora de tipo 1 para la transformación canónica de las variables canónicas (x,p) a las variables canónicas (x_0,p_0).

(a) Partimos del Lagrangiano del sistema, dado por

$$L\left(x,\dot{x}\right)=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{5.4.135}$$

y de la ecuación del movimiento $\ddot{x}=-\omega^2x$, cuya solución para el estado $\left(\overline{x},\overline{t}\right)$ es la trayectoria real del oscilador entre el estado inicial (x_0,t_0) y el estado final (x,t):

$$\overline{x}\left(\overline{t}\right)=x_0\cos\omega\left(\overline{t}-t_0\right)+\frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}\omega\left(\overline{t}-t_0\right) \tag{5.4.136}$$

con velocidad

$$\dot{\overline{x}}\left(\overline{t}\right)=-\omega x_0\operatorname{sen}\omega\left(\overline{t}-t_0\right)+v_0\cos\omega\left(\overline{t}-t_0\right) \tag{5.4.137}$$

Para conocer la velocidad inicial en función de las coordenadas y el tiempo, aplicamos la condición del estado final $\overline{x}\left(t\right)=x$, con el resultado

$$v_0=\omega\frac{x-x_0\cos\omega\left(t-t_0\right)}{\operatorname{sen}\omega\left(t-t_0\right)} \tag{5.4.138}$$

Una vez obtenida la ley del movimiento para $\overline{x}\left(\overline{t}\right),\dot{\overline{x}}\left(\overline{t}\right)$, introducimos su valor en el Lagrangiano, para obtener una función dependiente exclusivamente del tiempo

$$L(\overline{t})=\frac{1}{2}m\left(v_0^2-\omega^2x_0^2\right)\cos\left(2\omega\left(\overline{t}-t_0\right)\right)-m\omega x_0v_0\operatorname{sen}\left(2\omega\left(\overline{t}-t_0\right)\right) \tag{5.4.139}$$

Integrando en el tiempo, obtenemos la acción en la forma

$$\begin{aligned}S\left(x,t;x_0,t_0\right)&=\int_{t_0}^{t}L(\overline{t})d\overline{t}\\&=\frac{m\omega\operatorname{sen}\left(\omega\left(t-t_0\right)\right)}{2}\left[\left(\frac{v_0^2}{\omega^2}-x_0^2\right)\cos\omega\left(t-t_0\right)-2x_0\frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}\omega\left(t-t_0\right)\right]\end{aligned} \tag{5.4.140}$$

que queda expresada aquí en función de las coordenadas y el tiempo, y la velocidad v_0. Substituyendo el valor de la velocidad inicial, la función principal de Hamilton para el oscilador armónico unidimensional tiene la expresión final

$$S\left(x,t;x_0,t_0\right)=\frac{m\omega}{2\operatorname{sen}\omega\left(t-t_0\right)}\left[\left(x^2+x_0^2\right)\cos\omega\left(t-t_0\right)-2xx_0\right] \tag{5.4.141}$$

(b) Para demostrar que la acción obtenida anteriormente es una función generadora de tipo 1, comprobamos que efectivamente se satisfacen las definiciones correspondientes para los momentos canónicos en función de S

$$\frac{\partial S}{\partial x}=m\dot{x}\equiv p \tag{5.4.142}$$

para el estado final, al ser

$$x\cos\omega\,(t-t_0)-x_0=\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega\,(t-t_0)\,\dot{x} \tag{5.4.143}$$

y también para el estado inicial

$$\frac{\partial S}{\partial x_0}=\frac{m\omega\,(x_0\cos\omega\,(t-t_0)-x)}{\operatorname{sen}\omega\,(t-t_0)}=-mv_0\equiv-p_0 \tag{5.4.144}$$

5.4.7. Ecuación de Hamilton−Jacobi para oscilador isótropo tridimensional

Para un oscilador isótropo tridimensional con el potencial

$$V=\frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{r}^2 \tag{5.4.145}$$

en coordenadas esféricas,

(a) Determine su Hamiltoniano, y plantee la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica W.

(b) Determine las ecuaciones generales de movimiento, sin resolverlas. Deberá utilizar el método de separación de variables para obtener la solución general de la ecuación de Hamilton−Jacobi. Identifique el significado de las constantes de integración.

(c) Resuelva las ecuaciones generales de movimiento por cuadratura. Determine la función principal de Hamilton, y la expresión de las nuevas coordenadas canónicas que serán constantes del movimiento.

(d) Compruebe, a partir de las ecuaciones del movimiento, que el movimiento se realiza en un plano, el plano de la órbita, que pasa por el origen, y es perpendicular a un vector constante $\boldsymbol{n}$. Para ello, analice cuál es la ecuación de la trayectoria $\theta(\varphi)$ para las coordenadas angulares y deduzca geométricamente dicha característica espacial del movimiento. Deberá tener en cuenta la expresión de las componentes del radio vector $\boldsymbol{r}$ en función de las coordenadas angulares

$$\boldsymbol{r}=r\,(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\cos\theta) \tag{5.4.146}$$

Interprete físicamente el resultado.

(e) Verifique finalmente que las constantes definidas (L,L_z) realmente corresponden a las cantidades físicas que representan. Para ello analice los momentos canónicos conjugados de las coordenadas angulares.

(a) En coordenadas esféricas, la velocidad de la partícula está dada por la derivada respecto al tiempo del radio vector, $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$, con lo que la energía cinética se escribe

$$T=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 \tag{5.4.147}$$

El vector momento conjugado está dado por

$$\boldsymbol{p}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}=m\dot{\boldsymbol{r}} \tag{5.4.148}$$

y el Hamiltoniano se escribe

$$H\,(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})=T+V=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{r}^2 \tag{5.4.149}$$

Por definición, siendo W la función generadora de tipo 2 de la transformación canónica, el momento canónico es el gradiente de W y en coordenadas esféricas tiene la expresión

$$\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{\nabla} W = \left(\frac{\partial W}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \tag{5.4.150}$$

Con esto, la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica W

$$H\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\nabla} W\right) = E \tag{5.4.151}$$

tiene la expresión desarrollada

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right] + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 = E \tag{5.4.152}$$

(b) Para hallar la solución general, por la estructura de dicha ecuación podemos probar la combinación totalmente separable

$$W\left(r, \theta, \varphi\right) = R\left(r\right) + \Theta\left(\theta\right) + \Phi(\varphi) \tag{5.4.153}$$

de forma que las derivadas parciales se reducen a derivadas ordinarias, y en primer paso la ecuación de Hamilton−Jacobi da lugar a

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \left(2mE - \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 - m^2\omega^2 r^2\right) - \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)^2 \tag{5.4.154}$$

Observamos que el lado izquierdo depende sólo de la coordenada φ, mientras que el lado derecho no depende de φ. Esto sólo será cierto su cada lado es igual a una misma constante, digamos α_φ, que asumimos independiente de E. Como comprobaremos más adelante, α_φ resulta ser el cuadrado de la componente z del momento angular del movimiento, $\alpha_\varphi \equiv L_z^2$.

Por tanto, la solución general se define ahora como la solución de las dos ecuaciones

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 = L_z^2 \tag{5.4.155}$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{L_z^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} = r^2 \left(2mE - \left(\frac{dR}{dR}\right)^2 - m^2\omega^2 r^2\right) \tag{5.4.156}$$

Observamos ahora que, en la última ecuación, el lado izquierdo depende sólo de la coordenada θ, mientras que el lado derecho depende sólo de la coordenada r. Necesariamente entonces cada lado debe ser igual a una misma constante, digamos α_θ, independiente de E y L_z^2. Como comprobaremos más adelante, α_θ resulta ser el módulo al cuadrado del momento angular del movimiento, $\alpha_\theta \equiv L^2$.

Por tanto, la solución general se define ahora como la solución de las tres ecuaciones

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 = L_z^2 \tag{5.4.157}$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{L_z^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} = L^2 \tag{5.4.158}$$

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + m^2\omega^2 r^2 + \frac{L^2}{r^2} = 2mE \tag{5.4.159}$$

Y queda determinada en función del conjunto de constantes, (E, L, L_z), que definen las nuevas variables canónicas una vez aplicada la transformación canónica generada por la función principal de Hamilton $S\,(r, \theta, \varphi, t; E, L, L_z)$, función generadora de tipo 2.

(c) La solución a las tres ecuaciones anteriores del movimiento se obtiene directamente por cuadraturas (véase el significado general de cuadratura en el apéndice 3.10.2) en la forma

$$R(r) = \int \sqrt{2mE - m^2\omega^2 r^2 - \frac{L^2}{r^2}}\, dr \tag{5.4.160}$$

$$\Theta(\theta) = \int \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}\, d\theta \tag{5.4.161}$$

$$\Phi\,(\varphi) = L_z \varphi \tag{5.4.162}$$

Además, una vez resuelta la función característica W en términos de estas funciones R, Θ, Φ, la función principal de Hamilton para este problema, definida por

$$S\,(r, \theta, \varphi, t; E, L, L_z) \equiv W\,(r, \theta, \varphi; E, L, L_z) - Et \tag{5.4.163}$$

es una función generadora de tipo 2 para la transformación a las nuevas coordenadas canónicas constantes, digamos $(\beta_r, \beta_\theta, \beta_\varphi)$, y a los nuevos momentos canónicos, (E, L, L_z), también constantes.
Tenemos por tanto, aplicando la transformación canónica con función generadora de tipo 2, por definición, las constantes

$$\beta_r \equiv \frac{\partial S}{\partial E} = m \int \frac{1}{\sqrt{2mE - m^2\omega^2 r^2 - L^2/r^2}}\, dx - t \tag{5.4.164}$$

$$\beta_\theta \equiv \frac{\partial S}{\partial L} = -L \int \frac{dR/r^2}{\sqrt{2mE - m^2\omega^2 r^2 - L^2/r^2}} + L \int \frac{1}{\sqrt{L^2 - L_z^2/\operatorname{sen}^2\theta}}\, d\theta \tag{5.4.165}$$

$$\beta_\varphi \equiv \frac{\partial S}{\partial L_z} = -\int \frac{L_z/\operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{L^2 - L_z^2/\operatorname{sen}^2\theta}}\, d\theta + \varphi \tag{5.4.166}$$

Estas tres relaciones, con una de ellas dependiente del tiempo, expresadas en forma de cuadratura, determinan la solución general a las tres ecuaciones del movimiento del sistema.

(d) Ya que en la tercera cuadratura anterior, cuya integración da lugar a la función $\theta(\varphi)$, no figura el tiempo, únicamente debemos revisar esta última ecuación para obtener una característica puramente geométrica de la trayectoria de la partícula. En particular, vemos que tiene una integración directa (con el cambio de variable de integración, $u = L_z \cot\theta$, para $d\theta > 0$) y como indicamos da como resultado la componente de la trayectoria $\theta(\varphi)$, en la forma funcional

$$\int \frac{du}{\sqrt{L^2 - L_z^2 - u^2}} = \varphi - \beta_\varphi \to \cot\theta = \frac{\sqrt{L^2 - L_z^2}}{L_z} \operatorname{sen}\,(\varphi - \beta_\varphi) \tag{5.4.167}$$

Introduciendo ahora el ángulo γ que forma el vector momento angular $\boldsymbol{L}$ con el eje z, que satisface

$$L_z \equiv \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{u}_z = L\cos\gamma \to \tan\gamma = \frac{\sqrt{L^2 - L_z^2}}{L_z} \tag{5.4.168}$$

vemos que esta componente de la trayectoria de la partícula satisface

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma} \cdot \operatorname{sen}\,(\varphi - \beta_\varphi) \tag{5.4.169}$$

Esta es la ecuación que debe relacionarse con el movimiento *permanente* en el plano de la órbita.

Para ver su significado geométrico, expandimos la ecuación en la forma

$$\cos\gamma\cos\theta - \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\beta_\varphi + \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\beta_\varphi = 0 \tag{5.4.170}$$

Teniendo en cuenta que el vector de posición en coordenadas esféricas está dado por

$$\boldsymbol{r} = r\left(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta\right) \tag{5.4.171}$$

la ecuación anterior de la trayectoria puede escribirse como el producto escalar

$$\left(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta\right)\cdot\left(\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta_\varphi, -\operatorname{sen}\gamma\cos\beta_\varphi, \cos\gamma\right) = 0 \tag{5.4.172}$$

esto es,

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \tag{5.4.173}$$

siendo

$$\boldsymbol{n} = \left(\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta_\varphi, -\operatorname{sen}\gamma\cos\beta_\varphi, \cos\gamma\right) \tag{5.4.174}$$

un vector constante en el espacio ya que sus componentes son constantes, al ser función exclusiva de las constantes L_z, L, β_φ.

Queda finalmente la comprobación de su significado geométrico. Que el producto escalar sea nulo indica que el radio vector $\boldsymbol{r}$ de la partícula es siempre perpendicular a la dirección del espacio definida por el vector $\boldsymbol{n}$. Dicho de otra forma, su radio vector, y por tanto el movimiento de la partícula, se sitúa en todo momento en un plano cuya normal tiene la dirección del vector $\boldsymbol{n}$.

Puede verificarse además que $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario en la dirección del vector momento angular, al ser $\varphi_L = \pi/2 + \beta_\varphi$. Luego *físicamente* el movimiento se realiza por tanto en el plano perpendicular a la dirección (constante) del momento angular, que como sabemos es una propiedad característica de todo movimiento bajo fuerzas centrales, como es el oscilador armónico.

(e) Como indica el enunciado analizamos los momentos conjugados (p_θ, p_φ) de las coordenadas angulares (θ, φ) generados por la función principal de Hamilton, y los comparamos con las definiciones que se derivan del Lagrangiano. Se debe cumplir entonces la equivalencia

$$mr^2\dot\theta = p_\theta \equiv \frac{\partial S}{\partial\theta} = \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\operatorname{sen}^2\theta}} \quad , \quad mr^2\operatorname{sen}^2\theta\dot\varphi = p_\varphi \equiv \frac{\partial S}{\partial\varphi} = L_z \tag{5.4.175}$$

siendo $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = (m\dot r, mr\dot\theta, mr\operatorname{sen}\theta\dot\varphi)$ y $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} = (0, -mr^2\operatorname{sen}\theta\dot\varphi, mr^2\dot\theta)$ el momento lineal y angular de la partícula en coordenadas esféricas.

La identificación en la segunda ecuación es directa, puesto que

$$L_z = \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{u}_z = -mr^2\operatorname{sen}\theta\dot\varphi\boldsymbol{u}_\theta\cdot\boldsymbol{u}_z = mr^2\operatorname{sen}^2\theta\dot\varphi = p_\varphi \tag{5.4.176}$$

Para la identificación de la primera ecuación, necesitamos evaluar a partir de las componentes del vector $\boldsymbol{L}$, definidas anteriormente, la expresión del módulo al cuadrado del momento angular

$$L^2 \equiv m^2r^4\left(\dot\varphi^2\operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2\right) \tag{5.4.177}$$

verificando de aquí que

$$L^2 - \frac{L_z^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = m^2r^4\left(\dot\varphi^2\operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2\right) - \frac{m^2r^4\dot\varphi^2\operatorname{sen}^4\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = m^2r^4\dot\theta^2 \tag{5.4.178}$$

y como consecuencia que, efectivamente

$$\sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\operatorname{sen}^2\theta}} = mr^2\dot{\theta} = p_\theta \tag{5.4.179}$$

5.4.8. Función principal S para partícula libre relativista

En coordenadas cartesianas el Hamiltoniano relativista para una partícula libre en tres dimensiones está dado por

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = c\sqrt{m^2c^2 + \boldsymbol{p}^2} \tag{5.4.180}$$

donde m es la masa en reposo de la partícula, y c la velocidad de la luz.

(a) Resuelva la ecuación de Hamilton−Jacobi por el método de separación de variables y encuentre la expresión de la función principal S. A partir de S, obtenga las nuevas coordenadas canónicas, que serán constantes del movimiento.

(b) Determine, a partir las nuevas coordenadas canónicas, la ley de movimiento en función de las condiciones iniciales, y la expresión de la energía de la partícula en función de m, c y su velocidad. Verifique que se obtiene el resultado esperado.

(a) La ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica de Hamilton

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nabla} W) = E \tag{5.4.181}$$

se escribe, para el Hamiltoniano dado, y en coordenadas cartesianas, en la forma

$$c\sqrt{m^2c^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2} = E \tag{5.4.182}$$

ó

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 = \frac{E^2 - m^2c^4}{c^2} \tag{5.4.183}$$

siendo E la energía (al ser la partícula libre, sólo cinética) del sistema.

Para hallar la solución general, por la estructura de dicha ecuación, podemos probar la combinación totalmente separable en coordenadas cartesianas

$$W(x, y, z) = X(x) + Y(y) + Z(z) \tag{5.4.184}$$

de forma que la ecuación de Hamilton−Jacobi da lugar en primera paso a

$$\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 = \frac{E^2 - m^2c^4}{c^2} - \left(\frac{dy}{dy}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dz}\right)^2 \tag{5.4.185}$$

Observamos que el lado izquierdo depende sólo de la coordenada x, mientras que el derecho no depende de x. Necesariamente entonces cada lado debe ser igual a una constante, digamos α_x, que asumimos independiente de E. Se satisface entonces

$$\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 = \alpha_x \to X = x\alpha_x \tag{5.4.186}$$

Lo mismo sucedería si hubiéramos despejado en cada caso la función dependiente de la coordenada y ó z. En resumen, teniendo en cuesta esta multiplicidad, la función característica de Hamilton tiene la expresión completa

$$W(x, y, z; E, \alpha_x, \alpha_y) = x\alpha_x + y\alpha_y + z\alpha_z(E, \alpha_x, \alpha_y) \tag{5.4.187}$$

donde la última constante de separación, α_z, ya no es una constante independiente, sino que depende de las constantes anteriores en la forma

$$\alpha_z\left(E,\alpha_x,\alpha_y\right)=\sqrt{\frac{E^2-m^2c^4}{c^2}-\alpha_x^2-\alpha_y^2} \tag{5.4.188}$$

Con todo ello, la función principal resulta ser

$$S\left(x,y,z,t;E,\alpha_x,\alpha_y\right)=x\alpha_x+y\alpha_y+z\alpha_z\left(E,\alpha_x,\alpha_y\right)-Et \tag{5.4.189}$$

que es la función generadora de tipo 2 para la transformación a las nuevas coordenadas canónicas $(\beta_E,\beta_x,\beta_y)$ y los nuevos momentos canónicos (E,α_x,α_y), también constantes.

Para obtener las nuevas coordenadas aplicamos su definición para la transformación canónica con una función generadora de tipo 2, con el resultado

$$\beta_E\equiv\frac{\partial S}{\partial E}=z\frac{\partial\alpha_z}{\partial E}-t=\frac{Ez}{c^2\alpha_z}-t \tag{5.4.190}$$

$$\beta_x\equiv\frac{\partial S}{\partial\alpha_x}=x+z\frac{\partial\alpha_z}{\partial\alpha_x}=x-z\frac{\alpha_x}{\alpha_z} \tag{5.4.191}$$

$$\beta_y\equiv\frac{\partial S}{\partial\alpha_y}=y+z\frac{\partial\alpha_z}{\partial\alpha_y}=x-z\frac{\alpha_y}{\alpha_z} \tag{5.4.192}$$

(b) En el caso de la primera coordenada canónica, obtenemos directamente la ley de movimiento para la componente z de la trayectoria, en la forma

$$z(t)=\frac{c^2\alpha_z}{E}\left(t+\beta_E\right) \tag{5.4.193}$$

y a partir de las dos ecuaciones restantes, deducimos entonces las componentes $x\left(t\right),y(t)$ del movimiento en la forma

$$x\left(t\right)=\beta_x+z\left(t\right)\frac{\alpha_x}{\alpha_z};y\left(t\right)=\beta_y+z(t)\frac{\alpha_y}{\alpha_z} \tag{5.4.194}$$

Dado que, por definición, la velocidad de la partícula es la variación temporal de las coordenadas, esto es,

$$v_x=\dot{x}\left(t\right)=\frac{\alpha_x}{\alpha_z}\dot{z}(t)=\frac{c^2\alpha_x}{E} \tag{5.4.195}$$

$$v_y=\dot{y}\left(t\right)=\frac{\alpha_y}{\alpha_z}\dot{z}(t)=\frac{c^2\alpha_y}{E} \tag{5.4.196}$$

$$v_z=\dot{z}(t)=\frac{c^2\alpha_z}{E} \tag{5.4.197}$$

su expresión vectorial se corresponde con

$$\boldsymbol{v}=c^2\frac{\boldsymbol{\alpha}}{E}=c^2\frac{\boldsymbol{p}}{E} \tag{5.4.198}$$

siendo $\boldsymbol{\alpha}\equiv(\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z)$. De aquí obtenemos directamente la expresión para el módulo al cuadrado de la velocidad

$$\boldsymbol{v}^2=\frac{c^4}{E^2}\boldsymbol{\alpha}^2=\frac{c^4}{E^2}\frac{E^2-m^2c^4}{c^2}=\frac{E^2-m^2c^4}{E^2}c^2 \tag{5.4.199}$$

y con ello verificamos que la energía (cinética) de la partícula libre tiene la expresión relativista correcta

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}} \tag{5.4.200}$$

5.4.9. Función principal S para partícula en potencial unidimensional

Considere el movimiento unidimensional de una partícula en el potencial $V(q) = kq^n$, donde k es una constante y n un número entero,

(a) Resuelva la ecuación de Hamilton−Jacobi por el método de separación de variables y obtenga la función principal. Determine la expresión de la nueva coordenada canónica, que será constante del movimiento.

(b) Utilizando la nueva coordenada canónica, demuestre que el periodo T del movimiento depende de la amplitud del mismo, salvo cuando $n = 2$, determinando el valor exacto para este caso. Deberá analizar en primer lugar cómo definir la amplitud del movimiento.

(a) El Hamiltoniano del sistema es

$$H = \frac{p^2}{2m} + kq^n = E \tag{5.4.201}$$

donde E es la energía del sistema. Consideraremos por simplicidad que el potencial es positivo, de forma que realmente su expresión correcta es $V(q) = k|q|^n$.

La ecuación de Hamilton−Jacobi para la función característica se escribe entonces

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + kq^n = E \tag{5.4.202}$$

que tiene la solución directa por cuadraturas

$$W(q;E) = \int \sqrt{2m\,(E - kq^n)}dq \tag{5.4.203}$$

Con esto, la función principal de Hamilton para este problema resulta ser

$$S(q,t;E) = \int \sqrt{2m\,(E - kq^n)}dq - Et \tag{5.4.204}$$

que es la función generadora de tipo 2 para la transformación a la nueva coordenada canónica constante (β) y cuyo nuevo momento canónico (E) también es constante. Tenemos por definición, para una transformación canónica generada por una función de tipo 2,

$$\beta \equiv \frac{\partial S}{\partial E} = m\int \frac{1}{\sqrt{2m\,(E - kq^n)}}dq - t \tag{5.4.205}$$

(b) El movimiento del sistema se realiza entre los dos puntos de retorno, para los cuales el momento $p \equiv m\dot{q}$ es nulo. La amplitud A del movimiento está dada por

$$kA^n = E \tag{5.4.206}$$

esto es,

$$A = \left(\frac{E}{k}\right)^{1/n} \tag{5.4.207}$$

En función de la nueva coordenada canónica β, obtenemos la ley de movimiento para la trayectoria $q = q(t)$, en la forma de cuadratura

$$t = m\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{2m\,(E - kq^n)}} \tag{5.4.208}$$

que satisface la condición inicial $q\,(0) = q_0$ (eligiendo entonces $\beta = 0$), ley que puede expresarse en función de la amplitud en la forma

$$t = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{A^n - q^n}} \tag{5.4.209}$$

Al realizar la integración en un periodo de movimiento, tomamos por simplicidad el punto inicial en un extremo del movimiento, esto es, $q_0 = -A$. Integramos en q entre el instante inicial y la siguiente posición de retorno, lo que corresponde a un intervalo temporal $t = T/2$, siendo T el periodo del movimiento. Con esto, obtenemos una primera relación entre el periodo y la amplitud del movimiento, en la forma

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_{-A}^{A} \frac{dq}{\sqrt{A^n - q^n}} \tag{5.4.210}$$

Sólo nos quedaría adimensionalizar la integral, y así extraer del integrando la dependencia en la amplitud. Con el cambio de variable $q = Au$, encontramos la dependencia funcional del periodo con la amplitud, expresada en la forma

$$T = \sqrt{\frac{2m}{k}} \frac{A}{\sqrt{A^n}} \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^n}} \tag{5.4.211}$$

Se comprueba entonces que salvo para el número entero $n = 2$, cuando el factor dependiente de la amplitud es igual a 1, el periodo del movimiento depende de la amplitud A.

En el caso $n = 2$, que corresponde al oscilador armónico, el periodo tiene el valor exacto

$$T = \sqrt{\frac{2m}{k}} \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \sqrt{\frac{2m}{k}} \cdot \operatorname{arcsen} u \Big|_{-1}^{1} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}} \tag{5.4.212}$$

5.4.10. Ecuación de Hamilton−Jacobi en coordenadas cilíndricas

El Hamiltoniano en coordenadas cilíndricas para una partícula de masa m sometida a un cierto potencial está dado por

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2 + p_z^2 \right) + V(r, \varphi, z) \tag{5.4.213}$$

Suponiendo que el potencial es separable en la forma $V = a\,(r) + b(z)$, y por tanto no depende de la variable angular,

(a) Resuelva la ecuación de Hamilton−Jacobi por el método de separación de variables y obtenga la función principal en cuadraturas.

(a) La ecuación de Hamilton−Jacobi para la función característica de Hamilton se escribe

$$\frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right) + a\,(r) + b\,(z) = E \tag{5.4.214}$$

donde E es la energía del sistema. Para hallar la solución general, por la estructura de dicha ecuación podemos probar la combinación totalmente separable

$$W\,(r, \varphi, z) = R\,(r) + \varphi \alpha_\varphi + Z(z) \tag{5.4.215}$$

siendo α_φ el momento conjugado (constante) de la coordenada cíclica φ, en particular el momento angular según el eje z, $\alpha_\varphi = L_z$. De esta forma, la ecuación de Hamilton−Jacobi da lugar a

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dz}{dz}\right)^2 + b\,(z) = E - a(r) - \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{dR}{dR}\right)^2 + \frac{L_z^2}{r^2}\right) \tag{5.4.216}$$

El lado izquierdo de la ecuación depende sólo de la coordenada z, mientras que el lado derecho no depende de z. Necesariamente entonces cada lado debe ser igual a una constante, digamos α_z, que asumimos independiente de E, y que resulta ser la energía total de la componente z del movimiento, $\alpha_z = E_z$. Por tanto, la solución general satisface simultáneamente

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dZ}{dz}\right)^2 + b\,(z) = E_z \tag{5.4.217}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} + a(r) = E - E_z \tag{5.4.218}$$

cuya solución queda resuelta por cuadraturas

$$Z(z) = \int \sqrt{2mE_z - b\,(z)}dz \tag{5.4.219}$$

$$R(r) = \int \sqrt{2m\,(E - E_z - a(r)) - \frac{L_z^2}{r^2}}dr \tag{5.4.220}$$

Una vez obtenida la función característica, en particular las funciones R, Z, al menos en cuadraturas, la función principal de Hamilton para este problema resulta ser

$$S\,(r, \varphi, z, t; E, E_z, L_z) = R\,(r; E, E_z, L_z) + \varphi L_z + Z\,(z; E_z) - Et \tag{5.4.221}$$

que es la función generadora de tipo 2 para la transformación a las nuevas coordenadas canónicas constantes $(\beta_E, \beta_{Ez}, \beta_{Lz})$ y cuyos momentos canónicos (E, E_z, L_z) también son constantes.

5.4.11. Partícula en curva bidimensional paramétrica

Una partícula puntual de masa m se mueve sin rozamiento y sin gravedad a lo largo de una curva en un espacio de dos dimensiones. La ecuación de la curva, referida a un sistema de ejes cartesianos fijos, tiene la expresión

$$y(t) = x(t) + Ct^2 \tag{5.4.222}$$

siendo C una constante, y t el tiempo. En su movimiento la partícula parte del reposo en el origen de coordenadas, $(x = 0, y = 0)$.

(a) Determine la trayectoria de la partícula utilizando el método de Hamilton-Jacobi para una función principal de tipo 4, definida en la forma $S = S(p, t; p_0)$.

(b) Analice cuál sería el resultado si existiera un potencial externo sobre la partícula, por ejemplo, $V = mgy$. Interprete físicamente la diferencia que se obtiene respecto al resultado del apartado **(a)**.

• Analizamos el caso más general de una función $f(t)$ arbitraria, que satisface $f(0) = 0$, siendo la ecuación de la curva bidimensional

$$y(t) = x(t) + f(t) \tag{5.4.223}$$

Lo primero que debemos notar es que la condición dada, $y = x + f(t)$, sólo determina la ley de evolución de las coordenadas a lo largo de la trayectoria, pero no determina por sí misma la trayectoria de la partícula, digamos $y = g(x)$. De hecho esta condición es compatible con cualquier curva. Por ejemplo, sobre la trayectoria $y = g(x)$, la ley de movimiento sería

$$g(x) \equiv x + f(t) \quad \Longrightarrow \quad x = x(t) \tag{5.4.224}$$

siendo entonces

$$y \equiv x + f(t) \quad \Longrightarrow \quad y(t) = x(t) + f(t) \tag{5.4.225}$$

De esta forma, la trayectoria está determinada únicamente por el Lagrangiano, y el Hamiltoniano en su caso, para una partícula que no está sujeta a un potencial externo conocido, pero que está obligada a seguir una ley de movimiento dada, fruto de la acción externa sobre la curva dada. El modelo más sencillo que refleja este hecho sería el de una cinta transportadora que acelera la partícula a lo largo de la curva de su trayectoria.

(a) Para emplear el método de Hamilton-Jacobi en la resolución del problema, necesitamos en primer lugar el Lagrangiano dado por, considerando como hemos indicado que no existe un potencial externo,

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \left(\dot{x} + f'(t)\right)^2\right) \tag{5.4.226}$$

que queda expresado, salvo un término irrelevante dependiente únicamente del tiempo, en la forma

$$L = m\left(\dot{x} + \frac{1}{2}f'(t)\right)^2 \tag{5.4.227}$$

Para el momento obtenemos, a partir de su definición,

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\left(\dot{x} + \frac{1}{2}f'(t)\right) \tag{5.4.228}$$

y es una constante del movimiento, puesto que x es una coordenada cíclica, y su valor constante es 0 teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento (la partícula parte del reposo en el origen de coordenadas). De esta ley de conservación podríamos obtener ya la trayectoria de la partícula dentro del formalismo Lagrangiano, en la forma

$$\dot{x} + \frac{1}{2}f'(t) \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad x(t) = -\frac{1}{2}f(t) \tag{5.4.229}$$

en cuyo caso

$$y(t) = x(t) + f(t) \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{2}f(t) \quad \Longrightarrow \quad y = -x \tag{5.4.230}$$

comprobando además, como habíamos indicado, que el resultado es independiente de la expresión concreta de la función f, que sólo representa el efecto de la aceleración relativa de la partícula sobre la trayectoria.

• Pasando entonces al formalismo Hamiltoniano, obtenemos en primer lugar el Hamiltoniano a partir de su definición

$$H = \dot{x}p - L = \frac{p^2}{4m} - \frac{1}{2}f'(t)p \tag{5.4.231}$$

salvo un término irrelevante dependiente únicamente del tiempo. A partir de este resultado, la ecuación de Hamilton-Jacobi para una función principal de tipo 4, de la forma $S = S(p,t)$ al ser $p_0 = p(0) = 0$, se escribe

$$\frac{p^2}{4m} - \frac{1}{2}f'(t)p = -\frac{\partial S}{\partial t} \tag{5.4.232}$$

y tiene la solución por integración directa

$$S(p,t) = -\frac{p^2}{4m}t + \frac{1}{2}f(t)p + F(p) \tag{5.4.233}$$

siendo $F(p)$ una función arbitraria del momento p, por determinar. De esta expresión obtenemos el valor de la coordenada x del movimiento a partir de la ecuación de transformación canónica

$$x \equiv -\frac{\partial S}{\partial p} = \frac{p}{2m}t - \frac{1}{2}f(t) - F'(p) \tag{5.4.234}$$

Aplicando entonces las condiciones iniciales del movimiento, $x(0) = 0$ con $f(0) = 0$, vemos que necesariamente $F'(p) = 0$, luego $F(p)$ es una función constante irrelevante, que puede descartarse. Además, al ser, por la conservación de p, $p \equiv p(0) = 0$, como resultado final obtenemos el resultado ya esperado

$$x(t) = -\frac{1}{2}f(t) \tag{5.4.235}$$

y

$$y(t) = x(t) + f(t) = \frac{1}{2}f(t) \equiv -x \tag{5.4.236}$$

(b) En el caso de que existiera un potencial externo adicional, por ejemplo $V = mgy$, puede comprobarse de forma directa que la solución al movimiento es

$$y(t) = x(t) + f(t) \tag{5.4.237}$$

junto con

$$y + x = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{5.4.238}$$

de tal forma que la trayectoria $y = y(x)$ está dada por la expresión implícita

$$y = x + f\left(\sqrt{\frac{2}{g}|y + x|}\right) \tag{5.4.239}$$

Vemos aquí que es la presencia de la gravedad, $g \neq 0$, la que genera que la partícula se aleje de la trayectoria $y = -x$, que sigue la partícula en ausencia de potencial externo. Sin embargo, esta conclusión sólo es parcial, ya que para otros potenciales, por ejemplo

$$V = \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right) \tag{5.4.240}$$

la trayectoria sigue siendo la misma que para el potencial nulo, considerando siempre que la partícula parte del reposo en el origen de coordenadas. El aspecto clave que genera esta diferencia es que la fuerza ejercida por el potencial en un entorno del origen de coordenadas sea nula o no. Es decir, una fueza inicial no nula aleja la partícula de la curva $y = -x$, o más explícitamente, es la inercia de la partícula, por su movimiento acelerado, la que la mantiene sobre la curva $y = -x$. Cualquier fuerza adicional que tenga una componente perpendicular a esta curva, como el peso mg, provoca que la partícula se aleje de la trayectoria original.

5.5. Ejercicios adicionales de sistemas separables

5.5.1. Separabilidad para la partícula libre en el plano

El movimiento en el plano de una partícula libre está descrito por el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) \tag{5.5.1}$$

donde (p_r, p_φ) son los momentos conjugados de las coordenadas polares (r, φ) en el plano.

(a) Estudiar su separabilidad, determinar la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo, y hallar su solución general.

(b) Utilizar esta solución para hallar $r\left(t\right), \varphi\left(t\right)$.

(c) Determinar el significado de cada una de las constantes involucradas.

(a) Para estudiar la separabilidad, podemos usar las condiciones de Staëckel, el teorema de Levi-Civita, o haciendo uso de las coordenadas cíclicas del sistema. En este ultimo caso, al ser φ cíclica su momento conjugado es constante, $p_\varphi = L$, y el Hamiltoniano puede escribirse en función exclusivamente de la coordenada r y su momento conjugado p_r. Con esto se demuestra que el problema es totalmente separable. Por comparación, analizamos la cuestión con el teorema de Levi-Civita. Como sólo tenemos dos coordenadas, sólo necesitamos aplicar el teorema de Levi-Civita para $q_i = r$, $q_j = \varphi$ y $p_i = p_r$, $p_j = p_\varphi$, esto es,

$$\frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial p_\varphi} + \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial \varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial p_\varphi} + \frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}\frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial \varphi} \tag{5.5.2}$$

Para la estructura dada del Hamiltoniano, tenemos las cuatro derivadas segundas

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial p_\varphi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial \varphi} = 0 \tag{5.5.3}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial \varphi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial p_\varphi} = -\frac{2}{mr^3} p_\varphi \tag{5.5.4}$$

y las cuatro derivadas primeras

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\varphi^2}{mr^3} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \tag{5.5.5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \tag{5.5.6}$$

Con ello, se satisface idénticamente la condición de Levi-Citita, y el sistema es totalmente separable.

En las coordenadas polares la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica de Hamilton se escribe

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 = E \tag{5.5.7}$$

Para hallar la solución general, por la estructura de dicha ecuación podemos probar la combinación

$$W(r, \varphi) = R(r) + \Phi(\varphi) \tag{5.5.8}$$

de forma que la ecuación de Hamilton−Jacobi da lugar a

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 = 2mr^2\left(E - \frac{1}{2m}\left(\frac{dR}{dr}\right)^2\right) \tag{5.5.9}$$

El lado izquierdo depende sólo de la coordenada φ, mientras que el derecho no depende de φ. Necesariamente entonces cada lado debe ser igual a una constante α, independiente de E, que resulta ser el módulo al cuadrado del momento angular del movimiento, $\alpha = L^2$. Por tanto, la solución general satisface simultáneamente

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 = L^2 \tag{5.5.10}$$

$$\frac{L^2}{2mr^2} = E - \frac{1}{2m}\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 \tag{5.5.11}$$

con la solución general obtenida por cuadraturas

$$\Phi(\varphi) = L\varphi \tag{5.5.12}$$

$$R(r) = \int \sqrt{2mE - L^2/r^2}\, dr \tag{5.5.13}$$

Por tanto, la función principal de Hamilton para este ejercicio resulta ser

$$S\left(r, \varphi, t; E, L\right) = W\left(r, \varphi; E, L\right) - Et = \int \sqrt{2mE - L^2/r^2}\, dr + L\varphi - Et \tag{5.5.14}$$

que es la función generadora de tipo 2 para la transformación a las nuevas variables canónicas, (E, L) y (β_r, β_φ), constantes, y dados por

$$\beta_r \equiv \frac{\partial S}{\partial E} = m \int \frac{1}{\sqrt{2mE - L^2/r^2}}\, dr - t \tag{5.5.15}$$

$$\beta_\varphi \equiv \frac{\partial S}{\partial L} = -L \int \frac{1}{\sqrt{2mE - L^2/r^2}} \frac{1}{r^2}\, dr + \varphi \tag{5.5.16}$$

Además los momentos de las variables originales están dados por

$$p_r \equiv \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial r} = \sqrt{2mE - L^2/r^2} \tag{5.5.17}$$

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = L \tag{5.5.18}$$

(b) De estas ecuaciones, podemos deducir la ley de movimiento de la partícula para las coordenadas $r\left(t\right), \varphi(t)$ y los momentos $\left(p_r\left(t\right), p_\varphi\left(t\right)\right)$ en función del tiempo. En primer lugar, la integración en la ecuación para β_φ es directa, con el resultado (para $u = 1/r$)

$$\beta_\varphi = L \int \frac{du}{\sqrt{2mE - L^2 u^2}} + \varphi \rightarrow \beta_\varphi = -\arccos \frac{uL}{\sqrt{2mE}} + \varphi \tag{5.5.19}$$

ó

$$r = \frac{L/\sqrt{2mE}}{\cos\left(\varphi - \beta_\varphi\right)} \tag{5.5.20}$$

ecuación para la trayectoria $r = r(\varphi)$ en el plano del movimiento.
Podemos describir la trayectoria en función del parámetro de impacto b, distancia de mayor acercamiento al origen. Su valor se obtiene de la conservación de la energía cuando $p_r = 0$, $r = b$, en la forma

$$E = \frac{L^2}{2mb^2} \rightarrow b = L/\sqrt{2mE} \tag{5.5.21}$$

La trayectoria se escribe entonces

$$r\cos\left(\varphi - \beta_\varphi\right) = b \tag{5.5.22}$$

y se comprueba que es un movimiento rectilíneo, a lo largo de la recta que pasa a una distancia b del origen. Geométricamente $r\cos\left(\varphi - \beta_\varphi\right)$ nos da la proyección del vector de posición sobre la recta perpendicular al movimiento, y que pasa por el origen. Que tal proyección sea constante e igual a b, es la indicación del movimiento rectilíneo antes descrito.
Integrando ahora la ecuación para β_r de forma directa, hallamos la ley de movimiento para la coordenada radial, en la forma

$$\beta_r = m \int \left(2mEr^2 - L^2\right)^{-1/2} r dr - t \rightarrow \beta_r + t = \frac{\left(2mEr^2 - L^2\right)^{1/2}}{2E} \tag{5.5.23}$$

ó

$$r^2 = b^2 + \frac{2E}{m}\left(\beta_r + t\right)^2 \equiv b^2 + v^2\left(\beta_r + t\right)^2 \tag{5.5.24}$$

que indica que el movimiento rectilíneo se realiza con la velocidad constante

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \tag{5.5.25}$$

comprobándose de nuevo que el momento angular asociado a este movimiento tiene el valor constante e igual a L,

$$mvb = m\sqrt{\frac{2E}{m}}\frac{L}{\sqrt{2mE}} = L \tag{5.5.26}$$

(c) Las cuatro constantes del movimiento son

$$E = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) \tag{5.5.27}$$

$$L = p_\varphi \tag{5.5.28}$$

junto con β_r y β_φ. El significado físico de cada una de ellas es el siguiente: β_φ es el ángulo polar para el máximo acercamiento de la partícula al origen, de forma que $\pi/2 + \beta_\varphi$ es el ángulo polar de la propia recta del movimiento, $-\beta_r$ es el tiempo en el que la partícula alcanza su máximo acercamiento al origen, L es el momento angular del movimiento, y E es la energía total del movimiento e igual a la energía cinética $1/2mv^2$ a lo largo de la trayectoria rectilínea.

5.5.2. Hamiltoniano para sistema bidimensional

Considérese el siguiente Hamiltoniano de un sistema con dos grados de libertad

$$H = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2m}\left(p_2 - Kq_1\right)^2 \tag{5.5.29}$$

Estudiar su separabilidad y mediante el método de Hamilton−Jacobi encontrar la trayectoria del sistema.

Para estudiar la separabilidad, podemos usar las condiciones de Staëckel, el teorema de Levi-Civita, o haciendo uso de las coordenadas cíclicas del sistema. En este ultimo caso, al ser q_2 cíclica su momento conjugado es constante, $p_2 = \text{cte}$, y el Hamiltoniano puede escribirse en función exclusivamente de la coordenada q_1 y su momento conjugado p_1. Con esto se demuestra que el problema es totalmente separable. Por comparación, analizamos la cuestión con el teorema de Levi-Civita. Como sólo tenemos dos coordenadas, sólo necesitamos aplicar el teorema de Levi-Civita en la forma

$$\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_2} + \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_2} \tag{5.5.30}$$

Para la estructura dada del Hamiltoniano, tenemos las cuatro derivadas segundas

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_2} = -\frac{K}{m} \tag{5.5.31}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_2} = 0 \tag{5.5.32}$$

y las cuatro derivadas primeras

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{K}{m}\left(p_2 - Kq_1\right) \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m} \tag{5.5.33}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{1}{m}\left(p_2 - Kq_1\right) \tag{5.5.34}$$

Con ello, se satisface idénticamente la condición de Levi-Citita, y el sistema es totalmente separable.

La ecuación de Hamilton−Jacobi para la función característica de Hamilton es:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}-Kq_1\right)^2=E \tag{5.5.35}$$

Dado que el Hamiltoniano H no depende explícitamente del tiempo, ni de q_2, podemos asumir una solución general del tipo

$$W\left(q_1,q_2;E,\alpha_2\right)=U\left(q_1\right)+\alpha_2 q_2 \tag{5.5.36}$$

en cuyo caso α_2 resulta ser el momento conjugado de q_2, que será una constante del movimiento. Además la función U debe satisfacer la ecuación reducida

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dU}{dq_1}\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\alpha_2-Kq_1\right)^2=E \tag{5.5.37}$$

con la solución por cuadratura

$$U=\int\sqrt{2mE-\left(\alpha_2-Kq_1\right)^2}dq_1 \tag{5.5.38}$$

de forma que la función principal de Hamilton es

$$S\left(q_1,q_2,t;E,\alpha_2\right)=\int\sqrt{2mE-\left(\alpha_2-Kq_1\right)^2}dq_1+\alpha_2 q_2-Et \tag{5.5.39}$$

que es la función generadora de tipo 2 para la transformación a las nuevas variables canónicas (E,α_2) y (β_1,β_2), constantes, y dados por

$$\beta_1\equiv\frac{\partial S}{\partial E}=m\int\frac{1}{\sqrt{2mE-\left(\alpha_2-Kq_1\right)^2}}dq_1-t \tag{5.5.40}$$

$$\beta_2\equiv\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=-\int\frac{\left(\alpha_2-Kq_1\right)}{\sqrt{2mE-\left(\alpha_2-Kq_1\right)^2}}dq_1+q_2 \tag{5.5.41}$$

Con el cambio de variable $u=Kq_1-\alpha_2$, la integración de la primera ecuación es directa, con el resultado

$$\beta_1+t=\frac{m}{K}\int\frac{du}{\sqrt{2mE-u^2}}\rightarrow u=\sqrt{2mE}\,\mathrm{sen}\left(\frac{K}{m}\left(\beta_1+t\right)\right) \tag{5.5.42}$$

Por tanto, la ley de movimiento para la coordenada q_1 está dada por

$$q_1\left(t\right)=\frac{\alpha_2}{K}+\frac{\sqrt{2mE}}{K}\,\mathrm{sen}\left(\frac{K}{m}\left(\beta_1+t\right)\right) \tag{5.5.43}$$

Finalmente determinamos la trayectoria para la segunda variable q_2. De la ecuación para β_2, de nuevo con el cambio de variable $u=Kq_1-\alpha_2$, deducimos que

$$q_2=\beta_2-\frac{1}{2K}\int\frac{2udu}{\sqrt{2mE-u^2}}\rightarrow q_2=\beta_2+\frac{\left(2mE-u^2\right)^{1/2}}{K} \tag{5.5.44}$$

con lo cual

$$q_2(t)=\beta_2+\frac{\sqrt{2mE}}{K}\cos\left(\frac{K}{m}\left(\beta_1+t\right)\right) \tag{5.5.45}$$

5.5.3. Separabilidad en dos dimensiones

Sea un Hamiltoniano en dos dimensiones en la forma

$$H = \frac{1}{2}\left(a \cdot p_x^2 + b \cdot p_y^2\right) + V(x,y) \tag{5.5.46}$$

donde a, b son funciones positivas de (x, y), y V es un potencial arbitrario de las coordenadas. Establecer cuáles son las condiciones que necesariamente se deben dar para la separabilidad de la ecuación de Hamilton−Jacobi.

Ya que la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica

$$\frac{1}{2}\left(a\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right) + V(x,y) = E \tag{5.5.47}$$

es separable, admite una solución en la forma

$$W(x,y;E,\alpha) = X(x;E,\alpha) + Y(y;E,\alpha) \tag{5.5.48}$$

donde α es la segunda integral del movimiento, independiente de la energía E, y por tanto se debe satisfacer

$$\frac{1}{2}\left(a\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2\right) + V(x,y) = E \tag{5.5.49}$$

Ésta es la ecuación que debemos resolver, no para la función característica, sino para el potencial V. Dado que el cálculo es exclusivamente funcional, podemos simplificarlo introduciendo las definiciones $\theta(x) \equiv \frac{1}{2}(\partial X/\partial x)^2$, $\varphi(y) \equiv \frac{1}{2}(\partial Y/\partial y)^2$ de forma que la ecuación de Hamilton−Jacobi se escribe

$$a\theta + b\varphi + V = E \tag{5.5.50}$$

Para determinar la forma funcional del potencial, debemos eliminar las funciones arbitrarias de las coordenadas, a, b. Para ello, utilizamos las dos condiciones adicionales que resultan de derivar esta ecuación respecto a las dos constantes del movimiento. Con la notación en subíndice, $\theta_{,E} \equiv \partial\theta/\partial E$, $\theta_{,\alpha} \equiv \partial\theta/\partial\alpha$, etc, las dos condiciones adicionales se escriben

$$a\theta_{,E} + b\varphi_{,E} = 1 \tag{5.5.51}$$

$$a\theta_{,\alpha} + b\varphi_{,\alpha} = 0 \tag{5.5.52}$$

de las que podemos despejar las funciones a, b en función de X, Y, en la forma

$$a = -\frac{\varphi_{,\alpha}}{\varphi_{,E}\theta_{,\alpha} - \varphi_{,\alpha}\theta_{,E}} \tag{5.5.53}$$

$$b = \frac{\theta_{,\alpha}}{\varphi_{,E}\theta_{,\alpha} - \varphi_{,\alpha}\theta_{,E}} \tag{5.5.54}$$

Con ello, obtenemos la expresión general de la función potencial en función X, Y, a partir de la ecuación de Hamilton−Jacobi en la forma

$$V(x,y) = E - a\theta - b\varphi = E + \frac{\varphi_{,\alpha}\theta - \theta_{,\alpha}\varphi}{\varphi_{,E}\theta_{,\alpha} - \varphi_{,\alpha}\theta_{,E}} \tag{5.5.55}$$

que podemos rescribir en la forma más simplificada

$$V(x,y) = E + \frac{\frac{\theta}{\theta_{,\alpha}} - \frac{\varphi}{\varphi_{,\alpha}}}{\frac{\varphi_{,E}}{\varphi_{,\alpha}} - \frac{\theta_{,E}}{\theta_{,\alpha}}} = \frac{\frac{\theta}{\theta_{,\alpha}} - E\frac{\theta_{,E}}{\theta_{,\alpha}} + E\frac{\varphi_{,E}}{\varphi_{,\alpha}} - \frac{\varphi}{\varphi_{,\alpha}}}{\frac{\varphi_{,E}}{\varphi_{,\alpha}} - \frac{\theta_{,E}}{\theta_{,\alpha}}} \tag{5.5.56}$$

Teniendo en cuenta la dependencia de las funciones $\theta(x)$, $\varphi(y)$ en las coordenadas del sistema (x,y), el potencial más general que admite la separabilidad de la ecuación de Hamilton−Jacobi es de la forma

$$V(x,y) = \frac{P_1(x) + Q_1(y)}{P_2(x) + Q_2(y)} \tag{5.5.57}$$

donde las P_i, Q_i son funciones arbitrarias de sus coordenadas.

5.5.4. Separabilidad en coordenadas cartesianas

Determinar en el ejercicio anterior la forma general del Hamiltoniano que da lugar a una ecuación de Hamilton−Jacobi separable en las coordenadas (x,y), verificando además que el potencial V obtenido está bien definido, esto es, es no singular.

La forma general de las funciones a, b viene dada por

$$a = -\frac{\varphi_{,\alpha}}{\varphi_{,E}\theta_{,\alpha} - \varphi_{,\alpha}\theta_{,E}} = -\frac{\frac{1}{\theta_{,\alpha}}}{\frac{\varphi_{,E}}{\varphi_{,\alpha}} - \frac{\theta_{,E}}{\theta_{,\alpha}}} \equiv \frac{F(x)}{P_2(x) + Q_2(y)} \tag{5.5.58}$$

$$b = \frac{\theta_{,\alpha}}{\varphi_{,E}\theta_{,\alpha} - \varphi_{,\alpha}\theta_{,E}} = \frac{\frac{1}{\varphi_{,\alpha}}}{\frac{\varphi_{,E}}{\varphi_{,\alpha}} - \frac{\theta_{,E}}{\theta_{,\alpha}}} \equiv \frac{G(y)}{P_2(x) + Q_2(y)} \tag{5.5.59}$$

Con este resultado, la forma más general del Hamiltoniano está dada por

$$H = \frac{1}{P_2(x) + Q_2(y)}\left(F(x)p_x^2 + G(y)p_y^2\right) + \frac{P_1(x) + Q_1(y)}{P_2(x) + Q_2(y)} \tag{5.5.60}$$

Revisamos ahora la definición del potencial

$$V(x,y) = \frac{\frac{\theta}{\theta_{,\alpha}} - E\frac{\theta_{,E}}{\theta_{,\alpha}} + E\frac{\varphi_{,E}}{\varphi_{,\alpha}} - \frac{\varphi}{\varphi_{,\alpha}}}{\frac{\varphi_{,E}}{\varphi_{,\alpha}} - \frac{\theta_{,E}}{\theta_{,\alpha}}} \tag{5.5.61}$$

que será no singular siempre que

$$\theta_{,\alpha} \neq 0 \quad , \quad \varphi_{,\alpha} \neq 0 \quad , \quad \varphi_{,E}\theta_{,\alpha} - \theta_{,E}\varphi_{,\alpha} \neq 0 \tag{5.5.62}$$

de forma que todos los denominadores en su definición son distintos de cero. Las funciones derivadas implicadas surgen de las condiciones adicionales $a\theta_{,E} + b\varphi_{,E} = 1$

$$a\theta_{,\alpha} + b\varphi_{,\alpha} = 0 \tag{5.5.63}$$

asumiéndose que las funciones a, b son positivas. De la segunda condición vemos necesariamente si una de las dos funciones $\theta_{,\alpha}$, $\varphi_{,\alpha}$ es idénticamente nula, lo serán las dos, dando lugar a una solución sin sentido físico. Por tanto, necesariamente $\theta_{,\alpha} \neq 0, \varphi_{,\alpha} \neq 0$. Por otro lado, la condición $\varphi_{,E}\theta_{,\alpha} \neq \theta_{,E}\varphi_{,\alpha}$ es equivalente a la condición de determinante no nulo para la resolución del sistema de dos ecuaciones anterior para $\theta_{,\alpha}$, $\varphi_{,\alpha}$, lo que nos permite encontrar de forma unívoca la solución hallada en el ejercicio anterior.

5.5.5. Ecuación de Hamilton−Jacobi separable en coordenadas cartesianas

Verificar que la solución general obtenida para el Hamiltoniano del ejercicio anterior da lugar a una ecuación de Hamilton−Jacobi separable en las coordenadas (x, y) y obtener la solución para la función característica, analizando el tipo de movimiento que se produce.

La ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica es

$$\frac{1}{P_2(x)+Q_2(y)}\left(F(x)\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+G(y)\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right)+\frac{P_1(x)+Q_1(y)}{P_2(x)+Q_2(y)}=E \tag{5.5.64}$$

Buscamos una solución separable aditivamente en la forma

$$W(x,y)=X(x)+Y(y) \tag{5.5.65}$$

y se satisface

$$\frac{1}{P_2(x)+Q_2(y)}\left(F(x)\left(\frac{dx}{dx}\right)^2+G(y)\left(\frac{dY}{dy}\right)^2\right)+\frac{P_1(x)+Q_1(y)}{P_2(x)+Q_2(y)}=E \tag{5.5.66}$$

Agrupando términos, escribimos la ecuación en la forma

$$F(x)\left(\frac{dx}{dx}\right)^2+P_1(x)-P_2(x)E=Q(y)E-Q_1(y)-G(y)\left(\frac{dY}{dy}\right)^2 \tag{5.5.67}$$

El lado izquierdo depende sólo de la coordenada x, mientras que el derecho no depende de x. Necesariamente entonces cada lado debe ser igual a una constante α, independiente de E, que no tiene un significado físico preciso. Por tanto, la solución general satisface simultáneamente

$$F(x)\left(\frac{dx}{dx}\right)^2+P_1(x)-P_2(x)E=\alpha \tag{5.5.68}$$

$$G(y)\left(\frac{dY}{dy}\right)^2+Q_1(y)-Q_2(y)E=-\alpha \tag{5.5.69}$$

La solución se resuelve por cuadraturas, obteniendo la función principal de Hamilton

$$\begin{aligned}S(x,y,t;E,\alpha)&=X(x;E,\alpha)+Y(y;E,\alpha)-Et\\&=\int\sqrt{\frac{P_2(x)E+\alpha-P_1(x)}{F(x)}}dx+\int\sqrt{\frac{Q_2(y)E-\alpha-Q_1(y)}{G(y)}}dy-Et\end{aligned} \tag{5.5.70}$$

que es la función generadora de tipo 2 para la transformación a las nuevas variables canónicas (E,α) y (β_E,β_α), constantes, dados por

$$\beta_E\equiv\frac{\partial S}{\partial E}=\int\frac{P_2(x)dx}{\sqrt{4F(x)\left(P_2(x)E+\alpha-P_1(x)\right)}}+\int\frac{Q_2(y)\,dy}{\sqrt{4G(y)\left(Q_2(y)E-\alpha-Q_1(y)\right)}}-t \tag{5.5.71}$$

$$\beta_\alpha\equiv\frac{\partial S}{\partial\alpha}=\int\frac{dx}{\sqrt{4F(x)\left(P_2(x)E+\alpha-P_1(x)\right)}}-\int\frac{dy}{\sqrt{4G(y)\left(Q_2(y)E-\alpha-Q_1(y)\right)}} \tag{5.5.72}$$

Dado que las funciones en (x,y) aparecen en las dos ecuaciones, para obtener la ecuación de la trayectoria necesitaremos de varios pasos. Podemos empezar diferenciando estas dos ecuaciones, asumiendo la constancia de (β_E,β_α), con lo cual, definiendo las funciones

$$R(x) \equiv 4F(x)\left(P_2(x)E + \alpha - P_1(x)\right) \tag{5.5.73}$$

$$S(y) \equiv 4G(y)\left(Q_2(y)E - \alpha - Q_1(y)\right) \tag{5.5.74}$$

obtenemos las ecuaciones del movimiento

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{S(y)}} = \frac{dt}{P_2(x) + Q_2(y)} \tag{5.5.75}$$

análogas con el movimiento combinado de dos movimientos rectilíneos en los ejes respectivos,

$$\frac{dx}{v_x(x)} = \frac{dy}{v_y(y)} = d\tau \equiv \frac{dt}{P_2(x) + Q_2(y)} \tag{5.5.76}$$

y para un intervalo de tiempo $d\tau$ dependiente de las coordenadas. Los puntos de retorno están dados por las soluciones de $v_x = 0$, $v_y = 0$, y el comportamiento dinámico del sistema dependerá fuertemente de las características de la función τ, así definida.

5.5.6. Separabilidad en coordenadas parabólicas

Determinar la forma más general de un potencial independiente del tiempo en dos dimensiones (x, y) tal que la ecuación de Hamilton−Jacobi sea separable respecto a las coordenadas parabólicas (ξ, η) definidas en el plano a través de las ecuaciones

$$\xi = \sqrt{x^2 + y^2} + y \quad , \quad \eta = \sqrt{x^2 + y^2} - y \tag{5.5.77}$$

¿Puede el problema de Kepler puede resolverse en estas coordenadas?

Dado que estamos trabajando con un cambio de coordenadas, podemos utilizar el método Lagrangiano, o desarrollar la transformación canónica correspondiente. En el primer caso, partimos del Lagrangiano en dos dimensiones y en coordenadas cartesianas

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x, y) \tag{5.5.78}$$

Las ecuaciones de la transformación inversa son

$$x = \sqrt{\xi\eta} \tag{5.5.79}$$

$$y = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \tag{5.5.80}$$

con lo cual, sus derivadas respecto al tiempo satisfacen

$$\dot{x} = \frac{\dot{\xi}\sqrt{\eta}}{2\sqrt{\xi}} + \frac{\dot{\eta}\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\eta}} \tag{5.5.81}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{2}\left(\dot{\xi} - \dot{\eta}\right) \tag{5.5.82}$$

Con ello, el Lagrangiano para las nuevas coordenadas y velocidades del movimiento se escribe

$$L\left(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}\right) = \frac{1}{8}m(\xi + \eta)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta}\right) - \overline{V}(\xi, \eta) \tag{5.5.83}$$

donde hemos definido

$$\overline{V}(\xi, \eta) \equiv V(\sqrt{\xi\eta}, (\xi - \eta)/2) \tag{5.5.84}$$

Buscamos ahora la expresión completa del Hamiltoniano correspondiente, y para ello definimos los nuevos momentos conjugados

$$p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \frac{1}{4} m \left(\frac{\xi + \eta}{\xi} \right) \dot{\xi} \tag{5.5.85}$$

$$p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = \frac{1}{4} m \left(\frac{\xi + \eta}{\eta} \right) \dot{\eta} \tag{5.5.86}$$

y con la definición del Hamiltoniano, obtenemos

$$H\left(\xi, \eta, p_\xi, p_\eta\right) = \frac{2}{m} \frac{1}{\xi + \eta} \left(\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2 \right) + \overline{V}\left(\xi, \eta\right) \tag{5.5.87}$$

Con esta misma estructura del Hamiltoniano, hemos visto en un ejercicio anterior dentro de esta misma sección, que la ecuación de Hamilton−Jacobi es separable cuando el potencial admite la forma funcional

$$\overline{V}\left(\xi, \eta\right) = \frac{P_1(\xi) + Q_1(\eta)}{\xi + \eta} \tag{5.5.88}$$

que respecto a las variables cartesianas originales exige la forma general

$$V\left(x, y\right) = \frac{P_1(r + y) + Q_1(r - y)}{2r} \tag{5.5.89}$$

siendo $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

El potencial en el problema de Kepler está dado por

$$V\left(r\right) = -\frac{k}{r} \tag{5.5.90}$$

y tiene esta estructura, con $P_1\left(r + y\right) = Q_1\left(r - y\right) = 1$, y por tanto, puede resolverse de forma separable en coordenadas parabólicas.

5.5.7. Separabilidad en coordenadas elípticas

Determinar la forma más general de un potencial en dos dimensiones (x, y) tal que la ecuación de Hamilton−Jacobi sea separable respecto a las coordenadas elípticas (u, v) definidas en el plano a través de las ecuaciones

$$x = a \cosh\left(u\right) \cos\left(v\right) \quad , \quad y = a \operatorname{senh}\left(u\right) \operatorname{sen}\left(v\right) \tag{5.5.91}$$

¿Qué tipo de problemas dinámicos pueden resolverse con el método de Hamilton−Jacobi en estas coordenadas?

Dado que estamos trabajando con un cambio de coordenadas, podemos utilizar el método Lagrangiano, o desarrollar la transformación canónica correspondiente. En el primer caso, partimos del Lagrangiano en dos dimensiones y en coordenadas cartesianas

$$L\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}\right) = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) - V(x, y) \tag{5.5.92}$$

Las derivadas respecto al tiempo satisfacen

$$\dot{x} = a\dot{u} \operatorname{senh}\left(u\right) \cos\left(v\right) - a\dot{v} \cosh\left(u\right) \operatorname{sen}\left(v\right) \tag{5.5.93}$$

$$\dot{y} = a\dot{u} \cosh\left(u\right) \operatorname{sen}\left(v\right) + a\dot{v} \operatorname{senh}\left(u\right) \cos\left(v\right) \tag{5.5.94}$$

y por tanto,

$$\frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) = \frac{1}{2} m a^2 \left(\cosh^2\left(u\right) - \cos^2\left(v\right) \right) \left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 \right) \tag{5.5.95}$$

Con ello, el Lagrangiano para las nuevas coordenadas y velocidades del movimiento se escribe

$$L\left(u,v,\dot{u},\dot{v}\right)=\frac{1}{2}ma^{2}\left(\cosh^{2}\left(u\right)-\cos^{2}\left(v\right)\right)\left(\dot{u}^{2}+\dot{v}^{2}\right)-\overline{V}\left(u,v\right) \tag{5.5.96}$$

donde hemos definido

$$\overline{V}\left(u,v\right)\equiv V(a\cosh\left(u\right)\cos\left(v\right),a\,\mathrm{senh}\left(u\right)\mathrm{sen}\left(v\right)) \tag{5.5.97}$$

Buscamos ahora la expresión completa del Hamiltoniano correspondiente, y para ello definimos los nuevos momentos conjugados

$$p_{u}=\frac{\partial L}{\partial\dot{u}}=ma^{2}\left(\cosh^{2}\left(u\right)-\cos^{2}\left(v\right)\right)\dot{u} \tag{5.5.98}$$

$$p_{v}=\frac{\partial L}{\partial\dot{v}}=ma^{2}\left(\cosh^{2}\left(u\right)-\cos^{2}\left(v\right)\right)\dot{v} \tag{5.5.99}$$

y con la definición del Hamiltoniano, obtenemos

$$H\left(u,v,p_{u},p_{v}\right)=\frac{1}{2ma^{2}\left(\cosh^{2}\left(u\right)-\cos^{2}\left(v\right)\right)}\left(p_{u}^{2}+p_{v}^{2}\right)+\overline{V}\left(u,v\right) \tag{5.5.100}$$

Con esta misma estructura del Hamiltoniano, hemos visto en un ejercicio anterior dentro de esta misma sección, que la ecuación de Hamilton−Jacobi es separable cuando el potencial admite la forma funcional

$$\overline{V}\left(u,v\right)=\frac{P_{1}(u)+Q_{1}(v)}{\cosh^{2}\left(u\right)-\cos^{2}\left(v\right)} \tag{5.5.101}$$

Para analizar qué tipo de sistemas pueden ser separables en estas coordenadas, escribimos el potencial en la forma desarrollada

$$\overline{V}\left(u,v\right)=\frac{A(u,v)}{\cosh\left(u\right)+\cos\left(v\right)}-\frac{B(u,v)}{\cosh\left(u\right)-\cos\left(v\right)} \tag{5.5.102}$$

seleccionando las nuevas funciones A,B de forma que $P_{1}\left(u\right)+Q_{1}\left(v\right)=\left(A-B\right)\cosh\left(u\right)-\left(A+B\right)\cos\left(v\right)$. Teniendo en cuenta que

$$\sqrt{\left(x\pm a\right)^{2}+y^{2}}=a\left(\cosh\left(u\right)\pm\cos\left(v\right)\right) \tag{5.5.103}$$

vemos que el potencial es suma de contribuciones de potencial referidas a dos centros fijos situados en las coordenadas $(a,0)$ y $(-a,0)$, como es el problema de Kepler de tres cuerpos con dos centros fijos

$$V\left(x,y\right)=-k_{1}\frac{1}{\sqrt{\left(x+a\right)^{2}+y^{2}}}-k_{2}\frac{1}{\sqrt{\left(x-a\right)^{2}+y^{2}}} \tag{5.5.104}$$

5.5.8. Ecuación separable de Hamilton−Jacobi en presencia de campo magnético constante − coordenadas cartesianas

Escribir la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para una partícula de masa m y carga e en presencia de un campo magnético constante dirigido en la dirección z. Utilizar coordenadas cartesianas y la elección gauge para el potencial vector $\boldsymbol{A} = (-By, 0, 0)$.

(a) Demostrar que la ecuación es separable en estas coordenadas, y obtener una solución general para la función característica W.

(b) Identificar el significado físico de las constantes α de separación y de sus variables conjugadas β.

(a) El Hamiltoniano de una partícula en presencia de un campo magnético está dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 \tag{5.5.105}$$

siendo $\boldsymbol{A}$ el potencial vector. En nuestro caso, tenemos

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x + \frac{e}{c}By\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_y^2 + p_z^2\right) \tag{5.5.106}$$

y la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica se escribe

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{e}{c}By\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 = 2mE \tag{5.5.107}$$

Dado que existen dos coordenadas cíclicas (x, z), la ecuación es separable en la forma

$$W\left(x, y, z; E, \alpha_x, \alpha_z\right) = x\alpha_x + Y(y; E, \alpha_x, \alpha_z) + z\alpha_z \tag{5.5.108}$$

siendo α_x, α_z los momentos conjugados constantes a las coordenadas (x, z). De esta forma la ecuación de Hamilton−Jacobi da lugar a la ecuación para la única función $Y(y)$ por resolver

$$\left(\alpha_x + \frac{e}{c}By\right)^2 + \left(\frac{dY}{dy}\right)^2 + \alpha_z^2 = 2mE \tag{5.5.109}$$

resoluble por cuadraturas,

$$Y = \int \sqrt{2mE - \alpha_z^2 - \left(\alpha_x + \frac{e}{c}By\right)^2}\, dy \tag{5.5.110}$$

La función principal es

$$S\left(x, y, z, t; E, \alpha_x, \alpha_z\right) = x\alpha_x + \int \sqrt{2mE - \alpha_z^2 - \left(\alpha_x + \frac{e}{c}By\right)^2}\, dy + z\alpha_z - Et \tag{5.5.111}$$

que es la función generadora de tipo 2 para la transformación a las nuevas variables canónicas (E, α_x, α_z) y $(\beta_E, \beta_x, \beta_z)$, constantes, y dados por con $F(y) \equiv 2mE - \alpha_z^2 - \left(\alpha_x + \frac{e}{c}By\right)^2$

$$\beta_E \equiv \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial Y}{\partial E} - t = \int \frac{m}{\sqrt{F(y)}}\, dy - t \tag{5.5.112}$$

$$\beta_x \equiv \frac{\partial S}{\partial \alpha_x} = x + \frac{\partial Y}{\partial \alpha_x} = x - \int \frac{\alpha_x + \frac{e}{c}By}{\sqrt{F(y)}}\, dy \tag{5.5.113}$$

$$\beta_z \equiv \frac{\partial S}{\partial \alpha_z} = z + \frac{\partial Y}{\partial \alpha_z} = z - \alpha_z \int \frac{1}{\sqrt{F(y)}} dy \tag{5.5.114}$$

(b) Combinando las ecuaciones primera y tercera, encontramos la ley de movimiento en la dirección z, en la forma

$$z = \beta_z + \frac{\alpha_z}{m}(t + \beta_E) \tag{5.5.115}$$

quedando claro que α_z es el momento (constante) en la dirección del eje z, que $-\beta_E$ puede tomarse como el instante inicial, siendo entonces β_z la componente z de la posición inicial de la partícula. La ecuación para β_x tiene la integración directa, con $u = \alpha_x + \frac{e}{c}By$,

$$\beta_x = x - \frac{c}{eB} \int \frac{u}{\sqrt{2mE - \alpha_z^2 - u^2}} dy = x + \frac{c}{eB} \sqrt{2mE - \alpha_z^2 - u^2} \tag{5.5.116}$$

ó

$$(x - \beta_x)^2 + \left(y + \frac{c\alpha_x}{eB}\right)^2 = \left(\frac{c}{eB}\right)^2 \left(2mE - \alpha_z^2\right) \equiv R^2 \tag{5.5.117}$$

ecuación de la trayectoria en el plano (x, y) que indica que sobre ese plano la proyección del movimiento da lugar a una circunferencia de radio R, y centro O, dado por las coordenadas

$$O \equiv \left(\beta_x, \frac{c\alpha_x}{eB}\right) \tag{5.5.118}$$

identificando así el significado físico asociado a las constantes α_x, β_x.
La frecuencia de giro (o frecuencia ciclotrón ω_c) en el plano (x, y) puede obtenerse directamente a partir de las ecuaciones de Hamilton de movimiento para la coordenada y. Tenemos

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \quad , \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{eB}{mc}\left(p_x + \frac{e}{c}By\right) = m\ddot{y} \tag{5.5.119}$$

de donde se obtiene

$$\ddot{y} + \left(\frac{eB}{mc}\right)^2 y = -\frac{eBp_x}{m^2 c} \tag{5.5.120}$$

y entonces podemos identificar el valor

$$\omega_c = \frac{eB}{mc} \tag{5.5.121}$$

para la frecuencia de movimiento de giro en el plano (x, y).

5.5.9. Ecuación separable de Hamilton−Jacobi en presencia de campo magnético constante − coordenadas cilíndricas

Escribir la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para una partícula de masa m y carga e en presencia de un campo magnético constante dirigido en la dirección z. Utilizar coordenadas cilíndricas y la elección gauge para el potencial vector $\boldsymbol{A} = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0)$.

(a) Demostrar que la ecuación es separable en estas coordenadas, y obtener una solución general para la función característica W.

(b) Identificar el significado físico de las constantes α de separación y de sus variables conjugadas β.

(a) El Hamiltoniano de una partícula en presencia de un campo magnético está dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 \tag{5.5.122}$$

siendo $\boldsymbol{A}$ el potencial vector. En nuestro caso, en las coordenadas cilíndricas (r, φ, z) el vector $\boldsymbol{A}$ tiene la expresión

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= -\frac{1}{2}By\boldsymbol{u}_x + \frac{1}{2}Bx\boldsymbol{u}_y \\ &= -\frac{1}{2}Br\,\mathrm{sen}\,\varphi\,(\cos\varphi\boldsymbol{u}_r - \mathrm{sen}\,\varphi\boldsymbol{u}_\varphi) + \frac{1}{2}Br\cos\varphi\,(\mathrm{sen}\,\varphi\boldsymbol{u}_r + \cos\varphi\boldsymbol{u}_\varphi) \\ &= \frac{1}{2}Br\boldsymbol{u}_\varphi\end{aligned} \tag{5.5.123}$$

Con ello, el Hamiltoniano se escribe

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{r}p_\varphi - \frac{eB}{2c}r\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + p_z^2\right) \tag{5.5.124}$$

y la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica se escribe

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi} - \frac{eB}{2c}r\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 = 2mE \tag{5.5.125}$$

Dado que existen dos coordenadas cíclicas (φ, z), la ecuación es separable en la forma

$$W(r, \varphi, z; E, \alpha_\varphi, \alpha_z) = R(r; E, \alpha_\varphi, \alpha_z) + z\alpha_z + \varphi\alpha_\varphi \tag{5.5.126}$$

siendo α_φ, α_z los momentos conjugados constantes a las coordenadas (φ, z). De esta forma, la ecuación de Hamilton−Jacobi da lugar a la ecuación para la única función $R(r)$ por resolver

$$\left(\frac{1}{r}\alpha_\varphi - \frac{eB}{2c}r\right)^2 + \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \alpha_z^2 = 2mE \tag{5.5.127}$$

resoluble por cuadraturas,

$$R = \int\sqrt{2mE - \alpha_z^2 - \left(\frac{1}{r}\alpha_\varphi - \frac{eB}{2c}r\right)^2}\,dr \tag{5.5.128}$$

La función principal es

$$S(r, \varphi, z; E, \alpha_\varphi, \alpha_z) = \int\sqrt{2mE - \alpha_z^2 - \left(\frac{1}{r}\alpha_\varphi - \frac{eB}{2c}r\right)^2}\,dr + z\alpha_z + \varphi\alpha_\varphi - Et \tag{5.5.129}$$

que es la función generadora de tipo 1 para la transformación a las nuevas coordenadas canónicas cíclicas $(E, \alpha_\varphi, \alpha_z)$ y por tanto, cuyos momentos conjugados $(\beta_E, \beta_\varphi, \beta_z)$ son constantes, y dados por, con $F(r) \equiv 2mE - \alpha_z^2 - \left(\frac{1}{r}\alpha_\varphi - \frac{eB}{2c}r\right)^2$

$$\beta_E \equiv \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial R}{\partial E} - t = \int\frac{m}{\sqrt{F(r)}}\,dr - t \tag{5.5.130}$$

$$\beta_\varphi \equiv \frac{\partial S}{\partial\alpha_\varphi} = \varphi + \frac{\partial R}{\partial\alpha_\varphi} = \varphi - \int\frac{\frac{1}{r^2}\alpha_\varphi - \frac{eB}{2c}}{\sqrt{F(r)}}\,dr \tag{5.5.131}$$

$$\beta_z \equiv \frac{\partial S}{\partial\alpha_z} = z + \frac{\partial R}{\partial\alpha_z} = z - \alpha_z\int\frac{1}{\sqrt{F(r)}}\,dy \tag{5.5.132}$$

(b) Combinando las ecuaciones primera y tercera, encontramos la ley de movimiento en la dirección z, en la forma

$$z = \beta_z + \frac{\alpha_z}{m}(t + \beta_E) \tag{5.5.133}$$

quedando claro que α_z es el momento (constante) en la dirección del eje z, que $-\beta_E$ puede tomarse como el instante inicial, siendo entonces β_z la componente z de la posición inicial de la partícula. La ecuación de la órbita en el plano (x, y) es la solución a la cuadratura

$$\varphi - \beta_\varphi = \int \frac{\frac{1}{r^2}\alpha_\varphi - \frac{eB}{2c}}{\sqrt{2mE - \alpha_z^2 - \left(\frac{1}{r}\alpha_\varphi - \frac{eB}{2c}r\right)^2}}\, dr \tag{5.5.134}$$

y puede demostrarse de nuevo que es una circunferencia de radio

$$R = \frac{c}{eB}\sqrt{2mE - \alpha_z^2} \tag{5.5.135}$$

y centro O por determinar, y asimismo que la frecuencia de rotación en el plano es igual a la frecuencia ciclotrón.

5.6. Variables acción-ángulo

5.6.1. Introducción. Definiciones

Sistema conservativo periódico Analizamos en esta sección la descripción dinámica de los sistemas conservativos periódicos, definidos por

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \; H = \text{cte} \tag{5.6.1}$$

y

$$q(t + T) = q(t) \quad , \quad p(t + T) = p(t) \tag{5.6.2}$$

siendo T el denominado *periodo* del movimiento. Esta última condición indica que la trayectoria del sistema en el espacio de fases necesariamente es una curva cerrada, y además dicha curva se recorre una y otra vez, de forma indefinida.

Invariante integral Precisamente por ser cerrada la trayectoria del sistema, o de forma más matemática, por definir un *contorno*, digamos C, en el espacio de fases, nos interesará aplicar el concepto de *invariante integral*. En particular, el invariante integral K, que describimos posteriormente y en detalle en la sección 7.2, y definido en el espacio de fases extendido[1] por

$$K \equiv \oint_C (pdq - Hdt) \equiv \text{inv.} \tag{5.6.3}$$

siendo C un contorno arbitrario formado por trayectorias reales del sistema[2]. El término *invariante* indica que el valor de K es el mismo para todos los contornos C' en el espacio de fases que resultan de la evolución temporal desde el contorno inicial C. O de otra forma, si un conjunto de estados forman un contorno C en el espacio de fases, tras la evolución temporal del sistema formarán un contorno C' en cada instante de tiempo, y la integral anterior K tendrá en todo caso el mismo valor para C y C'.

[1] Véase la primera descripción de este espacio en la sección 3.4.1.

[2] La imagen más clara de lo que representa esta situación es la de un *tubo* de trayectorias en forma de cilindro eligiendo la dirección del parámetro temporal a lo largo del eje del cilindro. En este tubo un contorno será un trazo cerrado sobre la superficie del cilindro y alrededor de su eje. Y con estas características, por ejemplo un contorno que no sea perpendicular al eje temporal tendrá necesariamente trayectorias con distinta parametrización temporal, $dt \neq 0$.

Acción I Habiamos mencionado que queriamos utilizar un invariante integral en el propio espacio de fases, ya que ahí se sitúa la órbita periódica, y no en su versión extendida. La reducción es simple, ya que basta tomar el contorno arbitrario C de la trayectorias como la órbita periódica de una única trayectoria en el espacio de fases, que al ser única tiene evidentemente la misma parametrización temporal en todos sus puntos, esto es, se define para $dt \equiv 0$. Para esta órbita periódica en el espacio de fases, el invariante integral K se lee

$$K = \oint pdq \equiv I = \text{cte} \tag{5.6.4}$$

que no es más que la *acción* del sistema. Y ya que estamos tratando con una única trayectoria, el concepto de invariancia se reduce a un valor constante en todo instante de tiempo.
Coincide además que, aplicando el teorema de Stokes,

$$I \equiv \oint pdq = \int\int dpdq \tag{5.6.5}$$

y por tanto la variable de acción también está dada por el área limitada por la trayectoria periódica.

Variable de acción I. Variable de ángulo Hemos visto que la acción I para una trayectoria periódica es una constante del movimiento, distinta de la energía $H = E$. Podemos anticipar con ello que será de utilidad, para la descripción dinámica del sistema, aplicar la teoría de Hamilton−Jacobi y localizar la función generadora para la transformación canónica $(q, p) \to (Q, P \equiv I)$ con un valor constante del nuevo momento I[1]. Con este método, digamos *restringido*, de Hamilton−Jacobi la acción tiene el papel de variable canónica, y por ello se distingue con el nombre de *variable de acción*.
Y respecto a su coordenada canónica Q, veremos que por sus propiedades características podemos denominarla *variable de ángulo* (esto es, es un ángulo con propiedades de variable canónica). Y por todo ello, este método restringido para obtener la solución de un sistema conservativo periódico tiene la denominación específica de método de las *variables de acción−ángulo*.

5.6.2. Sistema unidimensional

En el caso de un sistema conservativo unidimensional, partimos del Hamiltoniano conservado

$$H(q, p) = E = \text{cte} \tag{5.6.6}$$

siendo E la energía del sistema en su sentido más amplio.

Variable de acción

La variable de acción I está dada, por definición, por

$$I \equiv \oint pdq \tag{5.6.7}$$

integrando sobre un ciclo de movimiento, y por tanto será función exclusiva de la energía E, al ser

$$H(q, p) = E \Rightarrow\ p = p(q, E) \Rightarrow\ I = \oint p(q, E)dq \equiv I(E) \tag{5.6.8}$$

[1] Aquí no podremos exigir que además la nueva coordenada Q sea también constante del movimiento, lo que sería equivalente a resolver directamente la ecuación de Hamilton−Jacobi. Esto no es posible puesto que $I \neq S \equiv \int(pdq - Hdt)$, siendo S la función principal de Hamilton, que sí da lugar a nuevas variables canónicas constantes.

Función generadora=Función característica W

Hasta ahora no hemos determinado cuál sería la función generadora para la transformación canónica a la variable de acción $(q,p) \to (Q,I)$, con Q indeterminado por ahora. Considerando, como es usual, una representación de tipo 2, $F_2 = F(q,I,t)$, dicha función generadora debe satisfacer

$$p \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_I \Rightarrow\ F = \int p dq \tag{5.6.9}$$

omitiendo un término dependiente de I, y por tanto, un término constante. Vemos así que la función generadora resulta ser la función característica W de Hamilton, ya que se satisface para la resolución de Hamilton−Jacobi

$$p \equiv \frac{\partial S}{\partial q} \equiv \frac{dW}{dq} \Rightarrow\ W = \int p dq \tag{5.6.10}$$

Kamiltoniano K

A diferencia del método de Hamilton−Jacobi donde la función W es una función auxiliar de la función principal S, que es la función generadora, en el método de las variables de acción−ángulo es la propia función W la responsable de la transformación canónica, y al ser independiente del tiempo, el nuevo Hamiltoniano, el *Kamiltoniano*, es directamente

$$K \equiv H + \cancelto{0}{\frac{\partial W}{\partial t}} = H \tag{5.6.11}$$

Expresión explícita de W

Para obtener la expresión de W, primero debemos obtener la expresión de la variable de acción, según el apartado anterior,

$$I = I(E) \tag{5.6.12}$$

para posteriormente aplicar una de las dos vías alternativas:

- Resolver la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo

$$H\left(q, \frac{dW}{dq}\right) = E \tag{5.6.13}$$

  y con ello eliminando la energía

$$W = W(q,E) \quad , \quad I = I(E) \Longrightarrow\ W = W(q,I) \tag{5.6.14}$$

- ó, determinar la expresión del momento a partir del Hamiltoniano

$$H(q,p) = E \Rightarrow\ p = p(q,E) \tag{5.6.15}$$

  eliminar la energía

$$p = p(q,E) \quad , \quad I = I(E) \Longrightarrow\ p = p(q,I) \tag{5.6.16}$$

  y finalmente integrando en q

$$W(q,I) = \int p(q,I) dq \tag{5.6.17}$$

Variable de ángulo

Por definición, la variable de ángulo, que denotaremos por φ, es la coordenada conjugada al momento I, y está dada por la ecuación de transformación

$$\varphi \equiv \frac{\partial W}{\partial I} \tag{5.6.18}$$

Lo podemos comprobar de forma directa, calculando el corchete de Poisson

$$[\varphi, I]_{q,p} \equiv \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)_p \left(\frac{\partial I}{\partial p}\right)_q - \left(\frac{\partial I}{\partial q}\right)_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)_q \tag{5.6.19}$$

Respecto a la variable de acción tenemos las derivadas

$$\frac{\partial I}{\partial q} = \frac{dI}{dH}\frac{\partial H}{\partial q} \equiv -\dot{p}\frac{dI}{dH} \tag{5.6.20}$$

ya que el Hamiltoniano (la energía) sólo depende de I y viceversa. Para la otra derivada tenemos igualmente

$$\frac{\partial I}{\partial p} = \frac{dI}{dH}\frac{\partial H}{\partial p} \equiv \dot{q}\frac{dI}{dH} \tag{5.6.21}$$

Con ello, el corchete de Poisson se reduce a

$$[\varphi, I]_{q,p} = \frac{dI}{dH}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\dot{p}\right) \equiv \frac{dI}{dH}\dot{\varphi} \tag{5.6.22}$$

Finalmente la derivada temporal $\dot{\varphi}$ está dada por la ecuación de Hamilton correspondiente para el nuevo Hamiltoniano, siendo $K \equiv H$ ya que la función generadora no depende explícitamente del tiempo, y obtenemos el resultado esperado

$$\dot{\varphi} \equiv \frac{\partial K}{\partial I} \equiv \frac{\partial H}{\partial I} \equiv \frac{dH}{dI} \Rightarrow [\varphi, I]_{q,p} = \frac{dI}{dH}\frac{dH}{dI} = 1 \tag{5.6.23}$$

Variable de ángulo. Frecuencia del movimiento

Queda por demostrar por qué se denomina variable de ángulo φ. Esto queda claro si analizamos su variación a lo largo de un ciclo del movimiento periódico, variación definida en la forma

$$\Delta\varphi \equiv \oint d\varphi \equiv \oint \dot{\varphi} dt \equiv \oint \frac{\partial \varphi}{\partial q} dq \tag{5.6.24}$$

Utilizando en primer lugar la última expresión, vemos que, utilizando la función característica,

$$\Delta\varphi = \oint \frac{\partial \varphi}{\partial q} dq \equiv \oint \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial W}{\partial I}\right) dq \tag{5.6.25}$$

Al ser, por definición, q e I variables independientes, podemos conmutar las derivadas parciales en el integrando con el resultado

$$\Delta\varphi = \oint \frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right) dq \equiv \frac{\partial}{\partial I}\oint \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right) dq = \frac{\partial}{\partial I}\oint p dq \equiv \frac{dI}{dI} = 1 \tag{5.6.26}$$

Esto es, φ varía en una cantidad constante 1 tras cada ciclo, que sería equivalente a una variación 2π si hubieramos redefinido la variable de acción en la forma[1]

$$I \equiv \frac{1}{2\pi}\oint p dq \tag{5.6.27}$$

[1] Este factor $1/(2\pi)$ no es físicamente relevante, ya que sólo nos servirá para identificar de una manera más o menos directa a la variable de ángulo y a su frecuencia respectiva. Una vez elegido el factor en la variable I deben explicarse, en función de ello, los resultados obtenidos.

Para obtener la frecuencia del movimiento períodico, debemos integrar la ecuación de movimiento para φ

$$\dot{\varphi} = \frac{dH}{dI} \equiv \nu(I) \Rightarrow \ \varphi = \varphi_0 + \nu(I)t \tag{5.6.28}$$

y verificamos por tanto que esta cantidad $\nu(I)$, así definida, resulta ser

$$\varphi = \varphi_0 + \nu(I)t \Longrightarrow \ \Delta\varphi = \nu(I)\Delta t \equiv 1 \tag{5.6.29}$$

Sabiendo que Δt es la variación en el tiempo tras un ciclo, esto es, $\Delta t \equiv T$, siendo T el periodo del movimiento, deducimos que

$$\nu(I) \equiv \frac{1}{T} \equiv \nu \tag{5.6.30}$$

esto es, $\nu(I)$ es la frecuencia del movimiento periódico[1].

Ejemplo. Oscilador armónico

Como punto final a este apartado, y como referencia, detallamos las expresiones obtenidas en el caso del oscilador armónico unidimensional de frecuencia ω:

- **Hamiltoniano y momento**

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \Rightarrow \ p = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \tag{5.6.32}$$

- **Variable de acción**

$$I \equiv \oint pdq = \oint \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \equiv \int\int dpdp \equiv \text{Área de la elipse} \equiv \pi ab \tag{5.6.33}$$

siendo a, b los semiejes de la elipse en el espacio de fases

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \Rightarrow \ \frac{q^2}{2E/m\omega^2} + \frac{p^2}{2mE} = 1 \tag{5.6.34}$$

Identificando a, b en esta expresión, obtenemos el resultado

$$I = \frac{2\pi E}{\omega} \equiv \frac{E}{\nu} \tag{5.6.35}$$

- **Frecuencia del movimiento**

$$\nu(I) \equiv \frac{dE}{dI} = \nu = \frac{\omega}{2\pi} \equiv \frac{1}{T} \tag{5.6.36}$$

- **Función generadora**

$$p \equiv \frac{\partial W}{\partial q} \Rightarrow \ W(q, I) = \int \sqrt{\frac{m\omega}{\pi} I - m^2\omega^2 q^2}\, dq \tag{5.6.37}$$

- **Solución a la ecuación del movimiento**

  - Variables de acción−ángulo

$$I = 2\pi\frac{E}{\omega} \quad , \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \frac{\omega}{2\pi}t \tag{5.6.38}$$

[1] Si hubieramos redefinido la variable de accion con el factor $1/(2\pi)$ este resultado se leería

$$\nu(I) \equiv \frac{2\pi}{T} \equiv 2\pi\nu \equiv \omega \tag{5.6.31}$$

que correspondería a la frecuencia angular del movimiento.

- Ley del movimiento para q, p

$$\varphi = \frac{\partial W}{\partial I} = m\frac{\omega}{2\pi}\int \frac{dq}{\sqrt{\frac{m\omega}{\pi}I - m^2\omega^2 q^2}} \Rightarrow\ q(t) = \sqrt{\frac{I}{\pi m\omega}}\,\mathrm{sen}\,(2\pi\varphi(t)) \quad (5.6.39)$$

$$p(t) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi}I - m^2\omega^2 q(t)^2} \Rightarrow\ p(t) = \sqrt{\frac{m\omega I}{\pi}}\cos(2\pi\varphi(t)) \quad (5.6.40)$$

5.6.3. Sistemas multiperiódicos

Definiciones generales Un sistema conservativo *multiperiódico* ó multiplemente periódico es un sistema conservativo que muestra periodicidad en cada uno de los pares (q_i, p_i) de sus variables canónicas. Tendrá por tanto un Hamiltoniano conservado, que podemos identificar con la relación funcional

$$H \equiv H(I_1, .., I_n) \quad (5.6.41)$$

siendo $I_1, .., I_n$ las acciones correspondientes en cada uno de los planos $(q_i - p_i$ del espacio de fases, y siendo n el número de grados de libertad del sistema.

Función característica W Dada la independencia entre sí de los movimientos del sistema sobre cada eje coordenado, la función generadora estará dada por la suma de las n contribuciones, cada una de ellas dependiente de su coordenada y de su acción correspondiente

$$W(q, I) \equiv W_1(q_1, I_1) + .. + W_n(q_n, I_n) \quad (5.6.42)$$

Variables de acción−ángulo Estas variables de acción están definidas por las integrales de contorno

$$I_i \equiv \oint_{C_i} p_i dq_i \quad (5.6.43)$$

siendo C_i la proyección de la trayectoria sobre dicho plano, que por definición resultará ser una trayectoria periódica.
Respecto a las variables de ángulo, tenemos la solución individual

$$\varphi_i \equiv \frac{\partial W}{\partial I_i} \equiv \frac{\partial W_i}{\partial I_i} = \nu_i(I_i)t + \varphi_{i,0} \quad (5.6.44)$$

donde las frecuencias del movimiento sobre cada dirección coordenada están dadas por

$$\nu_i(I_i) \equiv \frac{\partial H}{\partial I_i} \quad (5.6.45)$$

Características del movimiento En general, el movimiento del sistema estará dada por una suma con coeficientes arbitrarios de los movimientos correspondientes a cada plano del espacio de fases. Tendremos en particular dos características importantes:

- Cuando las K frecuencias *activas* del movimiento (esto es, las frecuencias de los movimientos individuales que forman parte del movimiento general dado) sean conmensurables, esto es, cuando se den las relaciones

$$n_1\nu_1 = n_2\nu_2 = ... = n_K\nu_K \quad (5.6.46)$$

  para un conjunto de números enteros positivos n_i, entonces el sistema en su totalidad realizará un movimiento periódico, con un período igual al correspondiente al valor máximo, digamos que es n_1, de los enteros n_i, en cuyo caso tenemos, $T \equiv T_1 \equiv 1/\nu_1$.

- Existirá *degeneración* del sistema, cuando existan frecuencias ν_i con el mismo valor. Si todas las frecuencias son iguales la degeneración del sistema será completa. Este atributo de *degeneración* del sistema trata de reflejar una cierta indistinguibilidad entre sí de los movimientos que tienen la misma frecuencia.

5.7. Ejercicios resueltos

5.7.1. Partícula en pozo de potencial

Una partícula de masa m se mueve en una dimensión en el pozo de potencial

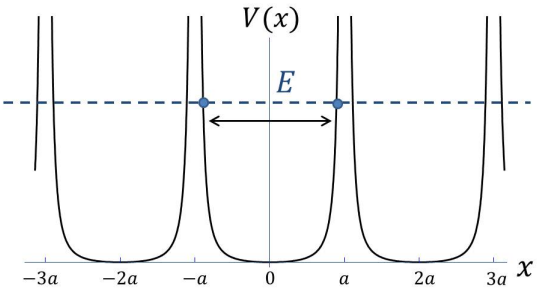
$$V = V_0 \tan^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \tag{5.7.1}$$

donde a y V_0 son constantes positivas, cuya gráfica se representa en la figura. Aunque el potencial es periódico, sólo en necesario considerar el intervalo $-a \leq x \leq a$.

(a) Determine la variable de acción I para el movimiento oscilatorio de la partícula.

(b) Obtenga el Hamiltoniano en función de la variable de acción, y determine la frecuencia de oscilación del movimiento.

(c) Evalúe cuál es la frecuencia del movimiento en los límites de altas y bajas energías, $E \ll V_0$ y $E \gg V_0$, e interprete físicamente los resultados, detallando todos los pasos.



(a) Como se indica en la figura, la partícula en su movimiento oscilará entre los dos límites $x = \pm A$, definiendo A como la amplitud del movimiento que satisface la relación de energía (en el punto de retroceso toda la energía es potencial)

$$E = V(\pm A) \rightarrow A = \frac{2a}{\pi} \arctan\sqrt{\frac{E}{V_0}} \tag{5.7.2}$$

La variable de acción para este movimiento oscilatorio está dada por la integral en un ciclo

$$I = \oint p dq = 2\int_{-A}^{A} p(x)\, dx = 4\int_{0}^{A} p(x)\, dx \tag{5.7.3}$$

siendo $p(x)$ el momento de la partícula, dado por

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \rightarrow p(x) = \sqrt{2mE - 2mV_0 \tan^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right)} \tag{5.7.4}$$

De los dos signos posibles al tomar la raíz, hemos elegido el signo positivo para p, puesto sólo es necesario evaluar el movimiento en dirección del eje x positivo, desde A hasta $-A$, haciendo uso de que $p(x)$ es una función par en x.

Para calcular la integral, hacemos primero uso del cambio de variable $\theta = \pi x/(2a)$, reorganizando

la expresión de la acción en la forma

$$I = \frac{8a}{\pi}\sqrt{2mV_0}\int_0^{\arctan\sqrt{E/V_0}}\sqrt{E/V_0 - \tan^2\theta}d\theta \tag{5.7.5}$$

Desarrollamos ahora el integrando como la resta de los términos

$$\sqrt{E/V_0 - \tan^2\theta}d\theta \equiv \frac{\left(E/V_0 - \tan^2\theta\right)d\theta}{\sqrt{E/V_0 - \tan^2\theta}} = \frac{E/V_0 d\theta}{\sqrt{E/V_0 - \tan^2\theta}} - \frac{\tan^2\theta d\theta}{\sqrt{E/V_0 - \tan^2\theta}} \tag{5.7.6}$$

que da lugar una expresión diferencial, que ya es directamente integrable:

$$\sqrt{E/V_0 - \tan^2\theta}d\theta = \frac{\sqrt{1+E/V_0}d\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{E/\left(E+V_0\right) - \mathrm{sen}^2\,\theta}} - \frac{d\tan\theta}{\sqrt{E/V_0 - \tan^2\theta}} \tag{5.7.7}$$

Integrando entonces utilizando la fórmula general

$$\int\frac{df}{\sqrt{\alpha - f^2}} = \arctan\left[\frac{f}{\sqrt{\alpha - f^2}}\right] \tag{5.7.8}$$

aplicada a los diferenciales $df = d\,\mathrm{sen}\,\theta$ y $df = d\tan\theta$, respectivamente, la variable de acción tiene la expresión

$$I = \frac{8a\sqrt{2mV_0}}{\pi}\cdot \left(\begin{array}{c}\sqrt{1+E/V_0}\arctan\left[\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{E/(E+V_0) - \mathrm{sen}^2\,\theta}}\right] \\ -\arctan\left[\frac{\tan\theta}{\sqrt{E/V_0 - \tan^2\theta}}\right]\end{array}\right)\Bigg|_{\mathrm{sen}\,\theta=0,\tan\theta=0}^{\mathrm{sen}\,\theta=\sqrt{E/(E+V_0)},\ \tan\theta=\sqrt{E/V_0}} \tag{5.7.9}$$

evaluada en los puntos del movimiento $x = A$ y $x = 0$. Con esto, llegamos a la expresión solicitada

$$I = \frac{8a\sqrt{2mV_0}}{\pi}\left(\sqrt{(1+E/V_0)}\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 4a\sqrt{2m}\left(\sqrt{E+V_0} - \sqrt{V_0}\right) \tag{5.7.10}$$

(b) El Hamiltoniano coincide con el valor de la energía del sistema. Por tanto, para determinar la frecuencia ν de oscilación deducimos en primer lugar el valor de la energía en función de la acción I, en la forma

$$E = \left(\frac{I}{4a\sqrt{2m}} + \sqrt{V_0}\right)^2 - V_0 \tag{5.7.11}$$

Y de aquí, directamente de su definición obtenemos el valor de la frecuencia del movimiento

$$\nu = \frac{\partial E}{\partial I} = 2\frac{1}{4a\sqrt{2m}}\left(\frac{I}{4a\sqrt{2m}} + \sqrt{V_0}\right) = \frac{I}{16ma^2} + \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{V_0}{2m}} \tag{5.7.12}$$

(c) Determinamos por tanto el valor en los dos límites $E \ll V_0$ y $E \gg V_0$.

• En el primer caso, cuando la energía es muy pequeña respecto a V_0, podemos ver que la amplitud del movimiento es mucho menor que la longitud a,

$$A = \frac{2\sqrt{E}}{\pi\sqrt{V_0}}a \ll a \tag{5.7.13}$$

donde hemos utilizado la aproximación $\tan\alpha = \alpha$, para $\alpha \ll 1$. Por tanto, el movimiento se restringe a un entorno suficientemente pequeño del origen, $|x| \ll a$. En este entorno, donde se sitúa su mínimo $V(0) = 0$, el potencial $V(x)$ tiene un comportamiento de tipo armónico, dado que

$$V(x) \simeq V(0) + x \cdot V'(0) + \frac{1}{2}x^2 \cdot V''(0) = \frac{\pi^2 V_0}{4a^2}x^2 \equiv \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \tag{5.7.14}$$

con la frecuencia natural

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 V_0}{2ma^2}} \equiv 2\pi\nu \tag{5.7.15}$$

Este resultado también se deduce directamente de la aproximación a bajas energías para la variable de acción

$$I = 4a\sqrt{2mV_0}\left(\sqrt{1+\frac{E}{V_0}} - 1\right) \simeq \sqrt{\frac{8ma^2}{V_0}}E \tag{5.7.16}$$

con lo que la frecuencia del movimiento asociada efectivamente es

$$\nu = \frac{\partial E}{\partial I} = \sqrt{\frac{V_0}{8ma^2}} = \frac{\omega_0}{2\pi} \tag{5.7.17}$$

• Para altas energías, cuando $E \gg V_0$, el potencial se aproxima a un pozo cuadrado infinito de potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \texttt{si}|x| < a \\ \\ +\infty & \texttt{si}|x| = a \end{cases} \tag{5.7.18}$$

dado que los puntos de retorno se sitúan en los puntos singulares $x = \pm a$:

$$A = \frac{2a}{\pi}\arctan\infty = \frac{2a}{\pi}\frac{\pi}{2} = a \tag{5.7.19}$$

La variable de acción tiene en este límite el valor

$$I \simeq 4a\sqrt{2mE} \tag{5.7.20}$$

y la frecuencia del movimiento es

$$\nu = \frac{\partial E}{\partial I} = \sqrt{\frac{E}{8ma^2}} \tag{5.7.21}$$

Los valores obtenidos para la acción y la frecuencia en esta aproximación resultan independientes de V_0, y son los que corresponden a una partícula libre en una dimensión que colisiona elásticamente con dos paredes impenetrables situadas en $x = \pm a$, como podemos verificar de forma independiente

$$p = \pm\sqrt{2mE} \rightarrow I = \oint p dx = 4a\sqrt{2mE} \tag{5.7.22}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{4a} = \frac{p}{4ma} = \sqrt{\frac{2mE}{16m^2a^2}} = \sqrt{\frac{E}{8ma^2}} \tag{5.7.23}$$

siendo T el período del movimiento de la partícula.

5.7.2. Oscilador anisótropo bidimensional

Una partícula de masa m se mueve en dos dimensiones (x, y) en presencia del potencial de oscilador armónico anisótropo

$$V = \frac{1}{2}m\omega_1^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_2^2 y^2 \tag{5.7.24}$$

siendo $\omega_1 \neq \omega_2$.

(a) Determine las variables de acción (I_x, I_y), y escriba el Hamiltoniano en función de ellas. Para ello, deberá resolver primero la ecuación de Hamilton−Jacobi para la función característica por el método de separación de variables.

(b) Determine las variables de ángulo (φ_x, φ_y) del sistema y encuentre la expresión funcional de las coordenadas del sistema, (x, y) en términos de las variables acción−ángulo.

(c) Determine entonces la ley de movimiento del sistema. Para ello utilice las ecuaciones de Hamilton para las nuevas variables canónicas de acción−ángulo.

(d) Finalmente, a partir del resultado del apartado anterior, describa la trayectoria de la partícula tanto en el espacio físico (x, y) como en el espacio de las nuevas coordenadas canónicas, las variables ángulo (φ_x, φ_y).

(a) La ecuación de Hamilton−Jacobi para la función característica, definida por

$$H\left(x, y, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}\right) = E \tag{5.7.25}$$

tiene la expresión explícita

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_1^2 x^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_2^2 y^2 = E \tag{5.7.26}$$

y admite la solución totalmente separable

$$W(x, y; \alpha_x, \alpha_y) = \int \sqrt{2m\alpha_x - m^2\omega_1^2 x^2}\,dx + \int \sqrt{2m\alpha_y - m^2\omega_2^2 y^2}\,dy \tag{5.7.27}$$

donde $\alpha_x + \alpha_y = E$.
Una vez resuelta la ecuación de Hamilton−Jacobi, para obtener las variables de acción, necesitamos utilizar los momentos p_x, p_y canónicos, cuya definición depende de la función característica, en la forma

$$p_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{2m\alpha_x - m^2\omega_1^2 x^2} \quad , \quad p_y = \frac{\partial W}{\partial y} = \sqrt{2m\alpha_y - m^2\omega_2^2 y^2} \tag{5.7.28}$$

y necesitamos también conocer los puntos de retroceso en cada uno de los ejes (x, y), que están dados por la condición $p_x = 0$, $p_y = 0$, con el resultado

$$2m\alpha_x = m^2\omega_1^2 A_x^2 \rightarrow A_x = \sqrt{\frac{2\alpha_x}{m\omega_1^2}} \quad , \quad A_y = \sqrt{\frac{2\alpha_y}{m\omega_2^2}} \tag{5.7.29}$$

Con estos resultados, ya podemos calcular las dos variables de acción del sistema, (I_x, I_y), y dado que el movimiento sobre cada eje es independiente y se corresponde con un oscilador armónico, el resultado es el conocido (e igual el área de la elipse en el espacio de fases)

$$I_x = \oint p(x)\,dx = \pi ab = \pi\sqrt{2m\alpha_x}\sqrt{\frac{2\alpha_x}{m\omega_1^2}} = 2\pi\frac{\alpha_x}{\omega_1} \quad , \quad I_y = 2\pi\frac{\alpha_y}{\omega_2} \tag{5.7.30}$$

Y como indica el enunciado, con la inversión de estas expresiones deducimos el valor de la energía en función de las variables de acción

$$E = \alpha_x + \alpha_y = \frac{I_x\omega_1}{2\pi} + \frac{I_y\omega_2}{2\pi} = I_x\nu_1 + I_y\nu_2 \tag{5.7.31}$$

y también la expresión general de la función característica W en términos de las variables de acción, necesaria si queremos conocer las variables de ángulo del sistema,

$$W\left(x,y;I_x,I_y\right) = \int \sqrt{2mI_x\nu_1 - m^2\omega_1^2x^2}dx + \int \sqrt{2mI_y\nu_2 - m^2\omega_2^2y^2}dy \tag{5.7.32}$$

(b) Las variables de ángulo (φ_x,φ_y) son las variables conjugadas a las variables de acción, bajo la transformación canónica generada por la función característica W, y por tanto, están dadas por la expresión integral

$$\varphi_x \equiv \frac{\partial W}{\partial I_x} = m\nu_1\int \frac{1}{\sqrt{2mI_x\nu_1 - m^2\omega_1^2x^2}}dx = \frac{1}{2\pi}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{I_x}{\pi m\omega_1} - x^2}}dx \tag{5.7.33}$$

con la solución, tras esta integración directa en las coordenadas,

$$\varphi_x = \frac{1}{2\pi}\text{arcsen}\frac{x}{\sqrt{\frac{I_x}{\pi m\omega_1}}} \tag{5.7.34}$$

con una fórmula análoga para la variable de ángulo φ_y. Invirtiendo esta ecuación, encontramos la relación entre la coordenada x, y las variable de acción-ángulo (y análogamente para el movimiento en el eje y)

$$x = \sqrt{\frac{I_x}{\pi m\omega_1}}\,\text{sen}\left(2\pi\varphi_x\right) \quad , \quad y = \sqrt{\frac{I_y}{\pi m\omega_2}}\,\text{sen}\left(2\pi\varphi_y\right) \tag{5.7.35}$$

(c) Para hallar la ley de movimiento $x\left(t\right), y(t)$ basta introducir la dependencia temporal de las variables ángulo en las ecuaciones anteriores. Dado que la variable acción es un invariante, y por tanto constante del movimiento, la única dependencia en t es la que proviene de $\varphi_x\left(t\right), \varphi_y\left(t\right)$. Haciendo uso de las ecuaciones de movimiento de Hamilton para las variables ángulo, encontramos

$$\frac{d\varphi_x}{dt} = \frac{\partial E}{\partial I_x} = \nu_1 \rightarrow \varphi_x = \nu_1 t + \varphi_{0x} \quad , \quad \varphi_y = \nu_2 t + \varphi_{0y} \tag{5.7.36}$$

y con esto, deducimos que la ley general de movimiento de la partícula en este potencial anisótropo puede describirse mediante las proyecciones sobre los ejes coordenados

$$x(t) = \sqrt{\frac{I_x}{\pi m\omega_1}}\,\text{sen}\left(\omega_1 t + 2\pi\varphi_{0x}\right) \quad , \quad y(t) = \sqrt{\frac{I_y}{\pi m\omega_2}}\,\text{sen}\left(\omega_2 t + 2\pi\varphi_{0y}\right) \tag{5.7.37}$$

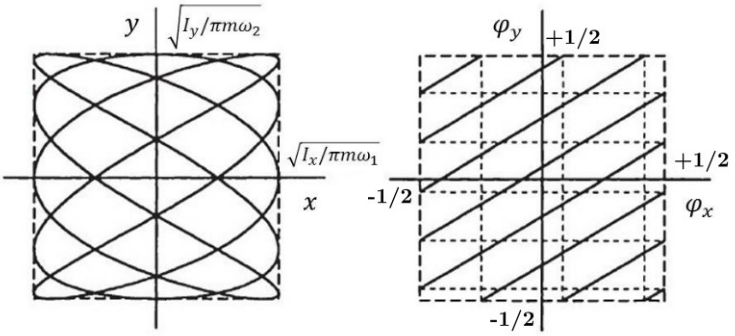
(d) Para determinar la trayectoria en el espacio físico (x,y), debemos eliminar el tiempo en las ecuaciones anteriores. En general, las oscilaciones bidimensionales no tienen por qué poseer las mismas frecuencias angulares en los movimientos según los ejes x,y, lo que indica la existencia de una cierta anisotropía espacial. La solución general sería en este caso

$$x = A\,\text{sen}\left(\omega_1 t + \beta\right) \quad , \quad y = B\,\text{sen}\left(\omega_2 t + \gamma\right) \tag{5.7.38}$$

y la trayectoria no será en general una elipse, sino una de las denominadas *figuras de Lissajous*, que detallamos a continuación:

- Estas curvas serán cerradas si el movimiento se repite a intervalos regulares de tiempo, lo cual sólo es posible si las frecuencias son conmensurables entre sí, es decir, cuando el cociente ω_1/ω_2 sea una fracción racional. En caso de que no sea una fracción racional, la trayectoria será abierta, que pasará por cualquier punto del rectángulo de lados A, B. Es decir, la curva llena todo el espacio interior a este rectángulo.

- Como ejemplo consideremos el caso $A = B = 1$. Algunas figuras de Lissajous y su dirección de recorrido se representan en las siguiente gráfica en su lado izquierdo, para el caso $3\omega_1 = 5\omega_2$, y para un valor nulo del desfase inicial del movimiento, $\delta \equiv \beta - \gamma = 0$. Se observa una trayectoria periódica que se cierra tras cinco ciclos en x, y tres ciclos en y. El número de ciclos puede verse como el número de cortes de la trayectoria con los ejes coordenados (son los puntos de retorno) en los bordes del rectángulo.



- Por otro lado, las trayectorias en el espacio de las variables de ángulo (φ_x, φ_y), viendo su ley de movimiento y eliminando el tiempo, son simplemente las líneas rectas

$$\varphi_y = \nu_2 t + \varphi_{0y} = \frac{\nu_2}{\nu_1}\varphi_x + \varphi_{0y} - \frac{\nu_2}{\nu_1}\varphi_{0x} \tag{5.7.39}$$

en el intervalo $-1/2 \leq \varphi_x, \varphi_y \leq 1/2$, según muestra la gráfica, en su lado derecho. Las líneas de trazo discontinuo marcan el salto en 1 que debe hacerse en la variable ángulo correspondiente cuando la trayectoria sale del intervalo cuadrado $-1/2 \leq \varphi_x, \varphi_y \leq 1/2$. Para entender este salto *unidad* vemos que al terminar un periodo de oscilación sobre un determinado eje, digamos x, la variable de ángulo cambia en la cantidad

$$\varphi = \nu t + \varphi_0 \longrightarrow \Delta\varphi \equiv \nu\Delta t \equiv \nu T = 1 \tag{5.7.40}$$

siendo T el periodo de oscilación sobre dicho eje. Como hemos indicado este periodo es la duración temporal representada en la gráfica por los dos puntos de corte sucesivos con los bordes del cuadrado, en la dirección del eje correspondiente.

5.7.3. Pozo infinito bidimensional

Una partícula de masa m se mueve en dos dimensiones en un pozo de potencial infinito rectangular en la forma

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x \leq a \ , \ 0 \leq y \leq b \\ \infty & , \qquad \text{de otra forma} \end{cases} \tag{5.7.41}$$

(a) Determine las variables de acción (I_x, I_y), y escriba el Hamiltoniano en función de ellas. Para ello, deberá resolver primero la ecuación de Hamilton−Jacobi para la función característica por el método de separación de variables.

(b) Determine las frecuencias del movimiento del sistema, y deduzca la condición que debe darse para que el movimiento de la partícula sea periódico en el espacio físico (x, y).

(a) En la región accesible del espacio, el rectángulo $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$, dado que el potencial es constante, el Hamiltoniano corresponde a una partícula libre, esto es,

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) \tag{5.7.42}$$

y la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica se escribe

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right) = E \tag{5.7.43}$$

y tiene la solución directa totalmente separable

$$W = \pm\alpha_x x \pm \alpha_y y \tag{5.7.44}$$

al ser x, y coordenadas cíclicas, siendo $\pm\alpha_x, \pm\alpha_y$ los momentos canónicos, cuyo signo se corresponde con cada sentido del movimiento, tras las sucesivas colisiones con la frontera del potencial.
Estas constantes satisfacen además la condición de la energía

$$E = \frac{1}{2m}\left(\alpha_x^2 + \alpha_y^2\right) \equiv H \tag{5.7.45}$$

Las variables de acción (I_x, I_y), por su parte, están dadas por las integrales sobre el movimiento periódico en cada uno de los ejes

$$I_x = \oint p_x dx = \int_0^a \alpha_x dx + \int_a^0 (-\alpha_x)\, dx = 2a\alpha_x \tag{5.7.46}$$

$$I_y = \oint p_y dy = \int_0^b \alpha_y dy + \int_b^0 (-\alpha_y)\, dy = 2b\alpha_y \tag{5.7.47}$$

Con ayuda de estas definiciones, podemos obtener finalmente la energía en función de las variables de acción en la forma

$$E = \frac{1}{8m}\left(\frac{I_x^2}{a^2} + \frac{I_y^2}{b^2}\right) \tag{5.7.48}$$

(b) Las frecuencias asociadas a los dos grados de libertad son directamente, por definición

$$\nu_x \equiv \frac{\partial E}{\partial I_x} = \frac{I_x}{4ma^2} \quad , \quad \nu_y \equiv \frac{\partial E}{\partial I_y} = \frac{I_y}{4mb^2} \tag{5.7.49}$$

Estos valores coinciden obviamente con los valores $\nu = 1/T$, donde T es el periodo del movimiento en la dirección dada. Por ejemplo, para la coordenada x, tenemos en función de la velocidad v_x de la partícula en esa dirección

$$T_x = \frac{2a}{v_x} = \frac{2ma}{\alpha_x} = \frac{4ma^2}{I_x} = \frac{1}{\nu_x} \tag{5.7.50}$$

La trayectoria de la partícula será periódica cuando las frecuencias sean conmensurables, esto es, $n_x\nu_y = n_y\nu_x$, con n_x, n_y números enteros. Para estos valores, la partícula vuelve a su posición inicial transcurrido el tiempo $t = n_x/\nu_x = n_x T_x = n_y T_y$, esto es, después de n_x ciclos en x y n_y ciclos en y.

5.7.4. Oscilador isótropo tridimensional en coordenadas cartesianas

Una partícula de masa m se mueve en presencia de un potencial tridimensional isótropo del oscilador armónico

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2+z^2\right) \tag{5.7.51}$$

(a) Resuelva la ecuación de Hamilton−Jacobi en coordenadas cartesianas (x, y, z) por el método de separación de variables, determine las variables de acción, y exprese el Hamiltoniano en función de éstas.

(b) Determine las frecuencias del movimiento del sistema, y deduzca cuál es la condición que debe darse para que el movimiento de la partícula sea periódico.

(a) El Hamiltoniano para el oscilador iśotropo es

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2+z^2\right) \tag{5.7.52}$$

y la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica se escribe en coordenadas cartesianas

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2+z^2\right) = E \tag{5.7.53}$$

y tiene la solución conocida, totalmente separable en estas coordenadas

$$W = \int p_x dx + \int p_y dy + \int p_z dz \tag{5.7.54}$$

en función de los momentos canónicos, definidos por

$$p_i = \sqrt{2m\alpha_i - m^2\omega^2 x_i^2} \tag{5.7.55}$$

Aquí, el signo en la integral debe elegirse en función del sentido del movimiento, tras las sucesivos retrocesos en los puntos de retorno x_{ir}, que satisfacen $2m\alpha_i = m^2\omega^2 x_{ir}^2$. Las constantes de separación α_i satisfacen además la condición de la energía

$$E = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z \tag{5.7.56}$$

y corresponden por tanto a la energía total del movimiento oscilatorio para cada grado de libertad.

Además, las variables de acción (I_x, I_y, I_z) están dadas por las integrales sobre el movimiento periódico en cada uno de los ejes

$$I_x = 2\int_{-x_r}^{x_r}\sqrt{2m\alpha_x - m^2\omega^2x^2}dx = 2\pi\frac{\alpha_x}{\omega} \tag{5.7.57}$$

$$I_y = 2\pi\frac{\alpha_y}{\omega} \quad , \quad I_z = 2\pi\frac{\alpha_z}{\omega} \tag{5.7.58}$$

Finalmente, con ayuda de estas definiciones, podemos obtener la energía en función de las variables de acción en la forma

$$E = \frac{\omega}{2\pi}\left(I_x+I_y+I_z\right) \tag{5.7.59}$$

(b) Por isotropía, las frecuencias asociadas a los tres grados de libertad son idénticas entre sí

$$\nu_x = \frac{\partial E}{\partial I_x} = \frac{\omega}{2\pi} \quad , \quad \nu_y = \nu_z = \frac{\omega}{2\pi} \tag{5.7.60}$$

y estos valores coinciden obviamente con los valores $\nu \equiv 1/T$, donde T es el periodo del movimiento en la dirección dada, $T \equiv 2\pi/\omega$. Dada esta degeneración en las frecuencias, la trayectoria de la partícula siempre será periódica.

5.7.5. Oscilador isótropo tridimensional en coordenadas cilíndricas

Considere de nuevo el ejercicio anterior para una partícula de masa m que se mueve en presencia de un potencial tridimensional isótropo del oscilador armónico, analizando ahora el sistema en las coordenadas cilíndricas, de forma que el potencial tiene la expresión equivalente

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2+z^2\right) \equiv \frac{1}{2}m\omega^2\left(\rho^2+z^2\right) \tag{5.7.61}$$

(a) Resuelva la ecuación de Hamilton−Jacobi en coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) por el método de separación de variables.

(b) Determine las variables de acción, y exprese el Hamiltoniano en función de éstas.

(c) Determine las frecuencias del movimiento del sistema. Compare con el resultado obtenido en el ejercicio anterior para las coordenadas cartesianas. Interprete físicamente la diferencia.

(a) El Hamiltoniano en coordenadas cilíndricas es

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}p_\varphi^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\rho^2+z^2\right) \tag{5.7.62}$$

y la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica se escribe

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\rho^2+z^2\right) = E \tag{5.7.63}$$

Dado que la coordenada φ es cíclica, buscamos una solución separable en la forma

$$W = R(\rho) + Z(z) + \alpha_\varphi \varphi \tag{5.7.64}$$

donde el momento conjugado α_φ es la componente z del momento angular, $\alpha_\varphi = L_z$. De esta forma, la ecuación para la función característica se reduce a

$$\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{dR}{d\rho}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2\right) + \left(\frac{1}{2m}\left(\frac{dz}{dz}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2\right) = E \tag{5.7.65}$$

El primer término de la izquierda es función sólo de ρ, mientras que el segundo término es función sólo de z, y su suma es la constante E. Por tanto, necesariamente cada término debe ser igual a una constante, y obtenemos la separación del movimiento en el plano con coordenadas (ρ, φ) y el movimiento axial, en la dirección del eje z, en la forma $E = E_\rho + E_z$. Se satisface entonces

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dR}{d\rho}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 = E_\rho \tag{5.7.66}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dz}{dz}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 = E_z \tag{5.7.67}$$

De esta forma las variables quedan completamente separadas, y podemos obtener los momentos canónicos en la forma

$$p_\rho = \frac{\partial W}{\partial \rho} = \frac{dR}{d\rho} = \sqrt{2mE_\rho - m^2\omega^2\rho^2 - \frac{L_z^2}{\rho^2}} \tag{5.7.68}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = L_z \tag{5.7.69}$$

$$p_z = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{dz}{dz} = \sqrt{2mE_z - m^2\omega^2 z^2} \tag{5.7.70}$$

(b) En su caso, las variables de acción (I_ρ, I_φ, I_z) están dadas por las integrales sobre el movimiento periódico en cada uno de los grados de libertad. La segunda de ellas tiene el resultado directo, dado que la coordenada angular es cíclica,

$$I_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = 2\pi |L_z| \tag{5.7.71}$$

Podemos tomar aquí directamente el valor absoluto de L_z asumiendo que el ángulo φ se define de tal forma que recorre en el sentido marcado por la componente z (tomada positiva) del momento angular de la partícula.

Por otro lado, I_z corresponde a un oscilador armónico en z, y su resultado ya es conocido

$$I_z = \oint p_z dz = \frac{2\pi E_z}{\omega} \tag{5.7.72}$$

Finalmente para la coordenada radial, el cálculo de su variable de acción asociada es más complicado. Partiendo de su definición

$$I_\rho = \oint p_\rho d\rho = 2\int_{\rho_-}^{\rho_+} \sqrt{2mE_\rho - m^2\omega^2\rho^2 - \frac{L_z^2}{\rho^2}}\, d\rho \tag{5.7.73}$$

donde ρ_+, ρ_- son los valores máximo y mínimo de la coordenada radial, soluciones de la ecuación

$$p_\rho = 0 \to 2mE_\rho = m^2\omega^2\rho_\pm^2 + \frac{L_z^2}{\rho_\pm^2} \tag{5.7.74}$$

realizamos la siguiente división del integrando como suma de los tres términos

$$p_\rho \equiv \frac{1}{p_\rho}\left(2mE_\rho - m^2\omega^2\rho^2 - \frac{L_z^2}{\rho^2}\right) = \frac{mE_\rho - m^2\omega^2\rho^2}{p_\rho} + \frac{mE_\rho}{p_\rho} - \frac{L_z^2}{\rho^2}\frac{1}{p_\rho} \tag{5.7.75}$$

Con esto, la integración del primer término es directa al ser

$$\frac{mE_\rho - m^2\omega^2\rho^2}{p_\rho} = \frac{d\left(\rho p_\rho\right)}{d\rho} \tag{5.7.76}$$

y por tanto,

$$\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{mE_\rho - m^2\omega^2\rho^2}{p_\rho} d\rho = \rho p_\rho \Big|_{\rho_-}^{\rho_+} = 0 \tag{5.7.77}$$

ya que en los puntos de retorno $p_\rho = 0$. Pasando ahora al siguiente término del desarrollo. Con el cambio de variable $u = \frac{E_\rho}{m\omega^2} - \rho^2$, encontramos la expresión

$$2\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{mE_\rho}{p_\rho} d\rho = -\frac{E_\rho}{\omega}\int_{-A}^{A} \frac{1}{\sqrt{A^2 - u^2}} du \tag{5.7.78}$$

donde $A = \frac{1}{m\omega^2}\sqrt{E_\rho^2 - \omega^2 L_z^2}$, que da lugar a la integral directa

$$2\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{mE_\rho}{p_\rho} d\rho = \frac{E_\rho}{\omega} \arccos\frac{u}{A}\Big|_{-A}^{A} = \pi\frac{E_\rho}{\omega} \tag{5.7.79}$$

Finalmente, la integral del tercer término, con el cambio de variable $u = \frac{mE_\rho}{L_z^2} - \rho^{-2}$, resulta ser

$$-2\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L_z^2}{\rho^2}\frac{1}{p_\rho}d\rho = \frac{L_z^2}{\sqrt{L_z^2}}\int_{-B}^{B}\frac{du}{\sqrt{B^2-u^2}} \tag{5.7.80}$$

donde $B = \frac{m}{L_z^2}\sqrt{E_\rho^2 - \omega^2 L_z^2}$, que da lugar de nuevo a una integral directa

$$-2\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L_z^2}{\rho^2}\frac{1}{p_\rho}d\rho = -|L_z|\arccos\frac{u}{B}\Big|_{-B}^{B} = -\pi|L_z| \tag{5.7.81}$$

Agrupando estos resultados, la acción para la coordenada radial resulta ser

$$I_\rho = \pi\frac{E_\rho}{\omega} - \pi|L_z| = \pi\frac{E_\rho}{\omega} - \frac{1}{2}I_\varphi \tag{5.7.82}$$

Finalmente, con ayuda de estas definiciones, podemos obtener la expresión de la energía en función de las variables de acción en la forma

$$E = E_\rho + E_z = \frac{\omega}{\pi}\left(I_\rho + \frac{1}{2}I_\varphi\right) + \frac{\omega}{2\pi}I_z = \frac{\omega}{2\pi}\left(2I_\rho + I_\varphi + I_z\right) \tag{5.7.83}$$

(c) Las frecuencias asociadas a los tres grados de libertad son, aplicando su definición, respectivamente

$$\nu_\rho = \frac{\partial E}{\partial I_\rho} = \frac{\omega}{\pi} \quad , \quad \nu_\varphi = \nu_z = \frac{\omega}{2\pi} \tag{5.7.84}$$

y comparando con el resultado en coordenadas cartesianas

$$\nu_x = \nu_y = \nu_z = \frac{\omega}{2\pi} \tag{5.7.85}$$

vemos que respecto a la solución completamente degenerada en coordenadas cartesianas, la solución en coordenadas cilíndricas sólo tiene una degeneración doble.
El origen de esta diferencia reside en que hemos sustituido los movimientos de oscilación en x, y, z por un movimiento de rotación en φ, un movimiento de oscilación en z y un movimiento de libración en ρ. La clave está en el movimiento de libración, que al corresponder a una variable estrictamente positiva ($\rho > 0$) tiene una frecuencia superior, en este caso, el doble del valor original.

5.7.6. Oscilador isótropo tridimensional en coordenadas esféricas

Considere de nuevo el ejercicio anterior para una partícula de masa m que se mueve en presencia de un potencial tridimensional isótropo del oscilador armónico, analizando ahora el sistema en las coordenadas esféricas, de forma que el potencial tiene la expresión equivalente

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2+z^2\right) \equiv \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \tag{5.7.86}$$

(a) Resuelva la ecuación de Hamilton−Jacobi en coordenadas esféricas (r, θ, φ) por el método de separación de variables.

(b) Determine las variables de acción, y exprese el Hamiltoniano en función de éstas.

(c) Determine las frecuencias del movimiento del sistema. Compare con el resultado obtenido en el ejercicio anterior para las coordenadas cartesianas. Interprete físicamente la diferencia.

(a) El Hamiltoniano en coordenadas esféricas se expresa en la forma

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}p_\varphi^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \tag{5.7.87}$$

y la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica se escribe

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right)+\frac{1}{2}m\omega^2r^2=E \tag{5.7.88}$$

Dado que la coordenada φ es cíclica, buscamos una solución totalmente separable en la forma

$$W=R\left(r\right)+\Theta\left(\theta\right)+\alpha_\varphi\varphi \tag{5.7.89}$$

siendo el momento conjugado α_φ la componente z del momento angular, $\alpha_\varphi=L_z$. De esta forma, la ecuación para la función característica se reduce a

$$\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)^2+\frac{L_z^2}{\mathrm{sen}^2\,\theta}=r^2\left(2mE-m^2\omega^2r^2-\left(\frac{dR}{dr}\right)^2\right) \tag{5.7.90}$$

El primer término de la izquierda es función sólo de θ, mientras que el segundo término es función sólo de r. Por tanto, necesariamente cada término debe ser igual a una constante, y obtenemos la separación del movimiento

$$\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)^2+\frac{L_z^2}{\mathrm{sen}^2\,\theta}=L^2 \tag{5.7.91}$$

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2+\frac{L^2}{r^2}+m^2\omega^2r^2=2mE \tag{5.7.92}$$

De esta forma, las variables quedan completamente separadas, podemos resolver la ecuación y obtener los momentos canónicos en la forma

$$p_r\equiv\frac{\partial W}{\partial r}=\frac{dR}{dr}=\sqrt{2mE-m^2\omega^2r^2-L^2/r^2} \tag{5.7.93}$$

$$p_\theta\equiv\frac{\partial W}{\partial \theta}=\frac{d\Theta}{d\theta}=\sqrt{L^2-L_z^2/\,\mathrm{sen}^2\,\theta} \tag{5.7.94}$$

$$p_\varphi\equiv\frac{\partial W}{\partial \varphi}=L_z \tag{5.7.95}$$

(b) En su caso, las variables de acción (I_r,I_θ,I_φ) están dadas por las integrales de estos momentos canónicos sobre el movimiento periódico en cada uno de los grados de libertad. La acción para la coordenada radial

$$I_r=\oint p_r dr=2\int_{r_-}^{r_+}\sqrt{2mE-m^2\omega^2r^2-\frac{L^2}{r^2}}dr \tag{5.7.96}$$

tiene una estructura similar a la obtenida para su homóloga en coordenadas cilíndricas, siendo ahora r_+,r_- los valores máximo y mínimo de la coordenada radial durante el movimiento, soluciones de la ecuación

$$p_r=0\rightarrow 2mE=m^2\omega^2r_\pm^2+\frac{L^2}{r_\pm^2} \tag{5.7.97}$$

Realizando entonces la integral obtenemos, como hemos visto anteriormente,

$$I_r=\pi\frac{E}{\omega}-\pi L \tag{5.7.98}$$

Para la coordenada angular θ, vemos primero que los puntos de retorno satisfacen

$$\mathrm{sen}\,\theta_\pm=\sqrt{\frac{L_z^2}{L^2}}=\frac{|L_z|}{L} \tag{5.7.99}$$

Entonces, dada la expresión de I_θ, vemos que es conveniente factorizar el integrando en la forma

$$\sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\operatorname{sen}^2\theta}} = \frac{L^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{L^2\operatorname{sen}^2\theta - L_z^2}} - \frac{\frac{L_z^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}{\sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}} \tag{5.7.100}$$

con lo cual obtendríamos, multiplicando esta expresión por la diferencial $d\theta$

$$\sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}d\theta = -\frac{L^2 d\cos\theta}{\sqrt{L^2\left(1-\cos^2\theta\right) - L_z^2}} + \frac{L_z^2 d\cot\theta}{\sqrt{L^2 - L_z^2\left(1+\cot^2\theta\right)}} \tag{5.7.101}$$

que resulta una expresión integrable de forma directa. Con esto, la variable de acción correspondiente se escribe

$$I_\theta = \oint p_\theta d\theta = -2\int_{-A}^{A} \frac{Ldu}{\sqrt{A^2-u^2}} + 2\int_{-B}^{B} \frac{|L_z|du}{\sqrt{B^2-u^2}} \tag{5.7.102}$$

siendo $A = \frac{1}{L}\sqrt{L^2 - L_z^2}$ y $B = \frac{1}{|L_z|}\sqrt{L^2 - L_z^2}$, y realizando la integración obtenemos el valor

$$I_\theta = \oint p_\theta d\theta = 2L \operatorname{arc\,cos}\frac{u}{A}\Big|_{-A}^{A} - 2|L_z| \operatorname{arc\,cos}\frac{u}{B}\Big|_{-B}^{B} = 2\pi\left(L - |L_z|\right) \tag{5.7.103}$$

Por último, para la variable de acción I_φ, al ser φ una coordenada cíclica, tenemos el resultado directo

$$I_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = 2\pi|L_z| \tag{5.7.104}$$

con lo cual, también se establece la relación que se utilizará a continuación

$$I_\theta = 2\pi L - I_\varphi \tag{5.7.105}$$

Finalmente, con ayuda de estas definiciones, podemos obtener la energía en función de las variables de acción en la forma

$$E = \frac{\omega}{\pi}\left(I_r + \pi L\right) = \frac{\omega}{2\pi}\left(2I_r + I_\theta + I_\varphi\right) \tag{5.7.106}$$

(c) Las frecuencias asociadas a los tres grados de libertad son, respectivamente

$$\nu_r \equiv \frac{\partial E}{\partial I_r} = \frac{\omega}{\pi} \quad , \quad \nu_\theta \equiv \frac{\partial E}{\partial I_\theta} = \frac{\omega}{2\pi} \quad , \quad \nu_\varphi \equiv \frac{\partial E}{\partial I_\varphi} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{5.7.107}$$

Como vemos, respecto a la solución completamente totalmente degenerada en coordenadas cartesianas, la solución en coordenadas esféricas sólo tiene una degeneración doble. La explicación reside de nuevo en que hemos sustituido los movimientos de oscilación en x, y, z por un movimiento de rotación en φ, un movimiento de oscilación en θ y un movimiento de libración en r. La clave está en el movimiento de libración, que al corresponder a una variable estrictamente positiva $(r > 0)$ tiene una frecuencia superior, en este caso, el doble del valor original.

5.7.7. Partícula en potencial central en coordenadas esféricas

Una partícula de masa m se mueve en el potencial central

$$V(r) = -\frac{\beta}{r} + \frac{\gamma}{r^2} \tag{5.7.108}$$

en coordenadas esféricas.

(a) Resuelva la ecuación de Hamilton−Jacobi en coordenadas esféricas (r, θ, φ) por el método de separación de variables.

(b) Determine las variables de acción, y obtenga la expresión del Hamiltoniano en función de éstas.

(c) Determine las frecuencias del movimiento del sistema y deduzca cuál es la condición que debe darse para que el movimiento de la partícula sea periódico. Demuestre que las órbitas periódicas de la partícula no pueden tener un valor cualquiera del momento angular, sino que éste debe tener un valor definido. Interprete físicamente.

(a) El Hamiltoniano en coordenadas esféricas está dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}p_\varphi^2\right) - \frac{\beta}{r} + \frac{\gamma}{r^2} \tag{5.7.109}$$

y la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica se escribe

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right) - \frac{\beta}{r} + \frac{\gamma}{r^2} = E \tag{5.7.110}$$

donde la energía total debe considerarse negativa para cualquier movimiento acotado, $E < 0$, y por tanto, susceptible de describir una trayectoria periódica.
Dado que la coordenada φ es cíclica, buscamos una solución totalmente separable en la forma

$$W = R(r) + \Theta(\theta) + \alpha_\varphi \varphi \tag{5.7.111}$$

donde el momento conjugado α_φ es la componente z del momento angular, $\alpha_\varphi = L_z$. De esta forma, la ecuación para la función característica se reduce a

$$\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{L_z^2}{\mathrm{sen}^2\,\theta} = 2mr^2\left(E + \frac{\beta}{r} - \frac{\gamma}{r^2} - \frac{1}{2m}\left(\frac{dR}{dr}\right)^2\right) \tag{5.7.112}$$

El primer término de la izquierda es función sólo de θ, mientras que el segundo término es función sólo de r. Por tanto, necesariamente cada término debe ser igual a una constante, y obtenemos la separación del movimiento

$$\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{L_z^2}{\mathrm{sen}^2\,\theta} = L^2 \tag{5.7.113}$$

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \frac{2m\gamma + L^2}{r^2} - \frac{2m\beta}{r} = 2mE \tag{5.7.114}$$

Con esto, las variables quedan completamente separadas, y podemos obtener los momentos canónicos en la forma, con $E \equiv -|E|$ al ser una cantidad negativa,

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{dR}{dr} = \sqrt{-2m|E| + \frac{2m\beta}{r} - \frac{2m\gamma + L^2}{r^2}} \tag{5.7.115}$$

$$p_\theta = \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{d\Theta}{d\theta} = \sqrt{L^2 - L_z^2/\,\mathrm{sen}^2\,\theta} \tag{5.7.116}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = L_z \tag{5.7.117}$$

(b) En su caso, las variables de acción $(I_r, I_\theta, I_\varphi)$ están dadas por las integrales sobre el movimiento periódico en cada uno de grados de libertad. Para la coordenada radial obtenemos

$$I_r = \oint p_r dr = 2\int_{r_-}^{r_+} \sqrt{-2m|E| + \frac{2m\beta}{r} - \frac{2m\gamma + L^2}{r^2}}dr \tag{5.7.118}$$

donde r_+, r_- son sus valores máximo y mínimo, soluciones de la ecuación

$$p_r = 0 \to |E| = \frac{\beta}{r_\pm} - \frac{\gamma + L^2/2m}{r_\pm^2} \tag{5.7.119}$$

Realizamos ahora la siguiente factorización del integrando, análoga al caso del oscilador armónico en coordenadas esféricas,

$$p_r \equiv \frac{1}{p_r}\left(2m\left(\frac{\beta}{2r} - |E|\right) + \frac{m\beta}{r} - \frac{2m\gamma + L^2}{r^2}\right) \tag{5.7.120}$$

La integración del primer término es directa ya que

$$\left(\frac{\beta}{2r} - |E|\right)\frac{1}{p_r} = \frac{d\,(rp_r)}{dr} \tag{5.7.121}$$

y por tanto,

$$\int_{r_-}^{r_+}\left(\frac{\beta}{2r} - |E|\right)\frac{1}{p_r}dr = rp_r\Big|_{r_-}^{r_+} = 0 \tag{5.7.122}$$

al ser $p_r = 0$ en los puntos de retorno del movimiento radial. Para el siguiente término, con el cambio de variable $u = r - \frac{\beta}{2|E|}$ obtenemos

$$2\int_{r_-}^{r_+}\frac{m\beta}{r}\frac{1}{p_r}dr = \sqrt{\frac{2m}{|E|}}\beta\int_{-A}^{A}\frac{1}{\sqrt{A^2 - u^2}}du = \sqrt{\frac{2m}{|E|}}\pi\beta \tag{5.7.123}$$

siendo $A = \sqrt{\frac{\beta^2}{4|E|^2} - \frac{\gamma + L^2/2m}{|E|}}$. Por último, para el tercer término, con el cambio de variable $u = r^{-1} - \frac{m\beta}{2m\gamma + L^2}$ obtenemos

$$2\int_{r_-}^{r_+}\left(-\frac{2m\gamma + L^2}{r^2}\right)\frac{1}{p_r}dr = -2\sqrt{L^2 + 2m\gamma}\int_{-B}^{B}\frac{du}{\sqrt{B^2 - u^2}} = -2\pi\sqrt{L^2 + 2m\gamma} \tag{5.7.124}$$

siendo $B = \frac{1}{2m\gamma + L^2}\sqrt{m^2\beta^2 - 2m|E|\,(2m\gamma + L^2)}$. Reuniendo estos resultados, vemos que la acción para la coordenada radial está dada por

$$I_r = \sqrt{\frac{2m}{|E|}}\pi\beta - 2\pi\sqrt{L^2 + 2m\gamma} \tag{5.7.125}$$

Por otro lado, las variables de acción para las coordenadas angulares son las mismas que para el oscilador armónico, ya que el potencial en uno y otro caso no depende de las variables angulares. Reescribimos entonces los resultados obtenidos previamente

$$I_\varphi = 2\pi|L_z| \quad , \quad I_\theta = 2\pi L - I_\varphi \tag{5.7.126}$$

Finalmente, con ayuda de estas definiciones, podemos obtener la energía en función de las variables de acción en la forma

$$E = -\frac{2\pi^2 m\beta^2}{\left(I_r + \sqrt{(I_\theta + I_\varphi)^2 + 8\pi^2 m\gamma}\right)^2} \tag{5.7.127}$$

(c) Las frecuencias asociadas a los tres grados de libertad son, respectivamente

$$\nu_r = \frac{4\pi^2 m\beta^2}{\left(I_r + \sqrt{(I_\theta + I_\varphi)^2 + 8\pi^2 m\gamma}\right)^3} \tag{5.7.128}$$

$$\nu_\theta = \frac{\nu_r}{\sqrt{1 + 8\pi^2 m\gamma\,(I_\theta + I_\varphi)^{-2}}} = \nu_\varphi \tag{5.7.129}$$

La trayectoria de la partícula será periódica cuando las frecuencias sean conmensurables, es decir, $n_{\varphi,\theta}\nu_r = n_r\nu_{\varphi,\theta}$ con $n_{\varphi,\theta}, n_r$ números enteros. Para estas tipo de órbitas el momento angular sólo puede tener un valor definido, ya que de la relación de frecuencias

$$\frac{\nu_r}{\nu_\theta} = \sqrt{1 + 2m\gamma L^{-2}} = \frac{n_r}{n_\theta} \tag{5.7.130}$$

deducimos que

$$L = n_\theta \sqrt{\frac{2m\gamma}{n_r^2 - n_\theta^2}} \tag{5.7.131}$$

5.7.8. Oscilador armónico de frecuencia variable

Considere un oscilador armónico unidimensional de frecuencia variable $\omega(t)$ con el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega(t)^2 q^2 \tag{5.7.132}$$

(a) Realice la transformación de las variables (q, p) a las variables acción-ángulo (φ, I) determinando la función generadora de la transformación en el caso particular de una frecuencia constante. Obtenga las ecuaciones del movimiento correspondientes.

(b) Considere ahora el caso más general de una frecuencia del oscilador dependiente del tiempo. Realice de nuevo la transformación de las variables (q, p) a las variables acción-ángulo (en el instante t) (φ, I), determinando la función generadora de la transformación, y la expresión para el nuevo Hamiltoniano. Puede simplificar su análisis considerando que el sistema se encuentra instantáneamente en un estado de energía constante $E = E(t)$.

(c) A partir del nuevo Hamiltoniano, deduzca las ecuaciones de movimiento para las variables acción−ángulo, y determine la frecuencia del movimiento del sistema.

(a) Partimos de la definición de la variable de acción, que para el oscilador armónico, cuando la frecuencia es constante, tiene el valor

$$\frac{I}{2\pi} = \frac{E}{\omega} = \frac{p^2}{2m\omega} + \frac{1}{2}m\omega q^2 \tag{5.7.133}$$

Para hallar la variable de ángulo φ, podemos utilizar la solución para la función característica W del oscilador armónico

$$W = \int \sqrt{m\omega I/\pi - m^2\omega^2 q^2}dq \tag{5.7.134}$$

siendo en este caso W la función generadora de tipo 2, $F_2(q, I)$, que transforma las variables (q, p) en las variables acción-ángulo (φ, I).

En función de ella, φ está dada por

$$\varphi \equiv \frac{\partial W}{\partial I} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{dq}{\sqrt{\frac{I}{\pi m\omega} - q^2}} = \frac{1}{2\pi}\text{arcsen}\frac{q}{\sqrt{I/\pi m\omega}} \tag{5.7.135}$$

e invirtiendo esta relación llegamos a la transformación solicitada

$$q = \sqrt{I/\pi m\omega}\,\text{sen}\,(2\pi\varphi) \tag{5.7.136}$$

Las ecuaciones de movimiento para (φ, I) cuando la frecuencia no depende del tiempo son conocidas

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{\partial E}{\partial I} = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \varphi = \frac{\omega}{2\pi}t + \varphi_0 \tag{5.7.137}$$

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow I = \text{cte} \tag{5.7.138}$$

(b) Cuando la frecuencia depende del tiempo, el problema sólo puede resolverse caso a caso integrando la ecuación de Hamilton−Jacobi dependiente del tiempo. Para estudiar el caso más general, podremos hacerlo de forma sencilla si asumimos que el sistema se encuentra instantáneamente en el estado de energía constante $E = E(t)$, de forma que los valores instantáneos para las variables acción−ángulo cumplirán análogamente

$$q = \sqrt{I/\pi m\omega(t)}\,\text{sen}\,(2\pi\varphi) \quad , \quad p = \sqrt{m\omega\,(t)\,I/\pi}\cos(2\pi\varphi) \tag{5.7.139}$$

siendo

$$\frac{I}{2\pi} = \frac{E}{\omega(t)} = \frac{p^2}{2m\omega(t)} + \frac{1}{2}m\omega(t)q^2 \tag{5.7.140}$$

Ahora las ecuaciones de evolución para φ, I diferirán de las anteriores, y dependerán de la forma particular de la variación temporal de $\omega(t)$. El nuevo Hamiltoniano está dada por

$$K\,(\varphi, I) = H\,(q(\varphi, I), p(\varphi, I)) + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{q,I} \tag{5.7.141}$$

y, como se indica, la derivada parcial respecto al tiempo se realiza a q, I constantes.

La evaluación del primer término es directa ya que

$$H\,(q(\varphi, I), p(\varphi, I)) = \frac{\omega}{2\pi}I \tag{5.7.142}$$

donde como indica el enunciado los valores se refieren al instante t. Para evaluar el segundo término, podríamos partir primero de la definición de W , y realizar la derivada parcial respecto al tiempo, llegando a la expresión

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{q,I} = \int \frac{m\dot{\omega}I/\pi - 2m^2\omega\dot{\omega}q^2}{\sqrt{m\omega I/\pi - m^2\omega^2 q^2}}dq \tag{5.7.143}$$

para integrar posteriormente en q, e introducir finalmente la dependencia funcional $q = q(\varphi, I)$. Sin embargo, será más sencillo deducir primero la función W en las variables acción-ángulo. Para ello, tenemos que considerar la definición $W(q,I) = \int \sqrt{m\omega I/\pi - m^2\omega^2 q^2} dq$, y que la integración en q debe realizarse tomando I constante. Con esto, con la aplicación de la transformación canónica tenemos

$$\begin{aligned} W &= \int p dq = \int \sqrt{m\omega I/\pi}\cos(2\pi\varphi)\cdot d\left(\sqrt{I/\pi m\omega}\,\mathrm{sen}\,(2\pi\varphi)\right) \\ &= \frac{I}{\pi}\int \cos^2(2\pi\varphi)\, d(2\pi\varphi) = I\left(\varphi + \frac{\mathrm{sen}\,(4\pi\varphi)}{4\pi}\right) \end{aligned} \tag{5.7.144}$$

que es la expresión que buscamos. De aquí, deducimos que

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{q,I} = 2I\dot{\varphi}\cos^2(2\pi\varphi) \tag{5.7.145}$$

y dado que para q, I constantes

$$q = \sqrt{I/\pi m\omega}\,\mathrm{sen}\,(2\pi\varphi) \rightarrow \omega = \mathrm{cte}\cdot \mathrm{sen}^2(2\pi\varphi) \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{1}{4\pi}\frac{\dot{\omega}}{\omega}\tan(2\pi\varphi) \tag{5.7.146}$$

llegamos a

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{q,I} = I\frac{\dot{\omega}}{\omega}\frac{\mathrm{sen}\,(4\pi\varphi)}{4\pi} \tag{5.7.147}$$

De esta forma vemos que el nuevo Hamiltoniano en las nuevas variables canónicas está dado por

$$K(\varphi, I) = \frac{\omega}{2\pi}I + I\frac{\dot{\omega}}{\omega}\frac{\mathrm{sen}\,(4\pi\varphi)}{4\pi} = I\frac{\omega}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\,\mathrm{sen}\,(4\pi\varphi)\right) \tag{5.7.148}$$

(c) Respecto al nuevo Hamiltoniano, las ecuaciones de evolución para las variables acción−ángulo son directamente

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv \frac{\partial K}{\partial I} = \frac{\omega}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\,\mathrm{sen}\,(4\pi\varphi)\right) \tag{5.7.149}$$

$$\frac{dI}{dt} \equiv -\frac{\partial K}{\partial \varphi} = -I\frac{\dot{\omega}}{\omega}\cos(4\pi\varphi) \tag{5.7.150}$$

Dado que en el modelo considerado la frecuencia del sistema es igual a la frecuencia instantánea $\omega(t)$, y dado que

$$\nu(t) = \frac{\partial E(t)}{\partial I} = \frac{\omega(t)}{2\pi} \tag{5.7.151}$$

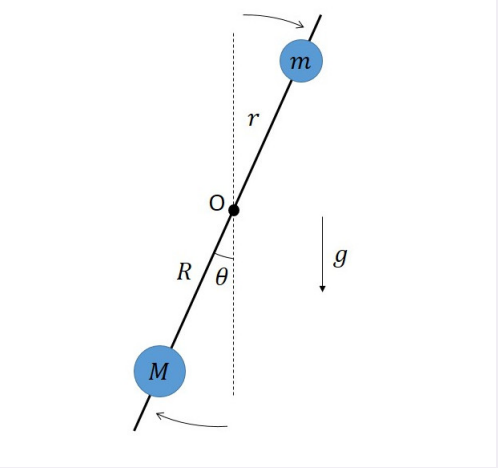
podríamos comparar este resultado con el resultado exacto que se obtendría con la integración directa en el tiempo de la variable de ángulo $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \int \frac{d\varphi}{dt}dt \equiv \int \nu_{ex}(t)dt \tag{5.7.152}$$

y que sería dependiente de la variación particular de $\omega(t)$ en todo instante de tiempo.

5.7.9. Péndulo doble con masa móvil

Sea el péndulo doble de la figura, donde dos masas puntuales, m y M, fijas a una varilla sin masa, rotan en un plano vertical, bajo el efecto de la gravedad, respecto al punto fijo O, siendo r y R los radios de giro respectivos. Se pone el sistema en movimiento desde el reposo y con una amplitud angular dada por θ_0. Utilice la aproximación de ángulos pequeños, y las variables acción-ángulo para determinar la solución completa al movimiento. ¿Cómo se modificaría el análisis si la masa m deslizase sobre la varilla de forma suficientemente lenta? ¿Y si fuera M la masa que deslizase sobre la varilla?



• El Lagrangiano del sistema de masas es

$$L = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + g\left(MR - mr\right)\cos\theta \tag{5.7.153}$$

y utilizando la aproximación de ángulos pequeños, este sistema es equivalente a un oscilador armónico simple, con Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}\left(MR^2 + mr^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}g\left(MR - mr\right)\theta^2 \tag{5.7.154}$$

Por otro lado, el Hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{p_\theta^2}{2\left(MR^2 + mr^2\right)} + \frac{1}{2}g\left(MR - mr\right)\theta^2 \tag{5.7.155}$$

Aplicando las condiciones en el instante inicial obtenemos el valor de la energía (conservada), en la forma

$$E = \frac{1}{2}g\left(MR - mr\right)\theta_0^2 \tag{5.7.156}$$

• Utilizando este valor de la energía E, deducimos que el momento está dado por

$$p_\theta = \sqrt{g\left(MR^2 + mr^2\right)\left(MR - mr\right)}\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2} \tag{5.7.157}$$

y en este caso, introduciendo la definición de la variable de acción en la forma usual,

$$I = \oint p_\theta\, d\theta = 4\int_0^{\theta_0} p_\theta\, d\theta \tag{5.7.158}$$

tenemos el resultado

$$I = 4\sqrt{g\left(MR^2+mr^2\right)\left(MR-mr\right)}\int_0^{\theta_0}\sqrt{\theta_0^2-\theta^2}d\theta = \sqrt{g\left(MR^2+mr^2\right)\left(MR-mr\right)}\pi\theta_0^2 \tag{5.7.159}$$

ó también, en función de la energía

$$I = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2+mr^2}{g\left(MR-mr\right)}}E \tag{5.7.160}$$

• Una vez obtenida la expresión de la variable de acción en función de la energía, podemos determinar la frecuencia del movimiento en la forma

$$\nu \equiv \frac{\partial E}{\partial I} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\left(MR-mr\right)}{MR^2+mr^2}} \tag{5.7.161}$$

y por su parte, la variable de ángulo estará dada por

$$\varphi = \nu t \tag{5.7.162}$$

y la solución general del movimiento será

$$\theta = \theta_0\cos\left(2\pi\nu t\right) \tag{5.7.163}$$

• Si la masa m desliza sobre la varilla el sistema, se debe introducir su correspondiente momento radial p_r, y se obtendría de forma análoga la variable de acción I_r. La energía sería función de las variables (I, I_r), y el movimiento tendría dos frecuencias características, para la oscilación radial y la oscilación angular.
No sucedería lo mismo si deslizara en su lugar la masa M, ya que no existiría un movimiento oscilatorio radial. La masa M tendería a caer de forma indefinida a lo largo de la varilla, modificando en su movimiento la frecuencia de oscilación angular del sistema. Sí podría utilizarse en su caso un análisis adiabático si el deslizamiento fuera lo suficientemente lento.

5.7.10. Curva bidimensional para período mínimo de oscilación

Sea una partícula puntual de masa m que efectúa oscilaciones, con una energía dada E, sobre la curva bidimensional fija $y = f(x)$ bajo el efecto de la gravedad, siendo x el eje horizontal e y el eje vertical sobre el que actúa la gravedad. Considere que la curva es simétrica, $f(x) = f(-x)$ y que la posición de equilibrio del movimiento de la partícula se sitúa en $x = 0$.

(a) Utilizando un método variacional determine cuál es la función $f(x)$ que da lugar a un valor extremo de la frecuencia de oscilación de la partícula. Interprete físicamente el resultado obtenido.

(b) Evalúe entonces si dicho extremo resulta ser un máximo o un mínimo de la frecuencia. Para ello, asuma una variación adicional de la función en la forma $\delta f(x)$ y determine cuál es la contribución resultante al valor de la frecuencia.

(a) De forma genérica, la frecuencia de un movimiento periódico está dada por la expresión

$$\omega = 2\pi\frac{\partial E}{\partial I} \equiv \frac{2\pi}{\partial I/\partial E} \tag{5.7.164}$$

siendo para un movimiento unidimensional

$$I \equiv \oint p_x dx \tag{5.7.165}$$

la variable de acción. Dado que el movimiento es periódico y simétrico respecto al punto de equilibrio (por serlo la función $f(x)$), y que su proyección sobre el eje x también lo es (aunque no es imprescindible utilizar esta condición), tenemos

$$I = 4\int_0^{x_E} p_x dx \tag{5.7.166}$$

siendo x_E el punto de retroceso del movimiento en presencia de la gravedad, tal que

$$mgf(x_E) = E \tag{5.7.167}$$

siendo p_x estrictamente positivo en la integración espacial. Ya que necesitamos la derivada de la acción, derivando respecto a la energía obtenemos

$$\frac{\partial I}{\partial E} = 4p_x(x_E)\frac{\partial x_E}{\partial E} + 4\int_0^{x_E} \frac{\partial p_x}{\partial E} dx \tag{5.7.168}$$

y dado que x_E es un punto de retroceso, el momento en este punto se anula, $p_x(x_E) = 0$, y obtenemos el valor

$$\frac{\partial I}{\partial E} = 4\int_0^{x_E} \frac{\partial p_x}{\partial E} dx \tag{5.7.169}$$

con lo que la frecuencia de oscilación resulta ser

$$\omega = \frac{\pi}{2\int_0^{x_E} \frac{\partial p_x}{\partial E} dx} \tag{5.7.170}$$

• Esta es la expresión cuyo extremo queremos determinar aplicando un método variacional respecto a la función arbitraria $f(x)$, y dada la forma funcional de dicha expresión, será suficiente con la deteminación del extremo para la integral del denominador

$$\int_0^{x_E} \frac{\partial p_x}{\partial E} dx \tag{5.7.171}$$

Para ello debemos obtener su expresión en términos de la función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$. Aplicando el formalismo Lagrangiano, deducimos primero que el Lagrangiano está dado por

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mgy = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + f'^2(x)\right) - mgf(x) \tag{5.7.172}$$

y de aquí obtenemos, aplicando su definición, la expresión del momento p_x en la forma

$$p_x = m\dot{x}\left(1 + f'^2(x)\right) \tag{5.7.173}$$

y de aquí, obtenemos directamente el Hamiltoniano, que al ser el campo conservativo, coindice con el valor de la energía de la partícula

$$H = \frac{p_x^2}{2m\left(1 + f'^2(x)\right)} + mgf(x) \equiv E \tag{5.7.174}$$

De esta expresión despejamos la raiz positiva de p_x, en la forma

$$p_x = \sqrt{2m}\sqrt{E - mgf}\sqrt{1 + f'^2} \tag{5.7.175}$$

y junto con su derivada respecto a la energía

$$\frac{\partial p_x}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{\sqrt{1 + f'^2}}{\sqrt{E - mgf}} \tag{5.7.176}$$

que formulado el problema variacional en la forma

$$\delta\left(\int_0^{x_E}\frac{\partial p_x}{\partial E}dx\right)=0 \quad\Longrightarrow\quad \delta\left(\int_0^{x_E}\frac{\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{E-mgf}}dx\right)=0 \tag{5.7.177}$$

• Aplicando entonces el método variacional, el extremo será aquel integrando de la función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$

$$F(f,f')\equiv\frac{\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{E-mgf}} \tag{5.7.178}$$

que satisfaga la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)=\frac{\partial F}{\partial f} \tag{5.7.179}$$

Puede comprobarse de forma directa que debido a la independencia de F en x tenemos la integral primera

$$\left(1+f'^2\right)(E-mgf)=\text{cte} \tag{5.7.180}$$

Por simplicidad puede elegirse el valor de esta constante tal que el punto de equilibrio de la partícula corresponda al valor $f(0)$, como indica el enunciado. En este caso, la condición que debe aplicarse es $f'=0$ cuando $f=0$, de forma que la constante tome el valor E. Con esto, al aplicar una segunda integración en la integral primera obtenemos la siguiente integral en forma de cuadratura

$$\int\sqrt{\frac{E-mgf}{mgf}}df=\int dx=x \tag{5.7.181}$$

y la resolución de esta cuadratura (con el uso de tablas integrales) determina la solución al problema: la curva $f(x)$ que da lugar a un extremo en la frecuencia de oscilación.

(b) Lo que nos pide el enunciado es que analicemos la derivada variacional segunda del integrando $F(f,f')$ en un entorno de la función f^*, que da el valor extremo de la integral de F, y que satisface la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\delta F}{\delta f}\equiv\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)=0 \quad\Longrightarrow\quad f=f^*(x) \tag{5.7.182}$$

El signo de esta variación segunda

$$\frac{\delta^2 F}{\delta f^2} \tag{5.7.183}$$

determinará el carácter de máximo o mínimo de la función f^*. Dado que el integrando F depende de dos variables independientes el análisis general de esta segunda variación no es directo. En su lugar realizaremos la siguiente aproximación. Consideraremos que el integrando F representa únicamente las funciones f que dan lugar a un extremo, no a todo el rango de funciones posibles. Para ello, utilizando la integral primera que se deduce de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\left(1+f'^2\right)(E-mgf)=E \tag{5.7.184}$$

obtenemos la expresión para la dependencia funcional de $F(f)$ sobre estos valores extremo

$$F(f)\equiv F(f,f')\Big|_{(1+f'^2)(E-mgf)=\text{cte}}=\frac{\text{cte}}{E-mgf} \tag{5.7.185}$$

y con esta simplificación la segunda variación de F queda reducida a la segunda derivada de F en el sentido

$$\frac{\delta^2 F}{\delta f^2}=\frac{d^2F}{df^2}(\delta f)^2 \tag{5.7.186}$$

Analizando entonces esta segunda derivada obtenemos

$$\frac{d^2F}{df^2} = \frac{2m^2g^2E}{(E-mgf)^3} > 0 \tag{5.7.187}$$

función estrictamente mayor que cero al ser $E > 0$ y $E - mgf > 0$ en el intervalo de integración. Por tanto,

$$\frac{\delta^2F}{\delta f^2} = \frac{d^2F}{df^2}(\delta f)^2 > 0 \tag{5.7.188}$$

y al ser positiva esta segunda variación, la función correspondiente $f^*(x)$ representa un valor mínimo.
Recordando que la frecuencia de oscilación es inversamente proporcional a la integración de F, y que el periodo de oscilación es inversamente proporcional a la frecuencia, deducimos que la curva $f^*(x)$, solución de la ecuación de Euler-Lagrange con la cuadratura

$$\int \sqrt{\frac{E-mgf}{mgf}}df = \int dx = x \tag{5.7.189}$$

representa la curva con un periodo de oscilación mínimo, y una frecuencia de oscilación máxima.

5.8. Autoevaluación

Ejercicios

5.8.1. Proyectil cerca de la superficie terrestre (R)

El movimiento de un proyectil cerca de la superficie terrestre está gobernado por el Hamiltoniano

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + mgy \tag{5.8.1}$$

donde (x, y) denotan las coordenadas horizontal y vertical, y (p_x, p_y) sus momentos conjugados.

(a) Obtenga la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo, y halle su solución general.

(b) Utilice la solución encontrada para determinar la ley de movimiento para las coordenadas del sistema, $x(t), y(t)$.

5.8.2. Oscilador isótropo tridimensional (R)

Utilice el método de Hamilton−Jacobi para determinar las ecuaciones generales de movimiento $(x(t), y(t), z(t))$ de un oscilador isótropo tridimensional cuyo potencial está definido por la expresión

$$V = \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \tag{5.8.2}$$

en coordenadas cartesianas.

5.8.3. Problema relativista de Kepler (R)

En coordenadas polares, el Hamiltoniano para el problema relativista de Kepler está dado por

$$H = T + V = c\sqrt{m^2c^2 + p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}} - \frac{k}{r} \tag{5.8.3}$$

(a) Resuelva la ecuación de Hamilton−Jacobi para el sistema y determine la función principal, expresando el resultado en función de cuadraturas.

(b) Deduzca, a partir de la acción, la ecuación de la órbita, expresando el resultado en función de cuadraturas.

5.8.4. Corrección relativista al periodo del oscilador (R)

Sea el problema relativista unidimensional del movimiento de un partícula en el potencial

$$V(q) = kq^n \tag{5.8.4}$$

donde k es una constante y n un número entero. Utilizando el método de Hamilton−Jacobi, determine en primer orden la corrección relativista al periodo del movimiento del problema en el caso no relativista.

5.8.5. Hamiltoniano en coordenadas cilíndricas (R)

El Hamiltoniano en coordenadas cilíndricas para una partícula de masa m sometida a un potencial está dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2 + p_z^2\right) + V(r, \varphi, z) \tag{5.8.5}$$

Asumiendo que el potencial es separable en la forma $V = a(r) + b(z)$, siendo a, b funciones de sus argumentos, escriba la ecuación de Hamilton−Jacobi del sistema y determine la función principal, expresándola en forma de cuadraturas.

Cuestionarios en línea

5.8.6. Hamiltoniano del sistema a partir de la función principal S

- Enlace al cuestionario

5.8.7. Ecuación de movimiento a partir de la función principal S

- Enlace al cuestionario

5.8.8. Apéndice. Soluciones separables

- Enlace al cuestionario

5.9. Ejercicios de Autoevaluación adicionales

5.9.1. Separabilidad de Hamiltoniano bidimensional (R)

Considere la transformación de las coordenadas (q_1, q_2) de un sistema bidimensional a las coordenadas Q_1, Q_2, definidas por las relaciones

$$Q_1 \equiv \alpha \cdot q_1 + \beta \cdot q_2 \quad , \quad Q_2 \equiv q_2 \tag{5.9.1}$$

siendo α, β constantes, y considere el Hamiltoniano del sistema definido por

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(q_1, q_2) \tag{5.9.2}$$

en las variables originales, siendo V un potencial arbitrario de las coordenadas (q_1, q_2). Analice qué forma del potencial V permite la separabilidad del problema en las coordenadas Q_1, Q_2.

5.9.2. Partícula cargada en presencia de campos eléctrico y magnético (R)

Considere el movimiento de una partícula de masa m y carga e en presencia de un campo eléctrico constante y un campo magnético constante, dirigidos perpendicularmente entre sí, en las direcciones x y z respectivamente.

(a) Escriba la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo en coordenadas cartesianas.

(b) Demuestre que esta ecuación es separable en coordenadas cartesianas con una adecuada elección *gauge* para los potenciales electromagnéticos, y obtenga su solución por cuadraturas para un potencial vector dependiente únicamente de la coordenada x.

5.9.3. Partícula puntual en potencial no central-pendiente (R)

Utilice el método de Hamilton−Jacobi para analizar el movimiento de una partícula en el potencial no central generado por un dipolo puntual

$$V = k\frac{\cos\theta}{r^2} \tag{5.9.3}$$

en coordenadas esféricas.

(a) Escriba la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica del sistema en coordenadas esféricas. Demuestre que esta ecuación es separable y determine su solución en forma de cuadraturas.

(b) Interprete físicamente las constantes de separación, y verifique que existen dos constantes del movimiento en la forma L_z y $L^2 + 2mk\cos\theta$.

(c) Con la interpretación de estas constantes, demuestre que, debido a la simetría axial del potencial, una de las trayectorias posibles de la partícula es una oscilación en la variable θ. Verifique que se trata de una situación análoga a un movimiento pendular, y determine las condiciones iniciales de la partícula para ello.

5.9.4. Separabilidad con condiciones de Levi-Civita (R)

Un sistema dinámico de dos grados de libertad (x, y) está descrito por el Hamiltoniano

$$H = p_x g(x) - p_y h(y) - f(x) + y^2 \tag{5.9.4}$$

donde cada función f, g, h es función exclusiva de su argumento. Verifique la separabilidad de la ecuación de Hamilton−Jacobi, determine su función principal y obtenga a partir de ella la ley general del movimiento del sistema.

5.10. Apéndice A. Apéndice matemático

5.10.1. Demostración del criterio de separabilidad de Levi-Civita, (5.3.1).

Teorema de Levi-Civita La ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo admite una solución aditivamente separable sí y sólo si

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}+\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}+\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \tag{5.10.1}$$

para cada par de valores distintos de los índices i, j que numeran las coordenadas y momentos del sistema.

Ecuación de Hamilton−Jacobi para la función característica W Decimos que la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica W

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right)=E \tag{5.10.2}$$

es *totalmente* separable si tiene una solución de la forma

$$W(q) \equiv A_i f_i(q_i) \tag{5.10.3}$$

con suma en el índice i, con valores $i = 1, .., n$ para un sistema de n grados de libertad.
Aquí E es el valor de la energía, A_i es un conjunto de constantes y f_i son funciones que dependen sólo de la coordenada correspondiente q_i. En esta notación tensorial, la ecuación de Hamilton−Jacobi se lee

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right)=E \tag{5.10.4}$$

Condición para la función W Derivando esta relación respecto a q_j, obtenemos, utilizando la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dq_j}H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right)=0 \rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_j}+\frac{\partial H}{\partial\left(\partial W/\partial q_i\right)}\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial W}{\partial q_i}=0 \tag{5.10.5}$$

relación que se escribe, dada la definición del momento conjugado $p_i \equiv \partial W/\partial q_i$, en la forma

$$\frac{\partial H}{\partial q_j}+\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}=0 \tag{5.10.6}$$

lo que nos dice que cualquier solución a la función característica, independientemente de la separabilidad, debe satisfacer

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}=-\frac{\partial H/\partial q_j}{\partial H/\partial p_i} \tag{5.10.7}$$

Condición para la función W separable Si además consideramos que la ecuación es separable con la solución (5.10.3), el lado izquierdo en esta condición general será distinto de cero sólo cuando $i = j$, dado que cada momento sólo es función de la coordenada correspondiente $p_i \equiv \partial W/\partial q_i = A_i f'(q_i)$, y por tanto

$$i \neq j \Rightarrow \frac{\partial p_i}{\partial q_j}=0 \tag{5.10.8}$$

Vemos que, como resultado, deberemos añadir, cuando la solución es separable, un factor δ_{ij} a la condición para W para un caso general. Esto es, tenemos la condición para W separable

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}=-\delta_{ij}\frac{\partial H}{\partial q_j}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)^{-1} \tag{5.10.9}$$

Criterio de separabilidad Para obtener a partir de esta expresión un criterio de separabilidad para el Hamiltoniano, en la que sólo aparezcan las derivadas del Hamiltoniano, necesitamos eliminar el término dependiente de la función W. Es decir, debemos encontrar una condición equivalente para la función W, que no dependa de la propia función W, y que no sea idénticamente nula. Es fácil ver que dicha condición puede tomarse como

$$\frac{d}{dq_k}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_i}\right) = 0 \tag{5.10.10}$$

para $i = j$, y con un nuevo índice $k \neq i$. Aplicando esta condición equivalente, eliminamos W, y obtenemos un conjunto de condiciones directas para el Hamiltoniano

$$\frac{d}{dq_k}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)^{-1}\right) = 0 \tag{5.10.11}$$

válidas para $k \neq i$.
Dado que H depende funcionalmente de coordenadas y momentos, para desarrollar estas ecuaciones, debemos aplicar la regla de la cadena

$$\frac{d}{dq_k} \equiv \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\partial p_j}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_j} \tag{5.10.12}$$

siendo

$$\frac{\partial p_j}{\partial q_k} \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial q_k} = -\delta_{jk}\frac{\partial H}{\partial q_k}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)^{-1} \tag{5.10.13}$$

Por tanto, la condición resultante para el Hamiltoniano se lee

$$\left(\frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)^{-1}\right) = 0 \tag{5.10.14}$$

o en forma desarrollada

$$\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)^{-1}\right) = \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)^{-1}\right) \tag{5.10.15}$$

que da lugar, una vez factorizadas todas las derivadas, al denominado *criterio de separabilidad de Levi-Civita*

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_k} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_k} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_k} \tag{5.10.16}$$

Ésta es la condición pedida, cuando la ecuación de Hamilton−Jacobi es separable aditivamente. Se deja como ejercicio directo la demostración de la segunda parte del teorema. Esto es, cuando se satisfacen las relaciones anteriores, la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo tiene solución en la forma general $W = A_i f_i(q_i)$.

Debemos destacar que el teorema nos da una herramienta directa para la comprobación de separabilidad para las coordenadas elegidas del sistema, pero no nos ayuda a encontrar las coordenadas en las que el sistema es separable, si es que existen.

5.11. Apéndice B. Separabilidad y superintegrabilidad

Hemos visto que el teorema de Bertrand-Darboux (sección 4.10.3) nos permite hallar integrales primeras independientes del Hamiltoniano, y que por tanto podremos utilizarlo para verificar si un sistema dinámico es integrable, o en su caso, como veremos, *superintegrable*. De esta forma queda manifiesta la relación entre la separabilidad de un problema y su integrabilidad, y en su versión más extrema entre superseparabilidad (separabilidad del mismo problema en varios sistemas de coordenadas) y superintegrabilidad.

5.11.1. Superintegrabilidad

Un sistema superintegrable es aquel que tiene más de n constantes del movimiento independientes entre sí, pero no necesariamente en involución. Si existen $2n-1$ de tales constantes el sistema se denomina superintegrable maximal o directamente superintegrable. Como ejemplo sencillo, analizamos el sistema bidimensional en coordenadas cartesianas con el Hamiltoniano (por simplicidad con $m=1$)

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + V(x,y) \tag{5.11.1}$$

y con constantes del movimiento cuadráticas en los momentos, en la forma

$$A_i = a_i\left(x,y\right)p_x^2 + 2b_i\left(x,y\right)p_x p_y + c_i\left(x,y\right)p_y^2 + d_i(x,y) \tag{5.11.2}$$

Dado que tenemos un sistema bidimensional, tenemos $n=2$, y el número máximo de constantes independientes será $2n-1=3$, incluyendo el Hamiltoniano, por lo que la superintegrabilidad requiere la existencia e independencia de dos constantes A_1 y A_2 del tipo anterior. El estudio debe hacerse caso a caso, imponiendo una forma específica al Hamiltoniano, o a una de las constantes, y resolviendo la condición de involución para la segunda constante. Por ejemplo, si exigimos que el sistema tenga una constante de la forma

$$A_1 = p_x^2 + d_1(x,y) \tag{5.11.3}$$

su involución con el Hamiltoniano

$$[H,A_1] = -p_y\frac{\partial d_1}{\partial y} + \left(2\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial d_1}{\partial x}\right)p_x = 0 \tag{5.11.4}$$

debe ser válida para cualquier valor de p_x, p_y, y por tanto se requiere que, además,

$$\frac{\partial d_1}{\partial y} = 0 \rightarrow d_1 = d_1\left(x\right) \quad , \quad V\left(x,y\right) = f\left(x\right) + g(y) \tag{5.11.5}$$

Entonces, el corchete de Poisson de H con la segunda constante A_2, escrita en la forma

$$A_2 = A\left(x,y\right)p_x^2 + 2B\left(x,y\right)p_x p_y + C\left(x,y\right)p_y^2 + D(x,y) \tag{5.11.6}$$

nos llevaría a la involución

$$[H,A_2] = 0 \tag{5.11.7}$$

siempre que se cumpla el sistema asociado de ecuaciones en derivadas parciales

$$A\frac{df}{dx} + B\frac{dg}{dy} - \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \tag{5.11.8}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} + 2\frac{\partial B}{\partial x} = 0 \quad , \quad C\frac{dg}{dy} + B\frac{df}{dx} - \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial C}{\partial x} + 2\frac{\partial B}{\partial y} = 0 \tag{5.11.9}$$

A partir de las funciones A, B, C obtenidas, las ecuaciones restantes que determinan la forma del potencial superseparable son

$$A(y)\frac{df}{dx} + B(x,y)\frac{dg}{dy} = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial x} \quad , \quad C(x)\frac{dg}{dy} + B(x,y)\frac{df}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial y} \tag{5.11.10}$$

Eliminamos la función $D(x,y)$ tomando derivadas cruzadas, y llegamos a las condiciones para el potencial

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(A(y)\frac{df}{dx} + B(x,y)\frac{dg}{dy}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(C(x)\frac{dg}{dy} + B(x,y)\frac{df}{dx}\right) \tag{5.11.11}$$

Desarrollando los dos miembros, obtenemos la fórmula final

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)\frac{df}{dx}+\left(\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{dC}{dx}\right)\frac{dg}{dy}+B\left(\frac{d^2g}{dy^2}-\frac{d^2f}{dx^2}\right)=0 \tag{5.11.12}$$

El análisis subsiguiente debería realizarse para cada una de las soluciones posibles de esta ecuación para las funciones A, B, C. Por simplicidad aquí tomaremos la solución particular

$$A\left(y\right)=\frac{1}{2}y^2 \quad , \quad B\left(x,y\right)=-\frac{1}{2}xy \quad , \quad C\left(x\right)=\frac{1}{2}x^2 \tag{5.11.13}$$

Con esto, la ecuación que determina la forma del potencial se reduce a la expresión

$$3y\frac{df}{dx}-3x\frac{dg}{dy}-xy\left(\frac{d^2g}{dy^2}-\frac{d^2f}{dx^2}\right)=0 \tag{5.11.14}$$

que tiene la ventaja de ser separable en la forma

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{3}{x}\frac{df}{dx}=\frac{d^2g}{dy^2}+\frac{3}{y}\frac{dg}{dy} \tag{5.11.15}$$

La solución general para la función f es

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{3}{x}\frac{df}{dx}=m\rightarrow f=\frac{m}{8}x^2+\alpha x^{-2} \tag{5.11.16}$$

y análogamente para la función g

$$\frac{d^2g}{dy^2}+\frac{3}{y}\frac{dg}{dy}=m\rightarrow g=\frac{m}{8}y^2+\beta y^{-2} \tag{5.11.17}$$

Reuniendo los dos resultados, el potencial superseparable es de la forma

$$V\left(x,y\right)=\frac{m}{8}\left(x^2+y^2\right)+\alpha x^{-2}+\beta y^{-2} \tag{5.11.18}$$

Nos queda determinar la expresión de la constante A_2, y para ello nos queda por resolver el sistema de ecuaciones para la función D. Por ejemplo,

$$x^2\frac{dg}{dy}-xy\frac{df}{dx}=\frac{\partial D}{\partial y}\rightarrow D\left(x,y\right)=x^2g\left(y\right)-\frac{1}{2}y^2x\frac{df}{dx}=\alpha\frac{y^2}{x^2}+\beta\frac{x^2}{y^2} \tag{5.11.19}$$

y al mismo resultado se llegaría integrando la ecuación para $\partial D/\partial x$. La constante A_2 queda entonces

$$A_2=\frac{1}{2}\left(yp_x-xp_y\right)^2+\alpha\frac{y^2}{x^2}+\beta\frac{x^2}{y^2}\equiv\frac{1}{2}L^2+\alpha\frac{y^2}{x^2}+\beta\frac{x^2}{y^2} \tag{5.11.20}$$

y se expresa en función del momento angular del sistema $L=yp_x-xp_y$. Antes de terminar, comprobamos en este ejemplo concreto la relación directa de superintegrabilidad con superseparabilidad. Podemos ver que el potencial

$$V\left(x,y\right)=\frac{m}{8}\left(x^2+y^2\right)+\alpha x^{-2}+\beta y^{-2} \tag{5.11.21}$$

es separable en coordenadas cartesianas, dado que $V\left(x,y\right)=f\left(x\right)+g(y)$, y también en coordenadas polares (r,θ), dado que este sistema tiene la estructura separable

$$V\left(r,\theta\right)=\frac{m}{8}r^2+\frac{\alpha}{r^2\cos^2\theta}+\frac{\beta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\equiv V_1\left(r\right)+\frac{V_2\left(\theta\right)}{r^2} \tag{5.11.22}$$

5.11.2. Importancia de la superintegrabilidad

Los sistemas superintegrables pueden considerarse los sistemas resolubles que possen *todas* las simetrías posibles para su integración (esto es, son los sistemas mecánicos más *simétricos* desde el punto de vista matemático).

Retomemos el caso más sencillo de sistema superintegrable, la partícula libre, ahora en tres dimensiones, con energía constante y vector momento constante. Este sistema es separable en coordenadas cartesianas, coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas. Las constantes de movimiento correspondientes, junto con la energía, son

$$\boldsymbol{p} \equiv (p_x, p_y, p_z) = \text{cte} \tag{5.11.23}$$

en cartesianas,

$$(p_z, L_z) \tag{5.11.24}$$

en cilíndricas, y

$$\left(L_z, L^2\right) \tag{5.11.25}$$

en esféricas. Por tanto, este sistema tiene la suma de 6 constantes de movimiento, $\left(p_x, p_y, p_z, L_z, L^2, E\right)$ entre las cuales tenemos una relación funcional directa

$$E = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) \tag{5.11.26}$$

Así el sistema es maximal con $2n - 1 = 5$ constantes independientes del movimiento. La importancia de su superintegrabilidad es que nos permite encontrar la solución en distintos sistemas de coordenadas, y en función de distintas cantidades conservadas con lo cual la descripción del movimiento del sistema podrá ser más amplia, y podremos identificar más fácilmente las simetrías subyacentes. Por ejemplo, en la descripción en coordenadas cartesianas no hay mención a simetría alguna respecto a una rotación mientras que en coordenadas cilíndricas o esféricas, no queda claro que el vector momento sea una constante del movimiento, cuando así lo es.

Este comportamiento dinámico todavía tiene mayor relevancia en la transición a la Mecánica Cuántica, donde las cantidades conservadas clásicamente (como el momento o el momento angular) dan lugar a cantidades cuánticas (operadores cuánticos, y sus autovalores) que están cuantizadas, en el sentido que sus autovalores sólo pueden tomar valores discretos.

La presencia o no de suficientes cantidades cuantizadas (esto es, cantidades conservadas clásicamente) es de importancia primordial, puesto que estas cantidades son las portadoras de la información cuántica observable del sistema, y dicha información sólo será máxima cuando el sistema sea superintegrable.

5.12. Apéndice C. Acción en Mecánica Cuántica

5.12.1. Introducción

El desarrollo de la Mecánica Clásica ha dado lugar a una teoría final con carácter universal, independiente de la expresión concreta del Hamiltoniano del sistema. La pregunta sería, ¿por qué el nivel de profundidad termina en la definición de la función acción, y el principio de acción estacionaria? Este apéndice trata de dar una explicación razonada, tanto del papel clásico de la acción, como de su origen mecánico-cuántico.

5.12.2. Acción en Mecánica Clásica

La acción como función generadora Como hemos visto, para desarrollar la Mecánica podemos partir del siguiente postulado dinámico: El conjunto de las trayectorias de un sistema físico está determinado por la aplicación sucesiva en el tiempo de la transformación canónica infinitesimal

$$F_2(q, P, t) = q \cdot P + \delta t \cdot H(q, P, t) \tag{5.12.1}$$

válido en el mismo orden de aproximación en δt. Dicho funcional determina la evolución $q(t), p(t) \rightarrow q(t+\delta t), p(t+\delta t)$, donde$H(q,p,t)$ es el Hamiltoniano del sistema, y (q,p,t) son las variables canónicas y el tiempo. Hemos visto además que podemos denominar a esta transformación con el nombre exclusivo de la acción S (por las dimensiones físicas que tiene). Aplicando la propiedad de las transformaciones canónicas de ser grupo y que $dF_2 \equiv dS$ debe ser una diferencial total en sus variables (q,P), se deducen las relaciones

$$Q(t) = \frac{\partial S(q,P)}{\partial P} \equiv q(t+\delta t) \quad , \quad p(t) = \frac{\partial S(q,P)}{\partial q} \tag{5.12.2}$$

y de aquí se obtienen las ecuaciones de Hamilton del movimiento: dado que $\delta q = \dot{q}\delta t$ y $\delta p = \dot{p}\delta t$, obtenemos de

$$q(t+\delta t) = \frac{\partial S(q,P)}{\partial P} = q(t) + \delta t \cdot \frac{\partial H}{\partial P} = q(t) + \delta t \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{5.12.3}$$

$$p(t) = \frac{\partial S(q,P)}{\partial q} = p(t+\delta t) + \delta t \cdot \frac{\partial H}{\partial q} \Rightarrow \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{5.12.4}$$

De forma análoga se deduce la ecuación de Hamilton−Jacobi para la función acción S. Para ello debemos considerar la variación de S para una transformación finita, entre cuyos estados individuales está definida S en la forma infinitesimal anterior. La variación total de S al pasar del estado del sistema en $q(t), p(t), t$ al estado del sistema en $q(t'), p(t'), t'$ mediante una transformación finita, tiene el valor

$$\delta S = q' \cdot P' + \delta t' \cdot H' - p \cdot P - \delta t \cdot H \tag{5.12.5}$$

de donde se obtiene directamente la ecuación de Hamilton−Jacobi desde el estado inicial del sistema

$$\frac{\delta S}{\delta t} \equiv \frac{\partial S}{\partial t} = -H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) \tag{5.12.6}$$

ó también, hasta el estado final del sistema

$$\frac{\delta S}{\delta t'} \equiv \frac{\partial S}{\partial t'} = H\left(q', -\frac{\partial S}{\partial q'}, t'\right) \tag{5.12.7}$$

y como tal será función de las coordenadas y el tiempo, $S = S(q,t)$ ó $S = S(q',t')$. La ecuación de Hamilton−Jacobi indica que el Hamiltoniano transformado

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} \equiv 0 \tag{5.12.8}$$

es idénticamente cero, por lo que las variables canónicas (q,p) en el instante inicial t son constantes del movimiento, y el sistema dinámico queda resuelto en función de ellas. La conclusión es que la función acción es la función dinámica fundamental que determina la solución al problema en el tiempo. Hasta ahora no ha sido necesario apelar a ninguna forma funcional para la acción S, ya que se construye con la resolución de la ecuación de Hamilton- Jacobi.

La acción como integración en el tiempo del Lagrangiano Como función generadora, entre las cuatro posibilidades de definirla en función de las coordenadas y momentos, elegimos ahora la representación más general del tipo 1, $S = F_1(q,Q,t)$. Definimos entonces $S(q_1,t_1;q_2,t_2)$ como la función generadora que determina la evolución temporal del sistema desde el punto (q_1,t_1) al punto (q_2,t_2), con el sobrenombre de *acción clásica*. En virtud de su propia definición, y como puede deducirse de las ecuaciones de Hamilton- Jacobi, la evolución inversa en el tiempo desde el punto (q_2,t_2) al punto (q_1,t_1) está gobernada por la acción

$$S(q_2,t_2;q_1,t_1) = -S(q_1,t_1;q_2,t_2) \tag{5.12.9}$$

Tomando entonces cualquier punto intermedio (q,t) se debe satisfacer

$$S(q_1,t_1;q_2,t_2) = S(q_1,t_1;q,t) + S(q,t;q_2,t_2) \tag{5.12.10}$$

y lo mismo sucedería con cualquier secuencia de puntos intermedios que se elijan. Teniendo en cuenta estas dos propiedades, la función acción puede admitir una expresión integral del tipo

$$S(q_1,t_1;q_2,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt \tag{5.12.11}$$

donde $q_1 = q(t_1)$ y $q_2 = q(t_2)$, y L es una función continua de sus variables, denominada el *Lagrangiano* de sistema.
La dependencia de L en las derivadas temporales de q (esto es, $\dot{q}, \ddot{q}, ..$) debe limitarse a $\dot{q}$, si el sistema debe quedar caracterizado exclusivamente por su coordenada q y el tiempo. Por ejemplo, si L dependiera de $\ddot{q}$, para ser efectiva la partición arbitraria de la acción

$$S(q_1,t_1;q_2,t_2) = S(q_1,t_1;q,t) + S(q,t;q_2,t_2) \tag{5.12.12}$$

debería fijarse también el valor de la velocidad en el punto intermedio (q,t).
Finalmente, para obtener la expresión correcta del Lagrangiano, basta aplicar la identificación

$$pdq - Hdt \equiv dS \equiv Ldt = \frac{\partial S}{\partial q}dq + \frac{\partial S}{\partial t} \tag{5.12.13}$$

para obtener el Lagrangiano a partir del Hamiltoniano, mediante la transformación de Legendre

$$L(q,\dot{q}) = p(q,\dot{q})\cdot\dot{q} - H\left(q,p(q,\dot{q})\right) \tag{5.12.14}$$

La acción estacionaria como Principio variacional del movimiento Por el momento la mera introducción del Lagrangiano no determina propiedades diferentes para la función acción. El cambio drástico se produce cuando asumimos un principio variacional del movimiento, de forma que la acción pasa de ser la función $S(q(t))$ para la trayectoria dada $q(t)$, a ser el funcional $S[q]$ definido para todas las trayectorias posibles compatibles con las condiciones frontera $q_1 = q(t_1), q_2 = q(t_2)$. Y el principio variacional del movimiento establece que entre todas las trayectorias posibles $q(t)$, la trayectoria real del sistema, digamos $q^*(t)$ es la que hace estacionaria la acción. Esto es, satisface $\delta S[q^*] = 0$.
La gran particularidad de un principio variacional es que entran en juego todos los movimientos compatibles, y no sólo la trayectoria que sigue el sistema en realidad. En cierta manera, se hace una selección *natural* del movimiento del sistema entre todos aquellos movimientos posibles a priori. En algunos casos, los movimientos descartados sólo son meras soluciones inestacionarias que tienden con el tiempo a la solución real (p.e. en el principio de energía potencial mínima), pero en otros casos esta necesidad de incluir estados de movimiento no reales tiene profundas implicaciones en la propia teoría mecánica, como sucede con el principio de acción estacionaria. Veamos cuál es su origen.

5.12.3. Principio de acción estacionaria

Intro: Principio de energía potencial mínima Es uno de los ejemplos más sencillos de la formulación variacional del movimiento, en este caso, de la propia ausencia de movimiento. Según este principio, todo lo que nos rodea y está en reposo respecto a un sistema inercial de coordenadas, ocupa una posición de energía potencial mínima, y si está en movimiento, es porque se dirige hacia la posición de energía potencial mínima. Los puntos donde la energía potencial tiene un extremo (mínimo o máximo) se denominan *puntos de equilibrio*, y pueden ser estables, inestables o neutros. Por esta diversidad, realmente estaríamos hablando del principio de energía potencial estacionaria. Y por su universalidad, este principio nos permite comparar físicamente sistemas aparentemente muy dispares.

La ley matemática del movimiento que generaliza este principio estacionario es la segunda ley de Newton, escrita en la forma

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \tag{5.12.15}$$

y su uso nos exige un esfuerzo matemático mayor al tener que caracterizar con más detalle cada sistema, por ejemplo con el uso de vectores como fuerzas y torques.
El principio variacional es mucho más sencillo matemáticamente, y conceptualmente más profundo. Tomemos como ejemplo el caso de un cuerpo continuo elástico que sufre una deformación $y(x)$ dada en función de la coordenada x. Su energía potencial elástica está dada por el funcional de $y(x)$

$$V[y] = \int_a^b \rho\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}, x\right) dx \tag{5.12.16}$$

para la densidad de energía elástica ρ, entre los extremos fijos $x = a$ y $x = b$ del cuerpo. Exigiendo que dicho funcional sea estacionario, llegamos a las ecuaciones de Euler−Lagrange para la deformación $y(x)$, y con su integración determinamos la posición de equilibrio del cuerpo.

Principio de acción estacionaria De modo análogo al caso anterior, el principio de acción estacionaria establece que el funcional acción

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \tag{5.12.17}$$

funcional de $q(t)$, dado el Lagrangiano L, entre los extremos fijos del movimiento $q_1 = q(t_1), q_2 = q(t_2)$, debe ser estacionario. Aplicando matemáticamente la condición de variación nula a $S[q]$, llegaríamos a las ecuaciones de Euler−Lagrange para $q[t]$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{5.12.18}$$

y con su integración obtendríamos la ley de movimiento para el sistema.
El desarrollo de la Mecánica Clásica ha dado lugar a una teoría final con carácter universal, independiente de la expresión concreta del Hamiltoniano del sistema, y sin embargo, se hace incompresible el uso de todo tipo de *trayectorias compatibles* para la formulación variacional. A diferencia del principio de energía potencial, el principio de acción sí hereda la estructura de una formulación teórica superior, la Mecánica Cuántica. De aquí surge la pregunta mencionada anteriormente: Entonces, ¿por qué el nivel de profundidad termina en la definición de la función acción, y el principio de acción estacionaria? Veámoslo ahora.

5.12.4. Acción en Mecánica Cuántica

La Mecánica Cuántica es el punto de partida para la fundamentación teórica de la Mecánica Clásica, a pesar de que históricamente la primera se desarrolló como una extensión de la segunda, cuando los sistemas bajo estudio tomaron dimensiones atómicas o moleculares. La constante universal que divide el ámbito de aplicación de cada una de ellas es la constante h de Planck, que en su versión reducida se escribe $\hbar \equiv h/2\pi$. El hecho fundamental es que tiene dimensiones de acción y una magnitud extremadamente pequeña, $10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$.
La Mecánica Cuántica nace de dos hechos novedosos inexistentes en la teoría clásica, el carácter ondulatorio de la evolución dinámica de los sistemas, y el carácter probabilístico asociado a la medida experimental.

Onda de materia Todo sistema en evolución (p.e. una partícula puntual) tiene asociada una función de onda $\psi(x,t)$ compleja, cuyo módulo al cuadrado $|\psi(x,t)|^2$ determina la probabilidad de ser detectado experimentalmente en (x,t).

Desde el punto de vista clásico, una onda arbitraria está caracterizada por un vector de onda k y una frecuencia de oscilación ω, y su fase (armónica en este caso) está dada por

$$\phi \equiv kx - \omega t \tag{5.12.19}$$

mientras que una partícula puntual (en este caso libre) tiene momento p y energía E definidos. Desde el punto de vista cuántico, las dos descripciones son totalmente análogas y complementarias. Es la llamada *dualidad onda- corpúsculo*. Esto quiere decir que el par (k, ω) está relacionado con (p, E) y dicha relación la establece la constante de Planck, creándose la llamada *onda de materia* asociada a la partícula con las propiedades

$$p = \hbar k \quad , \quad E = \hbar \omega \tag{5.12.20}$$

La cuestión fundamental que se deduce es que entonces la fase asociada a la onda de materia se escribe (para la partícula libre)

$$\phi = \frac{1}{\hbar}(px - Et) \equiv \frac{S}{\hbar} \tag{5.12.21}$$

y por tanto, es igual a la variable clásica de acción en unidades de $\hbar$. La acción que tenía el papel de una función auxiliar en la teoría clásica, tiene ahora un papel de primer orden en la teoría cuántica. Además, en claro contraste con la partícula clásica, por su propia definición la partícula cuántica no está localizada en una posición del espacio, sino que cubre espacialmente la región accesible a su función de onda asociada.

Integración sobre caminos Como segundo punto relevante, la teoría cuántica tiene una naturaleza no determinista: solamente a través de la medida experimental somos capaces de discernir, y siempre a posteriori, las características físicas de un sistema cuántico, en claro contraste con el carácter determinista de la Mecánica Clásica, donde se produce conocimiento completo del sistema a partir de, únicamente, sus condiciones iniciales de movimiento.
El concepto clásico de trayectoria de un sistema clásico desde el punto (q', t') al punto (q'', t'') debe sustituirse por el concepto cuántico de la denominada *amplitud de probabilidad* $\langle q', t'|q'', t''\rangle$ para que el sistema evolucione desde un estado inicial $|q', t'\rangle$ al estado final $|q'', t''\rangle$ a través del camino marcado por la función $q(t)$. Y lo mismo que $q(t)$ representa la posición del sistema clásico en su trayectoria, la función de onda $\psi(q(t))$ representa el estado del sistema en su evolución sobre el camino $q(t)$.
A diferencia del caso clásico, en el mundo cuántico sí tiene sentido considerar todas las posibles opciones, es decir todos los posibles caminos $q(t)$, que lleven al sistema desde el estado $|q', t'\rangle$ al estado $|q'', t''\rangle$. Esto es así, puesto que la partícula está totalmente deslocalizada hasta el momento que es medida experimentalmente. Es decir, siempre existe probabilidad no nula de que la partícula pase por cualquier estado intermedio compatible con las condiciones externas, de forma que todas las posibles funciones de onda del sistema participan. Y cada una de ellas, como toda onda compleja, será de la forma (módulo $\times\, e^{i\cdot \text{fase}}$)

$$\psi(q(t)) = A \cdot e^{iS(q,t)/\hbar} \tag{5.12.22}$$

donde $S(q, t)$ es la acción clásica para el camino cuántico $q(t)$ desde el punto inicial $q' = q(t')$. Es un postulado de la Mecánica Cuántica que todas las funciones de onda contribuyan con el mismo módulo constante A, ya que se asume que no hay ningún camino $q(t)$ predominante frente al resto que la función de onda del sistema puede elegir a priori, ya que no existen condiciones a priori que deba satisfacer. Por tanto, la amplitud de probabilidad para la transición $|q', t'\rangle \to |q'', t''\rangle$ será la suma de las funciones de onda sobre todos los caminos compatibles con las condiciones externas

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \sum_{q(t)} A \cdot e^{iS(q,t)/\hbar} \tag{5.12.23}$$

Límite clásico. Principio de acción estacionaria La aproximación clásica se produce cuando las dimensiones del sistema (su masa, su posición o el tiempo) son tan grandes que la acción

del sistema es mucho mayor que $\hbar$, esto es, $S \gg \hbar$. En este caso, la fase $S/\hbar$ es una cantidad enormemente grande, y el consiguiente factor exponencial $e^{iS(q,t)/\hbar}$ da lugar a funciones seno y coseno con oscilaciones muy fuertes, y sin signo definido. Entonces, al movernos de una trayectoria dada a una trayectoria infinitesimalmente vecina, dando lugar a un cambio en S infinitesimal, resultará un gran cambio en la fase, esto es, una gran oscilación sin signo definido en la función de onda resultante, de forma que en promedio la contribución del conjunto de trayectorias vecinas tiende a anularse.
Sólo cuando un conjunto de trayectorias vecinas no dé lugar a un cambio apreciable en la acción, podremos obtener una contribución neta no nula a la función de onda en el camino correspondiente al valor extremo de la acción. Matemáticamente en este límite clásico nos encontramos que todos los caminos cuánticos tendrán una probabilidad nula de ser recorridos por la función de onda del sistema, salvo uno, el que corresponde con la camino real de la partícula, $q^*(t)$, su trayectoria, que se recorrerá con probabilidad igual a la unidad. Por tanto, se debe satisfacer

$$\langle q', t'|q, t\rangle \approx A \cdot e^{iS(q^*,t)/\hbar} = e^{iS(q^*,t)/\hbar} \tag{5.12.24}$$

dado que la probabilidad (módulo al cuadrado de la amplitud de la probabilidad) es la unidad

$$|\langle q', t'|q, t\rangle|^2 = |A|^2 = 1 \tag{5.12.25}$$

Para una trayectoria vecina, tendremos la acción $S' = S + \delta S$ y la amplitud de probabilidad en primer orden tomará el mismo valor

$$\langle q', t'|q, t\rangle = e^{iS(q^*,t)/\hbar} e^{i\delta S(q^*,t)/\hbar} = e^{iS(q^*,t)/\hbar} \tag{5.12.26}$$

siempre que la acción clásica sea estacionaria, $\delta S(q^*, t) = 0$.

5.12.5. Ecuación de Hamilton−Jacobi y ecuación de Schrödinger

En la teoría cuántica, las variables canónicas del sistema clásico (q, p) en el espacio de fases pasan a ser los operadores $(\hat{q}, \hat{p})$ sobre el espacio de las funciones de onda del sistema cuántico (espacio de Hilbert). En cada observación o medición física sobre el sistema cuántico el objetivo será la determinación del autovalor que corresponde al sistema en estudio y al operador asociado, y dicho autovalor será la magnitud física obtenida en dicho experimento.
Por tanto, escribimos

$$\hat{q}\psi = q\psi \quad , \quad \hat{p}\psi = p\psi \tag{5.12.27}$$

siendo q, p los (auto-)valores de la coordenada y el momento del sistema estudiado.
De la misma forma, en la teoría cuántica los corchetes de Poisson del sistema clásico definidos en el espacio de fases, por ejemplo $[q, p] = 1$, pasan a ser los conmutadores entre los operadores correspondientes sobre el espacio de las funciones de onda del sistema cuántico (espacio de Hilbert), por ejemplo $\left[\hat{q}, \hat{p}\right]_- \equiv \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q}$.

Principio de correspondencia de Bohr La profunda relación entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica queda descrita por este principio, que establece que en el límite clásico, $\hbar \to 0$, las leyes de la física cuántica deben reducirse a las leyes de la física clásica. Dado que el conmutador de dos operadores satisface las mismas propiedades matemáticas que el corchete de Poisson de dos variables, el principio de correspondencia queda descrito matemáticamente con la equivalencia formal

$$[A, B]_{C.P.} \longleftrightarrow \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]_- \tag{5.12.28}$$

entre el corchete de Poisson de dos variables A, B definidas en el espacio de fases de la mecánica clásica y el conmutador cuántico de los dos operadores $\hat{A}, \hat{B}$ asociados definidos sobre el espacio de Hilbert de las funciones de onda del sistema.

Operador de posición Corresponde al observable posición del sistema, siendo su autovalor la coordenada de posición del sistema. Por tanto, como hemos visto, escribimos

$$\hat{q}\psi = q\psi \tag{5.12.29}$$

Operador de momento Al aplicar el lenguaje operacional al observable de momento nos encontramos con una dificultad formal. En la mecánica clásica, el momento de una partícula se calcula multiplicando la masa de la partícula por su velocidad, y ésta última, básicamente, es el cociente entre un incremento de distancia y un incremento de tiempo. En la mecánica cuántica, es imposible realizar una medida sin alterar el estado del sistema. En este caso concretamente, al medir dos posiciones en el tiempo, la medida de la posición en el primer instante del tiempo induce un cambio en el sistema, que altera el resultado de la segunda medida. Es decir, no sabemos que estamos calculando exactamente, pero ciertamente no puede ser el momento de la partícula. El problema formal al aplicar la definición clásica $p = mdq/dt$ a cualquier colección de partículas microscópicas surge al ser imposible medir la posición de las mismas sin alterar su estado de movimiento.
Esta cuestión puede resolverse apelando a la teoría desarrollada por De Broglie. En esta teoría las propiedades físicas de la partícula están asociadas a propiedades ondulatorias de la onda de materia asociada. En particular, el momento se define como $p = \hbar k$, siendo k el vector de onda. Como hemos visto, definimos el operador momento tal que

$$\hat{p}\psi = p\psi \tag{5.12.30}$$

Dado que $\psi = \psi(q,t)$, esta fórmula será útil si describimos la acción del operador en función de la coordenada q y el tiempo. Para ello, elegimos una función de onda que tenga un momento definido, como es la onda de materia de De Broglie, con la expresión

$$\psi(q(t)) \equiv A \cdot e^{iS(q,t)/\hbar} = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(pq-Et)} \tag{5.12.31}$$

De la definición del operador de momento, debemos obtener en este caso

$$\hat{p}A \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(pq-Et)} = pA \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(pq-Et)} \tag{5.12.32}$$

que equivale a aplicar el operador de derivación

$$\hat{p} \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial q} \tag{5.12.33}$$

que como indicamos es útil para determinar operacionalmente la información sobre el momento de la partícula contenida en la función de onda, por lo que no debe considerarse que esta expresión tiene mayor sentido físico. Comprobamos además que se satisface el principio de correspondencia, dado que

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{q},\hat{p}\right]_{-} = \mathbb{1} \tag{5.12.34}$$

siendo $\mathbb{1}$ el operador unidad, esto es,

$$\mathbb{1}\psi = \psi \tag{5.12.35}$$

Efectivamente operando encontramos que

$$\left[\hat{q},\hat{p}\right]_{-}\psi \equiv \hat{q}\left(\hat{p}\psi\right) - \hat{p}\left(\hat{q}\psi\right) = -i\hbar q\frac{\partial\psi}{\partial q} + i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\left(q\psi\right) = i\hbar\psi \tag{5.12.36}$$

Operador de Hamilton Clásicamente el Hamiltoniano determina la evolución temporal en el espacio de fases de las variables canónicas, expresado matemáticamente en las ecuaciones de Hamilton con ayuda de los corchetes de Poisson

$$\frac{dq}{dt} = [q,H]_{C.P.} \quad , \quad \frac{dp}{dt} = [p,H]_{C.P.} \tag{5.12.37}$$

donde se asume por definición que las variables canónicas son independientes del tiempo elegido, esto es,

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{5.12.38}$$

Desde el punto de vista cuántico, existen dos entidades matemáticas diferenciadas, los operadores y las funciones de onda, y ambos pueden ser dependientes del tiempo en su definición. Surgen así dos imágenes distintas de la evolución temporal del sistema cuántico. Para la llamada *imagen de Schrödinger*, toda la dependencia temporal está contenida en la función de onda, y los operadores no dependen del tiempo. Por el contrario, en la *imagen de Heisenberg* la función de onda se asume constante en el tiempo, y son los operadores los que evolucionan en el tiempo. Analizamos en particular el Hamiltoniano en la imagen de Schrödinger, para la cual se satisface la constancia de todos los operadores en el tiempo. En particular, tenemos

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = 0 \tag{5.12.39}$$

De acuerdo con el principio de correspondencia, la ecuación cuántica para la evolución de los operadores en la imagen de Schrödinger corresponde a

$$\frac{dq}{dt} = \cancelto{0}{\frac{\partial q}{\partial t}} + [q, H]_{C.P.} \Rightarrow \cancelto{0}{\frac{d\hat{q}}{dt}} = i\hbar \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \left[\hat{q}, \hat{H}\right]_{-} \tag{5.12.40}$$

$$\frac{dp}{dt} = \cancelto{0}{\frac{\partial p}{\partial t}} + [p, H]_{C.P.} \Rightarrow \cancelto{0}{\frac{d\hat{p}}{dt}} = i\hbar \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \left[\hat{p}, \hat{H}\right]_{-} \tag{5.12.41}$$

Fijándonos en la primera fórmula, vemos que sólo podrá ser de utilidad si somos capaces de describir la acción del operador Hamiltoniano $\hat{H}$ en función de la coordenada q y el tiempo. De hecho, aplicando la relación dada a la función de onda obtenemos

$$i\hbar \frac{\partial \hat{q}}{\partial t}\psi = -\hat{q}\left(\hat{H}\psi\right) + \hat{H}\left(\hat{q}\psi\right) \tag{5.12.42}$$

Asumiendo que $\hat{H}$ admite también la representación en forma de operador de derivación, como hicimos anteriormente con el operador de momento $\hat{p}$, obtenemos el desarrollo correspondiente en la forma

$$i\hbar \frac{\partial \hat{q}}{\partial t}\psi = -\hat{q}\left(\hat{H}\psi\right) + \hat{H}\left(\hat{q}\right)\psi + \hat{q}\left(\hat{H}\psi\right) = \hat{H}\left(\hat{q}\right)\psi \tag{5.12.43}$$

y de aquí podemos identificar la asignación operacional que buscabamos

$$\hat{H} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tag{5.12.44}$$

Comprobamos además que se obtiene el valor correcto de la energía de la partícula con este operador para la onda de materia de De Broglie

$$\hat{H} e^{\frac{i}{\hbar}(pq - Et)} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{\frac{i}{\hbar}(pq - Et)} = E\, e^{\frac{i}{\hbar}(pq - Et)} \Rightarrow \hat{H}\psi = E\psi \tag{5.12.45}$$

Ecuación de Schrödinger A diferencia de las ecuaciones de evolución anteriores, la ecuación de Schrödinger es la ecuación de evolución temporal para la función de onda del sistema. Para obtenerla, basta aplicar la ecuación de autovalores

$$\hat{H}\psi = H\psi \tag{5.12.46}$$

siendo H el autovalor correspondiente del operador de Hamilton, que no tiene por qué ser constante en el tiempo. Como ejemplo, para el sistema usual conservativo de la mecánica clásica para una partícula de masa m, el Hamiltoniano es

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V \tag{5.12.47}$$

y de aquí obtenemos para el operador cuántico la expresión

$$\hat{H} \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \equiv \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)^2 + V(\hat{q}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(\hat{q}) \tag{5.12.48}$$

Introduciendo ahora la dependencia en el tiempo, dado que también se satisface, como hemos visto, $\hat{H} = i\hbar\partial/\partial t$, obtenemos la ecuación de evolución dependiente del tiempo para la función de onda del sistema (la denominada *ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo*):

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2} + V(q)\psi \tag{5.12.49}$$

al ser obviamente $V(\hat{q})\psi = V(q)\psi$ para $\psi = \psi(q,t)$.
En el caso de un sistema de energía constante, $H = E = \text{cte}$, que se denomina *estado cuántico estacionario*, la ecuación resultante se denomina *ecuación de Schrödinger independiente del tiempo*:

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dq^2} + V(q)\psi \tag{5.12.50}$$

donde aquí $\psi = \psi(q)$ tras extraer la variable temporal de la función de onda aplicando la factorizacion $\psi(q,t) = \psi(q)e^{-iEt/\hbar}$.

Ecuación cuántica de Hamilton−Jacobi Asumiendo entonces la expresión general de la función de onda cuántica en función de la acción

$$\psi(q(t)) = A \cdot e^{iS(q,t)/\hbar} \tag{5.12.51}$$

obtenemos la ecuación cuántica (esto es, ecuación de Schrödinger) para la acción clásica, en la forma

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + V(q) - \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial q^2} \tag{5.12.52}$$

Si el último término es despreciable (por ejemplo, si $\hbar \to 0$), esta ecuación se reduce a la *ecuación clásica de Hamilton−Jacobi*

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + V(q) \tag{5.12.53}$$

probado que la función S se define como una función real y se identifica con la acción del sistema. Como sabemos, esta aproximación corresponde al límite $S \gg \hbar$ de la física clásica, y por tanto la ecuación de Schrödinger se reduce a la ecuación de Hamilton−Jacobi en este límite, es decir, la ecuación de evolución de la función de onda se reduce a la ecuación de evolución para el sistema clásico, y la dinámica del espacio de funciones (espacio de Hilbert) se reduce a la dinámica en el espacio de fases.

5.12.6. Principio de superposición y colapso de la función de onda

Principio cuántico de superposición Aun así algo muy importante se pierde en el límite clásico. La ecuación de Schrödinger es lineal: si ψ_1, ψ_2 son dos soluciones, también será solución cualquier combinación lineal de la forma

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \tag{5.12.54}$$

donde c_1, c_2 son coeficientes complejos en general. En cambio, la ecuación clásica de Hamilton−Jacobi no es lineal para la función S: si S_1, S_2 son dos soluciones, correspondientes a distintas trayectorias en el espacio de fases, entonces claramente cualquier combinación lineal de la forma

$$S = a_1S_1 + a_2S_2 \tag{5.12.55}$$

con a_1, a_2 coeficientes reales, no será solución de dicha ecuación, y en consecuencia este movimiento combinado resultante no será observado en el mundo clásico (mundo macroscópico). Sin embargo, la mecánica clásica sí se define como una aproximación de la mecánica cuántica, , en el límite $S \gg \hbar$ ó $\hbar \to 0$. Y como tal aproximación la teoría cuántica se aplica también a los sistemas macroscópicos, luego la superposición de movimientos debe existir en el mundo macroscópico, aunque no sean detectables experimentalmente (al menos con la tecnología actual).
Por tanto, uno debe enfrentarse a la siguiente pregunta: ¿por qué los sistemas clásicos que obedecen las reglas de la mecánica clásica no se encuentran experimentalmente en superposiciones de estados con diferentes posiciones, a pesar de lo que sugiere la mecánica cuántica? O resumido en un ejemplo sencillo, ¿por qué en el movimiento de rebote de una pelota sobre el suelo, observamos el movimiento continuo de arriba abajo y viceversa, y no observamos el, también posible, movimiento discontinuo combinación de distintos tramos de las trayectorias ascendente y descendente?

Colapso macroscópico de la función de onda Esta ausencia de superposiciones macroscópicas tiene su raíz en el llamado *problema de la medición* en la física cuántica. Para explicarlo pensemos en un sistema cuántico,

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \tag{5.12.56}$$

descrito por la superposición de dos estados de un observable físico representado por el operador $\hat{O}$, que interacciona con un aparato de medida clásico, digamos A. Inmediatamente después de la interacción (ó proceso de medida), el estado combinado del sistema y el aparato vendrá descrito por la función de onda combinada

$$\psi = c_1\psi_1 A_1 + c_2\psi_2 A_2 \tag{5.12.57}$$

donde las posiciones A_1, A_2 del puntero de A se corresponden con los estados medibles de sistema, ψ_1, ψ_2. Por tanto, si el sistema cuántico estaba en el estado $\psi_1(\psi_2)$ cuando interaccionó con el aparato, el puntero marcaría la posición correspondiente $A_1(A_2)$, con lo que interpretaríamos que el observable experimental tenía el valor $O_1(O_2)$.
Desde el punto de vista cuántico, la evolución de la función de onda ψ del sistema sería lineal y acorde con la ecuación de Schrödinger, y se preservaría la superposición lineal de las dos partes:

$$\psi(t) = c_1\psi_1(t)A_1 + c_2\psi_2(t)A_2 \tag{5.12.58}$$

Sin embargo, no es el comportamiento que se observa experimentalmente en la medida cuántica, ya que el resultado de la medida se corresponde únicamente con el puntero en la posición A_1 (y por tanto el sistema en el estado ψ_1) o con el puntero en la posición A_2 (y por tanto el sistema en el estado ψ_2). Si se realiza un conjunto de medidas similares sobre sistemas cuánticos idénticos, el resultado obtenido estará de acuerdo con la distribución de probabilidad de Born: medidas repetidas sobre el mismo estado cuántico inicial darían el resultado ψ_1 ó ψ_2 con probabilidad relativa $|c_1|^2$ ó $|c_2|^2$.
Por tanto, es el propio proceso de medida el responsable de la eliminación de la superposición de los estados iniciales ψ_1, ψ_2. Y esto tiene que ver con el hecho de que el aparato clásico que se utiliza para medir el sistema (que es un objeto macroscópico) no puede observarse simultáneamente en superposición lineal de las posiciones A_1, A_2 del puntero.
Otro punto muy importante que merece la pena mencionar es la aparición de la *probabilidad cuántica*. Tanto la ecuación de Schrödinger como su ecuación límite de Hamilton−Jacobi son ecuaciones deterministas, y no admiten una interpretación probabilística. Más aun teniendo en cuenta que el estado cuántico inicial se determina de forma exacta (con un conjunto de autovalores de los operadores que representan lo observables físicos), tampoco debe aparecer la interpretación clásica de la probabilidad generada por la incertidumbre en el conocimiento del estado inicial del sistema.
Siendo así es necesario explicar cómo aparece la probabilidad durante la medida, de forma que los números complejos c_1, c_2 pasan de ser meros coeficientes de una superposición lineal a computar la probabilidad relativa del estado cuántico al que el sistema es dirigido tras la medida.

5.12.7. Modelos actuales para el colapso de la función de onda

Referencia Véase el artículo de revisión *Models of wave-function collapse: Underlying theories and experimental tests*, de Angelo Bassi, Kinjalk Lochan, Seema Satin, Tejinder P. Singh, Hendrik Ulbricht, disponible en http://arxiv.org/abs/1204.4325

Ejemplo. Colapso de la función de onda inducido por la gravedad Es un hecho muy destacable que la unidad física fundamental de masa, la masa de Planck, dada por la expresión

$$m_P \equiv \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} \approx 10^{-5}\,\mathrm{gr} \tag{5.12.59}$$

se sitúe numéricamente cerca del rango donde teóricamente se produce la transición del mundo cuántico al mundo clásico. Esto parece indicar que la masa tiene un papel relevante en la asignación a un cuerpo masivo del carácter cuántico o clásico. Y siendo además la masa responsable de la gravedad, puede suponerse una cierta acción de la gravedad en esta transición cuántico-clásica, inducida por el colapso de la función de onda, y posterior localización de la misma.

Ecuación de Schrödinger-Newton Para la física cuántica, todo sistema en evolución (en nuestro caso, consideramos una partícula puntual) tiene asociada una función de onda $\psi(x,t)$ compleja, cuyo módulo al cuadrado $|\psi(x,t)|^2$ determina la probabilidad de ser detectado experimentalmente en (x,t).
De esta forma, si una partícula tiene masa m, desde el punto de vista cuántico, tendrá asociada una densidad local de masa

$$\rho(x,t) = m|\psi(x,t)|^2 \tag{5.12.60}$$

de forma que la condición de normalización de la onda

$$\int |\psi(x,t)|^2 dx = 1 \tag{5.12.61}$$

es decir, la afirmación de que la probabilidad de ser detectada el cualquier punto del espacio, en cada instante de tiempo, debe ser uno, lleva directamente a la conservación de la masa del sistema, en cada instante de tiempo,

$$\int \rho(x,t)dx = m\int |\psi(x,t)|^2 dx = m \tag{5.12.62}$$

Esta densidad de masa creará, a su vez, un campo de gravedad en el espacio, cuyo potencial gravitatorio U satisface la correspondiente ecuación de Poisson

$$\nabla^2 U = 4\pi G\rho = 4\pi G m|\psi(x,t)|^2 \tag{5.12.63}$$

con la solución conocida

$$U(x,t) = -G\int \frac{\rho(x',t)}{|x-x'|}dx' \tag{5.12.64}$$

Dado que la función de onda tiene una extensión espacial distinta de cero, es decir, no es una función definida en un único punto, como correspondería a una partícula clásica puntual, existirá una autointeracción gravitatoria entre las propias partes del sistema entre sí, ya que todas están dotadas de densidad de masa. Esta energía potencial gravitatoria que sufre la partícula, cuando se localiza en (x,t) está dada por

$$V(x,t) = mU(x,t) \tag{5.12.65}$$

recordando que $U(x,t)$ es el potencial gravitatorio en su punto (e instante) de localización.
Incorporando la interacción gravitatoria en la ecuación cuántica de Schrödinger de la partícula, obtenemos una ecuación acoplada de movimiento, denominada *ecuación de Schrödinger-Newton*

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi \quad , \quad \nabla^2 V = 4\pi G m^2|\psi|^2 \tag{5.12.66}$$

asumiendo implícitamente que no existe otro potencial de interacción salvo el debido a la gravedad.
Sin querer analizar en detalle dicha ecuación, detallamos alguno de sus aspectos más relevantes:

- Supongamos que sea a una escala de longitud característica del sistema, y por tanto una longitud sobre la cual la función de onda será distinta de cero de forma apreciable. En ese caso, la energía cuántica asociada al movimiento será del orden

$$E \sim \frac{\hbar^2}{2ma^2} \tag{5.12.67}$$

mientras que la parte gravitatoria, esto es, la energía potencial gravitatoria, será del orden

$$V \sim \frac{Gm^2}{a} \tag{5.12.68}$$

Podemos estimar la importancia relativa de la gravedad definiendo el cociente entre las dos cantidades en la forma, y con el valor,

$$\frac{V}{E} \sim \frac{2Gm^3a}{\hbar^2} \tag{5.12.69}$$

Tomando ahora como ejemplo el caso típico de un electrón en un átomo, donde a es del orden del radio de Bohr, obtenemos la estimación $V/E \sim 10^{-43}$, cantidad totalmente despreciable que indica que la gravedad no tiene ninguna relevancia en el mundo cuántico microscópico. Sin embargo, a medida que la masa de la partícula aumenta, aumentará también el cociente V/E llegando a un punto en el que el término no lineal de la ecuación de movimiento (la autointeracción gravitatoria) pasa a ser dominante, en cuyo caso se debe esperar una ruptura de las predicciones usuales de la ecuación de Schrödinger.

- Otra característica fundamental es que el término añadido, dependiente de la autointeracción gravitatoria, no va a producir ningún deriva adicional en el movimiento usual del sistema , de forma que se mantiene válida la descripción dada por el *teorema de Ehrenfest*: la dinámica de los valores medios de posición ($\langle x \rangle$) y momento ($\langle p \rangle$) del sistema siguen las leyes clásicas. Matemáticamente

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{\langle p \rangle}{m} \quad , \quad \frac{d\langle p \rangle}{dt} = \langle F \rangle \tag{5.12.70}$$

siendo $\langle F \rangle$ el valor medio de la fuerza ejercida sobre el sistema. Estos promedios se deben realizar de acuerdo con la naturaleza cuántica del sistema, esto es,

$$\langle F \rangle(t) \equiv \int F(x,t)|\psi(x,t)|^2 dx \tag{5.12.71}$$

Solución de onda plana En ausencia de interacción gravitatoria, la solución de la ecuación de Schrödinger para una partícula libre es la onda de materia con momento p definido (la denominada *onda plana*)

$$\psi(x(t)) = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \tag{5.12.72}$$

y energía

$$E = \frac{p^2}{2m} \tag{5.12.73}$$

como puede comprobarse por substitución directa. Para esta solución la densidad de probabilidad es constante,

$$|\psi|^2 = |A|^2 \tag{5.12.74}$$

de forma que la partícula libre puede ser detectada en cualquier punto del espacio con la misma probabilidad. El valor de esta probabilidad será tal que

$$\int |\psi(x,t)|^2 dx = 1 \rightarrow |A|^2 = \frac{1}{\text{Vol}} \tag{5.12.75}$$

siendo Vol $\equiv \int dx$ el volumen (previsiblemente infinito) del espacio accesible a la partícula. Este hecho de que la partícula esté completamente deslocalizada se debe a que su momento está completamente definido, como se deduce directamente del *Principio de incertidumbre de Heisenberg*

$$\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar \;\Rightarrow\; \Delta x = \infty \;\text{ si }\; \Delta p = 0 \tag{5.12.76}$$

Al incorporar entonces la interacción gravitatoria, la onda de materia de momento definido (onda plana) sigue siendo una solución del sistema, dado que el potencial de interacción toma un valor despreciable

$$V = -Gm^2|A|^2 \int \frac{dx'}{|x-x'|} = -Gm^2 \frac{1}{\text{Vol}} \int \frac{dx'}{|x-x'|} \to 0 \tag{5.12.77}$$

al ser el volumen infinito. Si fuera el caso de un volumen finito del sistema, por ejemplo el caso más usual de un sistema confinado en un cubo de lado L, el potencial de interacción tomaría un valor no nulo en su interior, pero constante, digamos $-V_0$, con $V_0 > 0$. Incluso en este caso, la onda plana sigue siendo solución de la ecuación de Schrödinger-Newton y tendría momento p y energía

$$E = \frac{p^2}{2m} - V_0 \tag{5.12.78}$$

Estados estacionarios (auto-) ligados La ecuación de Schrödinger-Newton admite, de la misma forma que la ecuación pura de Schrödinger, la existencia de estados estacionarios, esto es, estados con una función de onda de la forma

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\varphi(x) \tag{5.12.79}$$

para los cuales la densidad de probabilidad resulta ser independiente del tiempo, de ahí el nombre de *estado estacionario*. La función auxiliar $\varphi(x)$ satisface la *ecuación de Schrödinger-Newton independiente del tiempo*

$$E\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + V\varphi \quad , \quad \nabla^2 V = 4\pi G m^2 |\varphi|^2 \tag{5.12.80}$$

Solución con simetría esférica Asumiendo que la función de onda auxiliar φ muestra una simetría esférica alrededor de cualquier punto arbitrario, su ecuación se escribe

$$E\varphi = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) + V\varphi \quad , \qquad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 4\pi G m^2|\varphi|^2 \tag{5.12.81}$$

en coordenadas esféricas. La solución más sencilla que se puede obtener corresponde a un estado de tipo hidrogenoide

$$\varphi = B \cdot e^{-r/a} \tag{5.12.82}$$

donde la constante de normalización tiene el valor

$$\int |\varphi(r)|^2 4\pi r^2 dr = 1 \Rightarrow\; \pi|B|^2 a^3 = 1 \to B = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \tag{5.12.83}$$

Para esta función de onda, el potencial de autointeracción gravitatoria satisface la ecuación de Poisson

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = \frac{4Gm^2}{a^3}e^{-2r/a} \tag{5.12.84}$$

con la solución, por integración directa,

$$V = -\frac{Gm^2}{r} + Gm^2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)e^{-2r/a} \tag{5.12.85}$$

Substituyendo esta expresión en la ecuación de Schrödinger-Newton, obtenemos la relación que determina la energía del estado ligado, y podemos obtener también la extensión espacial a que

hemos introducido arbitrariamente para la función de onda. La condición a resolver está dada por la expresión

$$E\varphi \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) + V\varphi \tag{5.12.86}$$

ó

$$EBe^{-r/a} = \frac{\hbar^2 B}{2ma}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)e^{-r/a} - \frac{Gm^2}{r}Be^{-r/a} + Gm^2 B\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)e^{-3r/a} \tag{5.12.87}$$

Para obtener una primera solución aproximada despreciando el último término, proporcional a $e^{-3r/a}$, ya que tiene un decaimiento más fuerte que los términos restantes, proporcionales a $e^{-r/a}$. En este caso, la relación a resolver se escribe

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \frac{Gm^2}{r} \tag{5.12.88}$$

Ya sólo nos queda igualar las potencias de r a ambos lados, para deducir el valor de la energía y la escala radial a

$$E = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \quad , \quad a = \frac{\hbar^2}{Gm^3} \tag{5.12.89}$$

y uniendo los dos resultados, vemos que la energía del estado autoligado tiene el valor aproximado

$$E = -\frac{1}{2}\frac{G^2m^5}{\hbar^2} \tag{5.12.90}$$

Implicaciones físicas El resultado anterior ha mostrado que la introducción del potencial de autointeracción gravitatoria para la partícula cuántica libre permite asegurar la existencia de un autoestado ligado, con una extensión lineal del orden de $\hbar^2/Gm^3$. Este valor, para una partícula microscópica, como un electrón, es enormemente grande ($\sim 10^{43}\mathring{A}$) mientras que su energía de enlace es insignificante, de forma la contribución de la gravedad es completamente despreciable, y puede utilizarse la mecánica cuántica usual sin modificación.
Sin embargo, conforme aumenta la masa de la partícula, el papel de la gravedad resulta ser más importante, e incluso llega a ser el dominante. La consecuencia principal, debido a su naturaleza atractiva, es que da lugar a la contracción espacial de la función de onda. Cuando esta contracción se produce sobre distancias mayores que la resolución espacial de los aparatos de medida, se puede considerar que es el valor promedio del operador cuántico de posición el que determina la posición real de la partícula. De esta forma, que los operadores de posición y momento sigan las leyes clásicas de movimiento (según el teorema de Ehrenfest) junto con la contracción espacial de la función de onda serían los dos indicadores cuánticos que determinan si el sistema, en este caso la partícula, tiene un comportamiento clásico.

Limitaciones de la teoría Como hemos visto, la energía del estado ligado de la partícula puntual libre resulta ser proporcional a m^5, y ésta es una dependencia muy fuerte, que supone que pueda ser mayor incluso que la propia energía en reposo de la partícula ($E = mc^2$), proporcional a m, lo que no es físicamente aceptable. Por tanto, como valor límite de la masa de la partícula que puede describirse en el marco de esta teoría (esto es, con la aplicación de la ecuación de Schrödinger-Newton), es

$$\frac{1}{2}\frac{Gm^5}{\hbar^2} \lesssim mc^2 \Rightarrow m \lesssim \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} \equiv m_P \tag{5.12.91}$$

Como hemos visto, este límite superior corresponde a la masa de Planck, aproximadamente 10^{-5}gr. Supone además que la extensión espacial de la función de onda sería menor que la propia longitud de onda de Compton de la onda de materia asociada, que de nuevo no es físicamente aceptable. Si quisieramos estudiar en detalle lo que sucede a las partículas fundamentales (partículas puntuales libres) que tienen mayor masa que este límite, debe generalizarse la teoría incorporando correcciones relativistas tanto a la ecuación de Schrödinger como al potencial de interacción gravitatorio.

5.13. Videoclases

Tipo	Duración	Contenidos	Enlace
Teoría	90 mn	Secciones 5.1, 5.3, 5.6	S.5.1, S.5.3, S.5.6
Problemas	90 mn	Problemas secciones 5.2, 5.4, 5.5, 5.7	S.5.2, S.5.4, S.5.5, S.5.7
Autoevaluación	20 mn	Problemas secciones 5.8, 5.9	S.5.8, S.5.9
Otros	60 mn	Apéndices 5.10, 5.11, 5.12	–

Teorema de Liouville. Invariantes integrales y adiabáticos

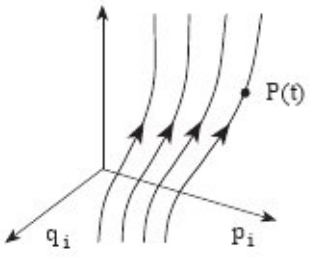
Capítulo 6

Teorema de Liouville

6.1. Espacio de fases. Tipos de descripción

Definición En el formalismo Hamiltoniano, el estado mecánico de un sistema de N partículas (que asumimos puntuales) en d dimensiones queda descrito de forma completa por el conjunto de coordenadas y momentos $(q_1, .., q_{Nd}, p_1, .., p_{Nd})$, de forma que están definidas d coordenadas y momentos para cada partícula, con un total de $2Nd$ variables. En consecuencia, el espacio de fases Γ es el espacio $2Nd$-dimensional tal que cada uno de sus puntos $P(q, p)$ representa un posible estado dinámico (y microscópico) del sistema.

Trayectoria en el espacio de fases A medida que el sistema evoluciona, cada punto del espacio de fases sigue una trayectoria $P(q(t), p(t))$



determinada por la solución de las ecuaciones de movimiento de Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{6.1.1}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{6.1.2}$$

donde $H = H\left(q_1, .., q_{Nd}, p_1, .., p_{Nd}, t\right) \equiv H(q, p, t)$ es el Hamiltoniano del sistema.

Excepto en los puntos singulares, las trayectorias no pueden cortarse, unirse o bifurcarse. Además, cuando H sea independiente del tiempo las trayectorias serán estacionarias, manteniendo su forma en el tiempo, esto es, el conjunto de líneas de trayectoria que aparece en la figura anterior tendrá siempre el mismo aspecto y distribución, en cualquier instante de tiempo. Finalmente la evolución temporal de una función arbitraria $F(q, p, t)$ definida en el espacio de fases queda expresada en función de su corchete de Poisson con el Hamiltoniano, en la forma

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H] \tag{6.1.3}$$

Densidad en el espacio de fases Hasta ahora en los capítulos anteriores hemos analizado la dinámica del sistema en función de las trayectorias individuales en el espacio de fases. Estas trayectorias están definidas en función de las condiciones iniciales del movimiento, son continuas y siguen la evolución marcada por el Hamiltoniano del sistema en función del parámetro temporal de tiempo. Esta descripción *individualizada* dejará de ser válida cuando no podamos identificar adecuadamente el *concepto* de trayectoria. Tendremos dos casos en particular, ambos relacionados con el incremento en la complejidad del sistema que estamos analizando:

- Cuando no sea eficiente el seguimiento de una trayectoria individual, por ejemplo si el sistema tiene muchas partículas y la física del sistema no informa *macroscópicamente* de las trayectorias *microscópicas* individuales. El ejemplo típico es un gas de partículas confinado. Una de las variables macroscópicas del sistema es la presión o la temperatura, variables a las cuales una trayectoria individual de una partícula aporta una cantidad ínfima de información dinámica. Es el promedio en el espacio de fases sobre la cantidad ingente de trayectorias individuales de las partículas en el seno del gas, el que permite definir la presión o temperatura de una forma continua en el tiempo.

- Es posible por otra parte que tengamos trayectorias individuales dinámicamente válidas, pero que no estén bien definidas al no estar bien definidas las condiciones iniciales. En este sentido la trayectoria individual existe pero deja de representar una trayectoria *real* del sistema, ya que no puede asociarse a una única condición inicial. En este contexto se da el movimiento *caótico* de un sistema, o *no determinista*, y que el uso de nuevas herramientas de análisis dinámico, como por ejemplo, los denominados *exponentes de Lyapunov* que miden el distanciamiento entre trayectorias inicialmente vecinas a medida que transcurre el tiempo, que no trataremos aquí.

En estos casos el concepto de trayectoria como la unidad que contiene la información dinámica del sistema lo adquiere el concepto de *densidad* de trayectorias, en su sentido más amplio. Esta densidad, representada por la letra ρ, deberá ser una función continua en el espacio de fases, del mismo modo que lo era la trayectoria *real* individual.

Descripción mixta. Potencial efectivo. Campo medio En realidad, la necesidad de uno u otro enfoque, trayectoria individual o densidad colectiva, estará marcada por la capacidad de predicción física del modelo utilizado. En el primero nuestros resultados serán precisos, pero inexactos, y en el segundo serán exactos, pero imprecisos. En la mayoría de los casos se opta por el punto intermedio, tener la precisión de una trayectoria individualizada y tener la exactitud de un modelo genérico, y por tanto, parametrizable.
La construcción para ello es sencilla. Se toma como partícula *modelo* una partícula ideal con condiciones iniciales del movimiento bien definidas. El modelo consistirá entonces en definir el Hamiltoniano en términos de un cierto promedio de las acciones de las restantes partículas del sistema. Así tendremos por ejemplo para un modelo de partícula puntual el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_{ef}(q) \tag{6.1.4}$$

siendo $V_{ef}(q)$ el potencial *efectivo* generado por la interacción de la partícula con sus *partículas vecinas* y promediado sobre todas las posibles configuraciones de éstas.
En el caso de la densidad, nuestro modelo definirá una densidad ρ_1 para una única partícula *promedio* y en la ecuación de movimiento para ρ_1, ecuación que describimos en las siguientes secciones, aparecerá un término adicional debido la interacción de ρ_1 con la densidad ρ_{N-1} de las restantes $N-1$ partículas del sistema. De forma análoga al concepto de potencial efectivo, este término adicional proviene de lo que se denomina *campo medio*: las restantes partículas del sistema, en su movimiento promedio, generan un campo promedio ó campo medio sobre el que se mueve la partícula modelo objeto de estudio.

6.2. Colectividad estadística

Colectividad estadística Para determinar las propiedades macroscópicas de un sistema a partir de primeros principios (por ejemplo, la dinámica de cada partícula del sistema), debemos resolver el conjunto de ecuaciones de Hamilton del movimiento. Cuando el sistema contiene un número grande de grados de libertad, tal tarea se hace inabordable, y necesariamente se debe recurrir a la introducción de métodos estadísticos.
La idea clave es que cada estado macroscópico del sistema corresponde a una infinidad de estados microscópicos compatibles con éste, cada uno de ellos representando un punto sobre una trayectoria en el espacio de fases. Por tanto, debemos analizar ante todo el conjunto de puntos en el espacio de fases. Se define lo que se denomina *colectividad estadística* como el conjunto de puntos del espacio de fases (estados microscópicos) que determinan un mismo estado macroscópico. Hablamos también de un conjunto de copias idénticas del sistema de partículas, cada una de ellas generada con unas condiciones iniciales de movimiento arbitrarias, pero compatibles con el estado macroscópico.

Densidad de probabilidad Para abordar el estudio de la distribución de estados microscópicos, será necesario introducir la medida en el espacio de fases en la forma

$$d\Gamma = dq_1..dq_{Nd}dp_1...dp_{Nd} \equiv dqdp \tag{6.2.1}$$

tal que la *medida* de cualquier región, digamos A, del espacio de fases se calcula como

$$\int_A d\Gamma = \int_A dqdp \tag{6.2.2}$$

La variable fundamental que describe la dinámica de la colectividad será la densidad ρ de puntos o estados microscópicos en el espacio de fases, también denominada *densidad de probabilidad* en el espacio de fases. Será función de las variables canónicas, del tiempo y de las variables macroscópicas como la energía del sistema.
Como veremos, por el teorema de Liouville, la densidad es una constante del movimiento, y así mismo lo será la integral de cualquier función exclusiva de la densidad

$$\int f(\rho)\, dqdp \tag{6.2.3}$$

Condición de normalización. Promedios estadísticos La densidad debe cumplir la condición de normalización

$$\int_\Gamma \rho dqdp = 1 \tag{6.2.4}$$

con la integración sobre todo el espacio de fases, dado que la probabilidad de encontrar cualquier estado microscópico dado dentro del espacio de fases debe ser la unidad.

En función de la densidad de probabilidad, podemos definir el promedio estadístico sobre la colectividad, denotado por $\langle f \rangle$, de cualquier función f definida en Γ, en la forma

$$\langle f \rangle \equiv \int_\Gamma f(q,p)\, \rho(q,p)\, dqdp \tag{6.2.5}$$

Valores en el equilibrio Cualquier densidad que dependa de las variables canónicas sólo a través del Hamiltoniano $H(q,p)$,

$$\rho(p,q) \equiv \rho(H(q,p)) \tag{6.2.6}$$

es estacionaria (esto es, no depende explícitamente del tiempo), y se denomina por ello densidad de probabilidad ρ_{eq} en el *equilibrio*, y la colectividad que representa se denomina colectividad en el equilibrio.

6.3. Conservación de la probabilidad. Ecuación de continuidad

Evolución en el espacio de fases Consideremos dentro del espacio de fases una región Γ_0 que en el instante inicial $t = 0$ contiene un número de estados N. Entonces por definición la densidad inicial de estados[1] en Γ_0 está dada por la relación

$$\frac{N}{N_T} \equiv \int_{\Gamma_0} \rho d\Gamma \tag{6.3.1}$$

siendo N_T el número de estados totales en todo el espacio de fases.
Dejemos evolucionar al sistema de acuerdo con las ecuaciones de Hamilton. Esta evolución temporal es continua, y en consecuencia los estados del sistema se mueven sin saltos discontinuos[2]. Así en el instante t el mismo número de puntos se encontrará en la nueva región Γ_t del espacio de fases, evolución en el tiempo de la región Γ_0, tal que de nuevo será válida la relación

$$\frac{N}{N_T} = \int_{\Gamma_t} \rho d\Gamma \tag{6.3.2}$$

Conservación de la probabilidad Por tanto, por propia definición, en la evolución del sistema se conserva la probabilidad en cada región acotada del espacio de fases, que se expresa matemáticamente por la ecuación

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma_t} \rho d\Gamma = 0 \tag{6.3.3}$$

Es destacable que este hecho es independiente de la existencia de un Hamiltoniano, y sólo define la *conservación de la medida* en el espacio de fases.

Flujo de probabilidad En general, la variación en el tiempo de la medida $\int_{\Gamma_t} \rho d\Gamma$ dada de una región será la contribución de dos términos. Por un lado se debe a la variación con el tiempo de la propia densidad ρ en el interior de Γ_t, y por otro, de la cantidad neta de estados microscópicos que salen o entran a través de su frontera, denotada como $\partial\Gamma_t$. Dicho de otra forma, la variación es la suma de lo que se produce en el sistema más lo que entra o sale del sistema.

El segundo término es lo que se denomina *flujo de probabilidad* a través de la frontera $\partial\Gamma_t$, y este flujo se describe matemáticamente por un vector, el vector flujo de probabilidad $\boldsymbol{j}$, que se define genéricamente como el producto de la cantidad analizada (en este caso, la densidad), por la velocidad $\boldsymbol{v}$ local con la que se mueve la colectividad en el espacio de fases[3]. Es decir,

$$\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v} \tag{6.3.4}$$

y en función de $\boldsymbol{j}$, el flujo de probabilidad se define por

$$\oint_{\partial\Gamma_t} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{6.3.5}$$

siendo $\boldsymbol{n}$ y dS el vector unitario y el elemento de superficie en la frontera $\partial\Gamma_t$, respectivamente.

[1] Debemos entender esta cantidad como un valor que caracteriza en promedio dicha región del espacio de fases. Por ejemplo, si Γ_0 tuviera una región interna sin estados físicos, por ejemplo por la presencia de una barrera de potencial, la densidad tendría el mismo valor ya que sólo depende del número total de estados microscópicos en Γ_0 y no de su distribución interna. Lógicamente si conocemos de antemano la región de estados físicamente inaccesibles, podremos acotar el análisis dinámico de las trayectorias del sistema únicamente a la región accesible del espacio de fases.

[2] Véase a este respecto el análisis sobre la continuidad del movimiento de la sección 3.1.3.

[3] Esta descripción dinámica de la evolución temporal, basada en un modelo de *transporte*, en la que una cantidad, la densidad ρ, se *transporta* a lo largo de las trayectorias del sistema, con una velocidad $\boldsymbol{v}$, es heredera del denominado *Teorema del transporte de Reynolds*, que describe la fenomenología del movimiento en el seno de un fluido. Este teorema está detallado en la sección 10.5.3 para una teoría de campo no relativista.

Ecuación de continuidad Con estas definiciones, la variación temporal de la probabilidad en Γ_t , al ser nula por (Ec. 6.3.3), debe satisfacer

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_t}\rho d\Gamma = \int_{\Gamma_t}\frac{\partial\rho}{\partial t}d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma_t}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS \equiv 0 \tag{6.3.6}$$

Por el teorema de Gauss, la integral de superficie puede transformarse en una integral de volumen

$$\oint_{\partial\Gamma_t}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_{\Gamma_t}\boldsymbol{\nabla}\left(\rho\boldsymbol{v}\right)d\Gamma \tag{6.3.7}$$

siendo $\boldsymbol{\nabla}$ el operador gradiente. Con ello, la conservación de la probabilidad se reduce a la expresión integral de volumen

$$\int_{\Gamma_t}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left(\rho\boldsymbol{v}\right)\right)d\Gamma = 0 \tag{6.3.8}$$

y dado que la región Γ_t es arbitraria, la condición anterior se cumple para toda región del espacio de fases, siempre que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left(\rho\boldsymbol{v}\right) = 0 \tag{6.3.9}$$

que es la denominada *ecuación de continuidad* para la densidad de probabilidad.

6.4. Teorema de Liouville

Gradiente y campo de velocidad en el espacio de fases Debemos insistir que hasta ahora no hemos hecho uso de la existencia de un Hamiltoniano, y este resultado es general. Para el espacio de fases (q, p), el gradiente tiene la expresión

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p}\right) \tag{6.4.1}$$

y el campo de velocidad[1], tangente a las trayectorias, está dado por

$$\boldsymbol{v} = (\dot{q},\dot{p}) \tag{6.4.2}$$

Teorema de Liouville Con ayuda de las ecuaciones de Hamilton el campo de velocidad se escribe

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right) \tag{6.4.3}$$

y por tanto,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q} - \frac{\partial^2 H}{\partial q\partial p} \equiv 0 \tag{6.4.4}$$

Esto nos indica que, desde el punto de vista del campo de velocidad, el movimiento en el espacio de fases es similar a un fluido incompresible. La ecuación de continuidad queda con esto en la forma

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho = 0 \tag{6.4.5}$$

ó

[1]Este sentido de *campo* para la velocidad nos indica que aunque la velocidad se define únicamente para una trayectoria individual, cuando la trayectoria deja de tener un sentido dinámico su vector tangente, la velocidad, pasa a ser una variable continua en el espacio de fases, definiendo un campo. En particular, el valor de este campo en un punto del espacio de fases nos indica la velocidad de la trayectoria que pasa por ese punto, en el instante dado.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial \rho}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial \rho}{\partial p} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + [\rho, H] \equiv \frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{6.4.6}$$

que establece el denominado *teorema de Liouville*,

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{6.4.7}$$

esto es, la densidad de estados ó densidad de probabilidad en el espacio de fases es una constante del movimiento del sistema.

Solución general para $\rho(t)$ Hemos visto que, cuando la densidad depende únicamente de un Hamiltoniano que es independiente del tiempo, en la forma

$$\rho\left(p, q\right) \equiv \rho\left(H(q, p)\right) \tag{6.4.8}$$

su valor es estacionario, y el sistema se encuentra en equilibrio.
Sin embargo, en general la densidad $\rho\left(q, p, t\right)$ sí dependerá explícitamente del tiempo, y por tanto evolucionará a partir de un perfil inicial, digamos $\rho_0\left(q_0, p_0, 0\right)$. Además dado que se satisface el teorema de Liouville $\frac{d\rho}{dt} = 0$, tenemos la igualdad

$$\rho\left(q, p, t\right) = \rho_0\left(q_0, p_0, 0\right) \tag{6.4.9}$$

Entonces, dado que la evolución del sistema está gobernada por las ecuaciones de Hamilton, cuya solución será de la forma

$$q = F\left(q_0, p_0, t\right) \tag{6.4.10}$$

$$p = G\left(q_0, p_0, t\right) \tag{6.4.11}$$

ó en su forma inversa (la simetría del movimiento frente a la inversión del tiempo exige que sólo p cambie de signo al cambiar el signo de t)

$$q_0 = F\left(q, -p, -t\right) \tag{6.4.12}$$

$$p_0 = -G\left(q, -p, -t\right) \tag{6.4.13}$$

la relación funcional que nos sirve para determinar $\rho\left(q, p, t\right)$ será directamente

$$\rho\left(q, p, t\right) \equiv \rho_0\left(F\left(q, -p, -t\right), -G\left(q, -p, -t\right), 0\right) \tag{6.4.14}$$

6.5. Conceptos adicionales

6.5.1. Colectividad microcanónica

Superficie de energía constante Para un sistema aislado de su entorno, el movimiento en el espacio de fases Γ siempre se produce sobre la superficie de energía constante, digamos Γ_E, definida por la ecuación

$$H\left(q, p\right) = E \tag{6.5.1}$$

La *medida* sobre esta superficie está dada por su volumen del espacio de fases, utilizando una función δ para asegurar la conservación de la energía,

$$\Sigma_E \equiv \int_{\Gamma_E} \delta\left(H\left(q, p\right) - E\right) d\Gamma \tag{6.5.2}$$

de forma que la densidad de estados en este caso queda definida como

$$\rho_E\left(q, p\right) = \frac{1}{\Sigma_E}\delta\left(H\left(q, p\right) - E\right) \tag{6.5.3}$$

Colectividad microcanónica La colectividad definida por esta densidad ρ que depende únicamente de la energía del sistema, y es función de (q,p), se denomina *colectividad microcanónica*. En esta colectividad el promedio estadístico de cualquier función definida en el espacio de fases viene dado por la integral sobre el volumen accesible del sistema (superficie de energía constante Γ_E)

$$\langle f\rangle \equiv \langle f\rangle_E = \int_{\Gamma_E} f\left(q,p\right)\rho_E\left(q,p\right)dqdp \tag{6.5.4}$$

6.5.2. Ergodicidad

Definiciones La validez de un promedio estadístico sobre la colectividad dependerá de que el sistema en su movimiento realmente pase por todos los estados sobre los que se realiza el promedio. Por ejemplo, si el sistema se encontrara en todo tiempo en un conjunto pequeño de estados, el promedio estadístico carecería totalmente de valor puesto que no tiene en cuenta las contribuciones de la mayoría de estados por los que no pasa el sistema.
La relación estrecha que se establece así entre el promedio estadístico y el paso temporal sobre los estados del espacio de fases recibe el nombre de *ergodicidad*. En particular, el movimiento de un sistema en el espacio de fases será *ergódico* si para cada función f, definida en el espacio de fases, el promedio temporal de f da el mismo valor que el promedio estadístico de f sobre la colectividad. Esto es, si

$$\overline{f} = \langle f\rangle \tag{6.5.5}$$

donde el promedio temporal se realiza a tiempos muy grandes, y tiene la expresión, por definición,

$$\overline{f} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f\left(P\left(t\right)\right)dt \tag{6.5.6}$$

siendo $P\left(t\right)$ el punto en el espacio de fases (estado del sistema) en el instante t.

Conclusiones Por tanto, $\overline{f}$ es el promedio de los valores que adquiere la función f en la evolución del sistema a partir de su estado inicial. La *hipótesis ergódica* establece que, en general, para evaluar las propiedades macroscópicas de un sistema no es necesario fijarnos en su evolución temporal a grandes tiempos, y sólo será necesario conocer la distribución de estados accesibles en el espacio de fases.

6.6. Flujo Hamiltoniano en el espacio de fases

Reunimos en este apartado una revisión de aspectos ya conocidos y tratados en secciones anteriores, así como el análisis de la evolución temporal en el espacio de fases y la reversibilidad de la dinámica Hamiltoniana.

6.6.1. Parametrización temporal

Consideremos que $H(x,p)$ es el Hamiltoniano independiente del tiempo de un sistema genérico, y elijamos un nuevo Hamiltoniano $K \equiv f(H)$, función exclusiva de H, conservando las mismas variables canónicas. De las nuevas ecuaciones de Hamilton para K

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p} \equiv \frac{\partial f(H)}{\partial p} \equiv f'(H)\frac{\partial H}{\partial p} \tag{6.6.1}$$

y

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q} \equiv -\frac{\partial f(H)}{\partial q} \equiv -f'(H)\frac{\partial H}{\partial q} \tag{6.6.2}$$

y sabiendo que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad H = \text{cte} \quad \Longrightarrow \quad f(H) = \text{cte} \tag{6.6.3}$$

comprobamos que la nueva dinámica del sistema, respecto al Hamiltoniano K, está dada por la misma ley de evolución temporal

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{6.6.4}$$

respecto al nuevo parámetro temporal τ, definido por

$$d\tau = f'(H)dt \quad \Longrightarrow \quad \tau = f'(H)t + \text{cte} \tag{6.6.5}$$

Esto es, ambos Hamiltonianos describen las mismas trayectorias del sistema, soluciones de las mismas ecuaciones de Hamilton para H, pero con distinta evolución temporal, esto es, respecto a distintos parámetros temporales, t y τ.

6.6.2. Reversibilidad de la dinámica Hamiltoniana

Reversibilidad La noción de *reversibilidad* en el tiempo subyace ya en las propias ecuaciones de Hamilton

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad , \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{6.6.6}$$

ya que son invariantes bajo el cambio

$$t \to -t \quad , \quad q \to q \quad , \quad p \to -p \tag{6.6.7}$$

por lo que si $(q(t), p(t))$ es una solución en el espacio de fases, también será solución $(q(-t), -p(-t))$.
Basándonos en esta propiedad de reversibilidad, si definimos la solución $(q(t), p(t))$ como la trayectoria del sistema que parte de las condiciones iniciales $q(0) = q_0$ y $p(0) = p_0$, esto es, tenemos

$$q = q(q_0, p_0, t) \quad , \quad p = p(q_0, p_0, t) \tag{6.6.8}$$

y por tanto, $(q(t), p(t))$ es la posición del sistema en el espacio de fases tras transcurrir un intervalo de tiempo t desde la posición inicial (q_0, p_0) en $t = 0$, necesariamente $(q_0, -p_0)$ será la posición del sistema al transcurrir un tiempo $-t > 0$ desde la posición $(q(t), -p(t))$.

Ley del movimiento Consideremos ahora que la solución a las ecuaciones del movimiento tienen una expresión funcional determinada

$$q(t) \equiv F(q_0, p_0, t) \quad , \quad p(t) \equiv G(q_0, p_0, t) \tag{6.6.9}$$

siendo (q_0, p_0) las condiciones iniciales del movimiento, que satisfacen necesariamente la relación funcional correspondiente independiente del tiempo

$$q_0 \equiv F(q_0, p_0, 0) \quad , \quad p_0 \equiv G(q_0, p_0, 0) \tag{6.6.10}$$

y en consecuencia son constantes del movimiento

$$\frac{dq_0}{dt} = \frac{d}{dt} F(q_0, p_0, 0) \equiv 0 \tag{6.6.11}$$

y de forma análoga para p_0

$$\frac{p_0}{dt} = \frac{d}{dt} G(q_0, p_0, 0) \equiv 0 \tag{6.6.12}$$

La dinámica del sistema quedará representada entonces por las variaciones temporales

$$\dot{q}(t) \equiv \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} F(q_0, p_0, t) \equiv \dot{F}(q_0, p_0, t) \tag{6.6.13}$$

y

$$\dot{p}(t) \equiv \frac{dp(t)}{dt} = \frac{d}{dt}G(q_0, p_0, t) \equiv \dot{G}(q_0, p_0, t) \tag{6.6.14}$$

al ser (q_0, p_0) constantes, independientes del tiempo.

• Analicemos en este punto cómo queda representada la reversibilidad en el tiempo en términos de estas relaciones funcionales, esto es, bajo el cambio

$$t \to -t \quad , \quad q \to q \quad , \quad p \to -p \tag{6.6.15}$$

Dado que entonces $(q_0, -p_0)$ será la posición (final) del sistema al transcurrir un tiempo $-t > 0$ desde la posición (inicial) $(q(t), -p(t))$, y la dinámica subyacente es la misma, se satisface la ley de movimiento adicional

$$q_0 = F(q, -p, -t) \quad , \quad -p_0 = G(q, -p, -t) \tag{6.6.16}$$

La diferencia respecto a la ley de movimiento dada por la ecuación 6.6.9 reside en que ahora, al ser $-t > 0$ el tiempo transcurrido, las cantidades $q \equiv q(t)$, y $-p \equiv -p(t)$ pasan a ser las condiciones iniciales del movimiento, condiciones establecidas en el tiempo inicial $t < 0$. Por tanto son constantes del movimiento, y satisfacen las relaciones funcionales análogas a las dadas anteriormente (ec. 6.6.10)

$$q \equiv F(q, -p, 0) \quad , \quad -p \equiv G(q, -p, 0) \tag{6.6.17}$$

La dinámica del sistema para este movimiento quedará representada entonces por las variaciones temporales

$$\dot{q}_0 \equiv \frac{dq_0}{d\,(-t)} = \frac{d}{d\,(-t)}F(q, -p, -t) \equiv \dot{F}(q, -p, -t) \tag{6.6.18}$$

y

$$\dot{(-p_0)} \equiv \frac{d\,(-p_0)}{d\,(-t)} = \frac{d}{d\,(-t)}\left(G(q, -p, -t)\right) \equiv \dot{G}(q, -p, t) \tag{6.6.19}$$

al ser $(q(t), -p(t))$ constantes, independientes del tiempo $-t > 0$. Comprobamos así que la dinámica resulta invariante frente a la inversión temporal.

Reversibilidad de la dinámica en el espacio de fases Consideremos, como hemos visto, que las relaciones funcionales

$$q(t) \equiv F(q_0, p_0, t) \quad , \quad p(t) \equiv G(q_0, p_0, t) \tag{6.6.20}$$

siendo (q_0, p_0) las condiciones iniciales del movimiento, representan la dinámica del sistema y su trayectoria en el espacio de fases. Consideremos además que tenemos definida una densidad de estados en el instante inicial $t = 0$, dada por la función

$$\rho(q_0, p_0, 0) \equiv f(q_0, p_0) \tag{6.6.21}$$

siendo f una función arbitraria de sus argumentos. En este tiempo inicial $t = 0$, la densidad de estados satisface idénticamente el teorema de Liouville (esto es, independientemente de la expresión de la función f). Dado que (q_0, p_0) son constantes del movimiento por ser las condiciones iniciales, tenemos efectivamente que

$$\frac{d\rho}{dt}\Big|_{t=0} \equiv \frac{d}{dt}f(q_0, p_0) = \frac{\partial f}{\partial q_0}\cancelto{0}{\dot{q}_0} + \frac{\partial f}{\partial p_0}\cancelto{0}{\dot{p}_0} \equiv 0 \tag{6.6.22}$$

Comprobamos así adicionalmente que cualquier perfil inicial de estados, definido por $f(q_0, p_0)$, resultante físicamente admisible.

• Dado este perfil inicial lo que nos interesa es obtener la densidad de estados en el espacio de fases a lo largo del tiempo. En particular, definiendo el espacio de fases en el instante t, como el espacio $(q(t), p(t))$, nuestro objetivo es obtener la densidad $\rho(q(t), p(t), t)$ a partir de la densidad equivalente en $t = 0$, $\rho(q_0, p_0, 0)$. Matemáticamente el problema a resolver se define en la forma

$$\frac{d\rho(q(t), p(t), t)}{dt} = 0 \quad , \quad \rho(q(0), p(0), 0) = \rho(q_0, p_0, 0) \tag{6.6.23}$$

con la solución directa

$$\rho(q(t), p(t), t) = \rho(q_0, p_0, 0) \tag{6.6.24}$$

Para obtener la solución completa debemos introducir en esta equivalencia la relación entre los valores $(q(t), p(t), t)$ y (q_0, p_0), y para ello tenemos dos vías:

(1) Podemos utilizar en primer lugar las relaciones funcionales (ec. 6.6.9) dadas por la ley de movimiento del sistema, con el resultado

$$\rho(F(q_0, p_0, t), G(q_0, p_0, t), t) = \rho(q_0, p_0, 0) \tag{6.6.25}$$

ecuación definida en el espacio de fases inicial, y por tanto que debe presentarse en la forma

$$\rho(q_0, p_0, 0) \equiv \rho(F(q_0, p_0, t), G(q_0, p_0, t), t) \tag{6.6.26}$$

Este resultado es trivial. Dado que no existe dependencia explícita en t en el lado derecho, por no existir en el lado izquierdo, la expresión de la derecha tiene el mismo valor para cualquier valor del tiempo. Para obtener este valor basta elegir $t = 0$, para obtener el resultado general

$$\rho(q_0, p_0, 0) \equiv \rho(F(q_0, p_0, 0), G(q_0, p_0, 0), 0) \tag{6.6.27}$$

que da un resultado trivial una vez aplicadas las relaciones funcionales (ec. 6.6.10) para las condiciones iniciales (q_0, p_0). Queda claro así que el resultado obtenido al relacionar $(q(t), p(t), t)$ con (q_0, p_0) sólo ha consistido en recuperar directamente la densidad constante e independiente del tiempo en el instante inicial.

(2) Obtenemos no obstante el resultado esperado utilizando la segunda vía, al introducir la relación entre los valores (q_0, p_0) y los valores $(q(t), p(t), t)$, de forma que tenemos la equivalencia

$$\rho(q(t), p(t), t) = \rho(q_0(q, p, t), p_0(q, p, t), 0) \tag{6.6.28}$$

La cuestión es entonces como resolver primero estas relaciones funcionales

$$q_0(q, p, t) \quad , \quad p_0(q, p, t) \tag{6.6.29}$$

Para su definición, vemos que dichas relaciones deben permitir obtener los estados iniciales (q_0, p_0) en el instante $t = 0$ en función de los estados finales $(q(t), p(t))$ en el instante t para cada trayectoria del sistema. Podemos pensar que sólo necesitamos una mera operación matemática para despejar los valores (q_0, p_0) utilizando las relaciones funcionales del movimiento

$$q = F(q_0, p_0, t) \quad , \quad p = G(q_0, p_0, t) \tag{6.6.30}$$

en función de los valores (q, p). Sin embargo, el resultado de este procedimiento vuelve a ser el resultado trivial. La manipulación algebraica no modifica el carácter dinámico de (q_0, p_0), que siguen siendo las condiciones iniciales del movimiento, y que por tanto nos llevan de nuevo al resultado ya conocido

$$\rho(q(t), p(t), t) = \rho(q_0(q, p, t), p_0(q, p, t), 0) \equiv \rho(q_0, p_0, 0) \tag{6.6.31}$$

Para obtener la verdadera dependencia temporal en la densidad de estados, debemos cambiar el carácter dinámico de las variables (q_0, p_0), pasando de ser las condiciones iniciales del movimiento a ser las variables del movimiento, dadas por las relaciones funcionales (ec. 6.6.16), para el movimiento inverso en el tiempo. El resultado obtenido para la densidad de estados entonces es dependiente del tiempo, y se escribe en la forma

$$\begin{aligned} \rho(q(t), p(t), t) &= \rho(q_0(q, p, t), p_0(q, p, t), 0) \\ &\equiv \rho(F(q, -p, -t), -G(q, -p, t), 0) \end{aligned} \tag{6.6.32}$$

6.6.3. Ejemplos detallados

Oscilador armónico Tomemos el ejemplo de un oscilador armónico, cuya trayectoria en el espacio de fases es un elipse. El sentido de giro está dado por la dirección del tiempo, de forma que la reversibilidad de las ecuaciones se reduce a un cambio de sentido de circulación sobre la elipse, como si levantaramos el móvil de su trayectoria y le dieramos la vuelta. Comprobemos en detalle si las matemáticas son correctas. Para ello partimos de las leyes de movimiento

$$q(t) = q_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \operatorname{sen} \omega t \quad , \quad p(t) = p_0 \cos \omega t - m\omega q_0 \operatorname{sen} \omega t \tag{6.6.33}$$

cuyo sentido de giro está gobernado por la dirección del tiempo: tomando una posición inicial $q_0 > 0$ podemos ver que el giro se realiza en el sentido de las agujas del reloj independientemente del valor de p_0, en consonancia con la invariancia de la circulación sobre la trayectoria periódica[1]. Si ahora cambiamos t por $-t$, que el instante inicial cambia 0 por $-0 \equiv 0$, estamos manteniendo la posición mientras cambiamos el signo de p_0, esto es, cambiamos p_0 por $-p_0$, y tenemos la interpretación correcta, el movimiento reversible gira desde la misma posición inicial q_0 pero en sentido contrario.

• Para una posición arbitraria el movimiento reversible estaría dado por las ecuaciones

$$q(-t) = q_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \operatorname{sen} \omega t \quad , \quad p(-t) = p_0 \cos \omega t - m\omega q_0 \operatorname{sen} \omega t \tag{6.6.34}$$

ya que mantenido el valor de las coordenadas, hemos invertido el tiempo, y hemos cambiado de signo los momentos. Y si ahora despejamos las condiciones iniciales tenemos

$$q_0 = q(-t) \cos \omega t - \frac{p(-t)}{m\omega} \operatorname{sen} \omega t \quad , \quad p_0 = p(-t) \cos \omega t + m\omega q(-t) \operatorname{sen} \omega t \tag{6.6.35}$$

que se escribe

$$q_0 = q(-t) \cos \omega\,(-t) + \frac{p(-t)}{m\omega} \operatorname{sen} \omega\,(-t) \quad , \quad p_0 = p(-t) \cos \omega\,(-t) - m\omega q(-t) \operatorname{sen} \omega\,(-t) \tag{6.6.36}$$

Comparando con el movimiento directo

$$q(t) = q_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \operatorname{sen} \omega t \quad , \quad p(t) = p_0 \cos \omega t - m\omega q_0 \operatorname{sen} \omega t \tag{6.6.37}$$

comprobamos que hemos intercambiado posiciones iniciales y finales, hemos cambiado el sentido del tiempo, y respecto al momento, aunque no aquí no aparece explícitamente, lo hemos cambiado de signo.

• Si nos quedamos con el movimiento reversible, dado que también es un movimiento físico, es conveniente definir un sentido positivo en la dirección del tiempo, es decir, elegir $t' = -t$, y obtenemos la ley de movimiento

$$q(0) = q(t) \cos \omega(t) + \frac{p(t)}{m\omega} \operatorname{sen} \omega(t) \quad , \quad p(0) = p(t) \cos \omega(t) - m\omega q(t) \operatorname{sen} \omega(t) \tag{6.6.38}$$

con el sentido contrario a la dirección del movimiento directo, ya que los momentos aquí han cambiado de signo, aunque no aparezca explícitamente.

Movimiento en caída libre En general en el estudio de la reversibilidad en el tiempo, descartamos la posibilidad de que el Hamiltoniano cambie, por lo que la reversibilidad se refiere a las ecuaciones de movimiento para el mismo Hamiltoniano. En el caso partícular de la caída libre,

[1] Este resultado puede comprobarse con la definición de la variable de acción $I \equiv \oint p dq \equiv \int \int dq dp$ (véase la sección 5.6.1). El hecho de que el área sea invariante exige que la integral cíclica, la circulación sobre la trayectoria, tenga un sentido definido e independiente de las condiciones iniciales.

debemos recordar que solemos utilizar el mismo Hamiltoniano para la subida que para la bajada. La diferencia con el oscilador es que en éste el potencial es cuadratico en la coordenada, y en la caida libre es lineal en la coordenada. En este caso, para la subida tenemos un momento positivo decreciente

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgq \quad \Longrightarrow \quad \dot{p} = -mg \tag{6.6.39}$$

y para la bajada tenemos un momento negativo creciente

$$H = \frac{p^2}{2m} - mgq \quad \Longrightarrow \quad \dot{p} = mg \tag{6.6.40}$$

El movimiento reversible de un tramo de subida sería un tramo de bajada en la forma

$$\frac{d\left(-p(-t)\right)}{dt} = -mg \quad \Longrightarrow \quad \frac{dp(-t)}{d(-t)} = mg \tag{6.6.41}$$

que es correcto, y corresponde al análisis habitual de la caída libre, tomando el momento en el sentido negativo cuando se analiza el movimiento de bajada.

6.6.4. Dinámica temporal en el espacio de fases

Espacio de fases extendido Dado que el espacio de fases siempre tiene dimensión par, el espacio de fases extendido debe tener dos dimensiones más que en el espacio de fases ordinario. Una de las variables adicionales es el tiempo, que por construcción actúa como coordenada, y se debe incluir entonces su momento conjugado. Para ver que su momento conjugado es $-H$ sólo existe una vía directa, al identificar la equivalencia en la acción

$$dS = pdq - dt \equiv pdq + (-H)dt \equiv \tilde{p}d\tilde{q} \tag{6.6.42}$$

En el formalismo Hamiltoniano se establece a priori que q es la coordenada y p su momento, y que se satisface el corchete de Poisson fundamental $[q,p] = 1$. Una cuestión clave es que H aparece en el espacio extendido meramente como valor independiente, no como la función $H(x,p)$.

• Las ecuaciónes de Hamilton en el espacio de fases extendido nos permite obtener el Hamiltoniano extendido, digamos $\mathcal{H}$, que satisface

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \quad , \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \quad , \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(-H)} \quad , \quad \frac{d(-H)}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \tag{6.6.43}$$

que se obtienen de la minimización de la accion extendida

$$S = \int \left(\tilde{p}d\tilde{q} - \mathcal{H}d\tau\right) \tag{6.6.44}$$

Por ejemplo, para obtener las ecuaciones de Hamilton ordinarias a partir del espacio extendido debemos asumir que la evolución es temporal y que el Hamiltoniano es una constante, y por tanto t es una coordenada cíclica en el espacio extendido. Las ecuaciones anteriores se reducen a

$$\frac{dt}{d\tau} = 1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(-H)} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H} = f(x,p) - H \tag{6.6.45}$$

junto a

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial p} \quad , \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{\partial f}{\partial q} \quad \Longrightarrow \quad f(x,p) \equiv H(x,p) \tag{6.6.46}$$

y como conclusión

$$\mathcal{H} = H(x,p) - H \equiv 0 \tag{6.6.47}$$

De nuevo que el Hamiltoniano sea nulo, $\mathcal{H} \equiv 0$, indica que no existe dinámica (evolución), para este caso, en el espacio extendido, al ser $H = \text{cte}$.

Dependencia temporal del observador Cuando el Hamiltoniano depende del tiempo, no existe una forma canónica de analizar el sistema, el resultado siempre dependerá del tiempo t, fijado externamente o al menos condicionado externamente, ya que no es una variable canónica, salvo como hemos visto en el espacio extendido. Tratar de generalizar el tratamiento de estos casos puede confundir ya que parece plantear una dinámica distinta de la propia dinámica Hamiltoniana. Consideremos el caso de un oscilador armónico visto por dos observadores independientes, uno con el tiempo t y otro con el tiempo τ. Imaginemos que el movimiento parte del reposo, por lo que la energía constante será la misma para los dos (e igual a la energía potencial inicial). Entonces ambos observadores verán cómo el oscilador recorre una elipse en su espacio de fases con el mismo periodo $\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)$, medido en su sistema t y su sistema τ.

• Sin embargo, su resultados no son equivalentes, como podemos comprobar si relacionamos sus tiempos de medida, por ejemplo si $\tau = f(t)$. En este caso, la dinámica del oscilador vista por el segundo observador está dada por las variables $(x(f(t)), p(f(t)))$, la órbita seguirá siendo una elipse pero el tiempo de paso (esto es, la frecuencia dependerá del tiempo t).
En el ámbito de la física clásica sólo podremos tener la relación de tiempos dada por el carácter absoluto del tiempo, $\tau = t + \text{cte}$, por lo que los dos sistemas siempre serán equivalentes. Fuera del ámbito de la física clásica, donde la formulación Hamiltoniana sigue siendo válida, sí tendremos estos efectos físicos dependientes del observador.

Dependencia temporal del Hamiltoniano Como apunte final comentamos la situación de un Hamiltoniano dependiente del tiempo t, para un único observador dado, por ejemplo un sistema en rotación con frecuencia variable $\omega(t)$, fijada externamente. En este caso, ni se conserva la energía ni se conserva el Hamiltoniano. Respecto a la energía, no se conserva porque será necesario un incremento de energía para mantener el sistema en rotación en cada instante de tiempo con la frecuencia dada, y el Hamiltoniano no se conserva porque depende explícitamente del tiempo. El sistema no será invariante bajo el cambio $t \to t+\text{cte}$, es decir, no obtenemos lo mismo si analizamos el sistema desde el instante inicial t_1 que si lo hacemos desde un instante inicial distinto t_2, ya que por ejemplo si $t_2 > t_1$ no estamos teniendo en cuenta la energía almacenada por el sistema en el intervalo (t_1, t_2), energía que si forma parte del movimiento si lo iniciamos en t_1.

6.6.5. Notas adicionales con un ejemplo detallado

Consideremos el caso de una partícula que colisiona elásticamente con dos paredes. En cada trayecto entre colisión y colisión la partícula es libre, con el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} \tag{6.6.48}$$

Observamos lo siguiente:

(a) Si p_0 es el momento en el instante inicial, la conservación de H nos lleva a

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{p_0^2}{2m} \quad \Longrightarrow \quad p = \pm p_0 \tag{6.6.49}$$

Es decir, tenemos las dos soluciones posibles, $p = p_0 > 0$ para la partícula que se desplaza hacia la derecha, y $p = -p_0$ para la partícula que se desplaza hacia la izquierda. Si prescindimos de lo que sucede en la frontera (en cada colisión con las paredes) podemos decir que las dos soluciones son independientes, un movimiento hacia la derecha y un movimiento distinto hacia la izquierda. Éste es el tipo de resultado para una teoría de campo: hemos obtenido las dos soluciones fundamentales para la teoría de la partícula libre.

(b) Podemos analizar el mismo problema teniendo en cuenta la frontera, esto es, tratando el sistema como un medio continuo. En cada colisión existe una pérdida de momento

$$dp \equiv -2p \tag{6.6.50}$$

por efecto de la colisión elástica, de duración δt. Esto es,

$$p(t+\delta t) = p(t) - 2p \tag{6.6.51}$$

de forma que si el momento antes de la colisión es p_0 el momento después la colisión es

$$p(t+\delta t) = p_0 - 2p_0 = -p_0 \tag{6.6.52}$$

invirtiendo el sentido de la trayectoria. Con este cambio de momento, deducimos el correspondiente cambio de energía, y vemos que

$$H = \frac{(-p_0)^2}{2m} = \frac{p_0^2}{2m} \tag{6.6.53}$$

que corresponde de nuevo a la partícula libre. En conclusión, el efecto en la frontera del medio continuo determina la dinámica del sistema, en este caso, la dinámica de la partícula libre entre las sucesivas colisiones.

(c) Con este ejemplo sencillo podemos comprobar en qué consiste la teoría de campo y en qué consiste la teoría del medio continuo, aunque realmente la dinámica de la partícula puntual no se estudia ni como campo ni como medio continuo, ya que no es necesario. Basta en este caso con tomar un potencial repulsivo en la posición de la pared, y definir el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\epsilon}{x+\ell} + \frac{\epsilon}{x-\ell} \tag{6.6.54}$$

entre dos paredes situadas en $x = \ell$ y $x = -\ell$. En el límite $\epsilon \to 0$, recuperamos el modelo de la partícula libre entre colisiones.

(d) Los sistemas disipativos pierden energía, esto es, el número de estados posibles en el espacio de fases se va reduciendo con el tiempo. Esta reducción es incompatible con la dinámica Hamiltoniana. Tomando el caso de la partícula libre en colisión con las paredes, si existe rozamiento la partícula finalmente se parará y quedará en equilibrio, y por tanto será una partícula libre en reposo. La dinámica Hamiltoniana establece en este caso que H se conserva constante, por lo que resulta incompatible que esta misma constante valga al inicio del movimiento $\frac{p_0^2}{2m}$ y 0 al final del movimiento.

(e) Las dos características definitorias de un sistema Hamiltoniano son la medida en el espacio de fases, $\int dqdp$ que se conserva constante, y la relación entre el tiempo y Hamiltoniano. Recordamos que $-H$ es el momento asociado al tiempo, de la misma forma que p es el momento asociado a la coordenada q. Desde el punto de vista de los generadores, H genera en el sistema el cambio de t a $t + dt$, esto es , la evolución temporal

$$\frac{dq}{dt} = [q, H] \Rightarrow dq = [q, H]dt \tag{6.6.55}$$

del mismo modo que p genera en el sistema el cambio en la coordenada de q a $q + dq$.

6.7. Ejercicios resueltos

6.7.1. Espacio de fases del péndulo simple

Para un péndulo de masa m y longitud l que oscila en el plano vertical,

(a) Describa su espacio de fases, determinando primero el Hamiltoniano del sistema. No considere la aproximación de ángulos pequeños.

(b) Represente en este espacio los tipos de trayectorias posibles del sistema en función de la energía del péndulo.

(c) Demuestre que cuando el ángulo de oscilación es suficientemente pequeño, la trayectoria del péndulo en el espacio de fases es una elipse. Para ello, aplique la aproximación de ángulos pequeños.

(a) El sistema tiene un único grado de libertad, siendo el ángulo de giro φ respecto a la vertical la coordenada generalizada. Aunque parece razonable fijar el ángulo de giro entre $-\pi$ y π, este rango sólo daría cabida al movimiento de oscilación en torno al punto de equilibrio, cuando es posible también un movimiento de libración, en el que la masa m realiza giros completos en un misma dirección, sin cambiar de sentido. Por tanto, el espacio de fases (φ, p_φ) comprende todo el plano cartesiano en dos dimensiones.

El momento generalizado está dado por

$$p_\varphi = ml^2\dot{\varphi} \tag{6.7.1}$$

y a partir del Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi \tag{6.7.2}$$

podemos construir el Hamiltoniano, en la forma

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi = E \tag{6.7.3}$$

que representa la energía total del péndulo, que por definición es mayor que cero. Hemos tomado como referencia una energía potencial nula en la posición horizontal del punto fijo del péndulo.

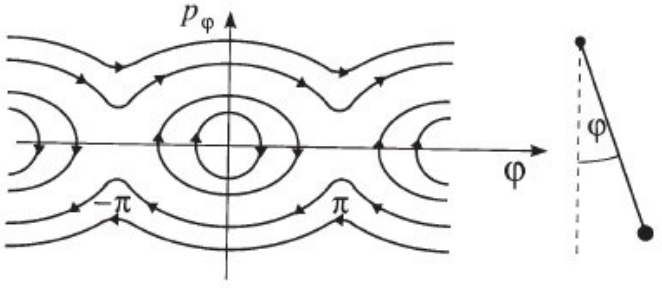
(b) Las trayectorias en el espacio de fases (φ, p_φ) vienen dadas por la ecuación de la energía

$$\frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi = E \tag{6.7.4}$$

con dos soluciones posibles para el momento en función de la coordenada angular:

$$p_\varphi = \pm\sqrt{2ml^2\left(E + mgl\cos\varphi\right)} \tag{6.7.5}$$

En la figura siguiente se muestran algunos ejemplos de las trayectorias en función de la energía



Podemos distinguir dos casos.

(1) Cuando el movimiento no tiene un punto de retorno, la masa m realiza un movimiento de *rotación*. Para ello es necesario exigir que la energía cinética en el punto más alto sea positiva, esto es, que p_φ^2 sea positivo en el punto más alto ($\varphi = \pi,\ \cos\varphi = -1$). Esta condición se corresponde con un valor de energía

$$E > mgl \tag{6.7.6}$$

y da lugar a una trayectoria no acotada en el espacio de fases.

(2) Por el contrario, cuando la energía es menor que mgl existirán dos puntos de retorno $\pm\varphi_r$, tales que $mgl\cos\varphi_r = E$, dispuestos simétricamente respecto a $\varphi = 0$. La masa oscilará en torno al punto de equilibrio estable, con una amplitud máxima φ_r, y la trayectoria en el espacio de fases será cerrada, y parecida a una elipse.

(c) Cuando el ángulo de oscilación es pequeño $\varphi_r(\text{radianes}) \ll 1$, podemos hacer la aproximación en primer orden

$$\cos\varphi \simeq 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 \tag{6.7.7}$$

con lo cual la trayectoria en el espacio de fases es en esta aproximación

$$\frac{p_\varphi^2}{2ml^2} + \frac{1}{2}mgl\varphi^2 = E + mgl \tag{6.7.8}$$

que resulta ser la elipse

$$\frac{\varphi^2}{2\left(E+mgl\right)/mgl} + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2\left(E+mgl\right)} = 1 \tag{6.7.9}$$

de semiejes mayor y menor

$$a = \sqrt{2\frac{E+mgl}{mgl}} \tag{6.7.10}$$

$$b = \sqrt{2ml^2\left(E+mgl\right)} \tag{6.7.11}$$

6.7.2. Sistema de partículas libres en una dimensión

Considere un sistema unidimensional de partículas libres que se mueven a lo largo del eje x, que inicialmente tiene sus coordenadas en el intervalo $x_0 < x < x_0 + \Delta x_0$ y sus momentos en el intervalo $p_0 < p < p_0 + \Delta p_0$.

(a) Determine cómo se va modificando con el tiempo el volumen del sistema en el espacio de coordenadas, en el espacio de momentos, y el en el espacio de fases. Note que el término volumen del sistema se refiere en general a la noción de dimensión de la región en el espacio dado, y no implica necesariamente que éste sea un volumen tridimensional propiamente dicho.

(b) Analice cómo se verían modificados estos resultados si las partículas en su movimiento rebotaran de forma elástica en sendas paredes impenetrables situadas, por ejemplo, en $x = \pm L$.

(a) Dado que tanto el momento de las partículas como el Hamiltoniano son constantes, por tratarse de partículas libres, el volumen en el espacio de momentos y el volumen en el espacio de fases no cambian en el tiempo. Este último resultado se obtiene aplicando el teorema de Liouville considerando que el número de partículas en el sistema no cambia en el tiempo, y por tanto, la constancia de la densidad implica la constancia del área en el espacio de fases.

Sin embargo, no ocurre lo mismo con el volumen en el espacio de coordenadas. Si en el instante inicial la coordenada x se encuentra en el intervalo $x_0 < x < x_0 + \Delta x_0$, en el instante t el valor mínimo de x sería $x_0 + \frac{p_0}{m}t$, y el valor máximo sería $x_0 + \Delta x_0 + \frac{p_0+\Delta p_0}{m}t$, luego la longitud en el espacio x pasaría del valor Δx_0 en $t = 0$, al valor $\Delta x_0 + \frac{\Delta p_0}{m}t$ en el instante t. Por tanto, el volumen en el espacio de coordenadas crece linealmente con el tiempo.

(b) Cuando el movimiento libre se ve restringido espacialmente entre las dos paredes impenetrables situadas en $x = \pm L$, el volumen en el espacio de coordenadas se hace constante, y en el espacio de fases los estados del sistema, a través de los sucesivos choques elásticos con las paredes, llenan las dos regiones limitadas por los valores $-L \leq x \leq L$, $p_0 < p < p_0 + \Delta p_0$ y $-L \leq x \leq L$, $-p_0 - \Delta p_0 < p < -p_0$, y situadas a ambos lados del eje x.

Comentarios finales La mejor forma de comprobar estos dos resultados analíticos en el espacio de fases es con la figura geométrica correspondiente. En este caso, inicialmente en $t = 0$ las trayectorias se sitúan en el interior de un rectángulo de lados $\Delta x_0\,, \Delta p_0$. Para $t > 0$ el rectángulo se transforma en un paralelogramo, los lados verticales se van inclinando mientras que los lados horizontales se mantienen horizontales.

Que la transformación $(x_0, p_0) \rightarrow (x, p)$ sea canónica hace que el área del paralelogramo sea igual que el área del rectángulo inicial (se conserva el área en el espacio de fases). Pero no sucede lo mismo con la proyección sobre cada eje x ó p. La proyección sobre el eje x nos da el volumen ocupado en el espacio de configuraciones, y este volumen (la proyección sobre la linea horizontal del paralelogramo) crece en el tiempo, ya que el paralelogramo se va inclinando más con el tiempo. De forma adicional, la proyección sobre el eje p es la misma que la inicial, ya que el paralelogramo mantiene horizontales sus lados horizontales. Es decir, no hay ensanchamiento en el espacio p (las partículas son libres y su momento es constante).

Dicho esto, la diferencia en el cálculo analítico es que proyectamos en la dirección $p(t)$ (esto es, en dirección paralela a los lados inclinados) para obtener el área (conservada) en el espacio de fases, mientras que proyectamos verticalmente para obtener el volumen en el espacio de configuraciones. Las dos proyecciones no son equivalentes, en el primer caso, proyectamos a lo largo de las trayectorias en el espacio de fases, mientras que en el segundo caso proyectamos directamente sobre el eje horizontal sin tener en cuenta donde se sitúan las trayectorias del sistema. De ahí la diferencia de los resultados.

6.7.3. Sistema de partículas en campo gravitatorio

Considere un sistema de partículas de masa m situado en un campo gravitatorio constante. La energía total de cada partícula es constante, con el valor

$$H = E = \frac{p^2}{2m} - mgq \tag{6.7.12}$$

(a) Determine las trayectorias en el espacio de fases en función de la energía.

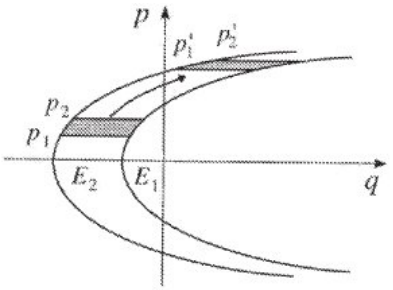
(b) Determine el área del espacio de fases que cubre el sistema de partículas en el instante t si en el instante inicial $t = 0$ tenía momentos en el intervalo $p_1 \leq p \leq p_2$ y energías en el intervalo $E_1 \leq E \leq E_2$.

(c) Demuestre que se satisface el teorema de Liouville para la evolución en el tiempo de este conjunto de partículas.

(a) A partir de la ecuación de la energía, deducimos que las trayectorias $p\,(q)$ en el espacio de fases son las parábolas

$$p = \pm\sqrt{2m\,(E + mgq)} \tag{6.7.13}$$

con la energía como parámetro, como pueden verse representadas en la figura



(b) El área cubierta inicialmente por el sistema de partículas está dada directamente por la integral doble en el espacio de fases (q, p)

$$A(t=0) = \iint dpdq \tag{6.7.14}$$

En esta integral, para cada valor del momento p, la variación en q se debe producir desde el valor que corresponde a la energía E_1 hasta el valor que corresponde a la energía E_2, según la trayectoria $q(p)$

$$q = \frac{p^2}{2m^2 g} - \frac{E}{mg} \tag{6.7.15}$$

Por tanto, el área está dada por la expresión integral

$$A(0) = \int_{p_1}^{p_2} dp \int_{\frac{p^2}{2m^2 g} - \frac{E_2}{mg}}^{\frac{p^2}{2m^2 g} - \frac{E_1}{mg}} dq = \frac{E_2 - E_1}{mg} \int_{p_1}^{p_2} dp = \frac{(E_2 - E_1)(p_2 - p_1)}{mg} \tag{6.7.16}$$

Permitiendo ahora que el sistema evolucione, y dado que la energía se conserva, el área cubierta por el sistema de partículas en el instante final t será directamente de la expresión anterior

$$A(t) = \frac{(E_2 - E_1)(p_2' - p_1')}{mg} \tag{6.7.17}$$

donde p_1', p_2' son los momentos de la partícula en el instante t, supuesto que parten en $t = 0$ de los valores p_1, p_2.

Integrando la ecuación de Hamilton para el momento p,

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = mg \tag{6.7.18}$$

encontramos el momento en todo instante de tiempo

$$p(t) = p(0) + mgt \tag{6.7.19}$$

Una vez obtenida esta dependencia temporal, comprobamos que

$$p_2' - p_1' = p_2 + mgt - p_1 - mgt = p_2 - p_1 \tag{6.7.20}$$

y comprobamos por tanto, que se conserva el área en el espacio de fases

$$A(t) = A(0) \tag{6.7.21}$$

(c) Dado que el número N de partículas que se sitúan en el espacio de fases dentro del contorno de esta área inicial no ha cambiado, es decir, ni se gana ni se pierde partículas, y dado que el área se mantiene constante, se deduce que la densidad de partículas en el espacio de fases, definida por,

$$\rho \equiv \frac{N}{A} \tag{6.7.22}$$

es constante del movimiento, tal y como establece el teorema de Liouville.

6.7.4. Densidad de estados en el instante t

Sea $\rho(q_0, p_0, 0)$ la densidad de estados de un sistema en el instante inicial, y sea

$$q = F(q_0, p_0, t) \tag{6.7.23}$$

$$p = G(q_0, p_0, t) \tag{6.7.24}$$

la solución general del movimiento para las variables canónicas del sistema en función de sus condiciones iniciales. Aquí F, G representan funciones dadas de (q_0, p_0, t).

(a) Demuestre que la densidad de estados $\rho(q, p, t)$ del sistema en el instante t puede calcularse aplicando la definición (véase la sección 6.6.2)

$$\rho(q, p, t) \equiv \rho(F(q, -p, -t), -G(q, -p, -t), 0) \tag{6.7.25}$$

y que efectivamente, como toda densidad, satisface el teorema de Liouville.

(b) Demuestre así mismo que si el perfil inicial depende sólo del Hamiltoniano del sistema, la densidad es estacionaria en todo instante posterior.

(a) Debemos demostrar que la función del lado derecho de la ecuación

$$\rho(F(q, -p, -t), -G(q, -p, -t), 0) \tag{6.7.26}$$

satisface la ecuación de evolución en el espacio de fases, esto es,

$$0 = \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial\rho}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial\rho}{\partial p} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial\rho}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial\rho}{\partial p} \tag{6.7.27}$$

donde las derivadas temporales de las variables canónicas se obtienen derivando respecto al tiempo la solución general del movimiento, en la forma

$$\dot{q} = \dot{F}(q_0, p_0, t) \tag{6.7.28}$$

$$\dot{p} = \dot{G}(q_0, p_0, t) \tag{6.7.29}$$

La comprobación es directa, ya que

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(F(q, -p, -t), -G(q, -p, -t), 0) = \dot{F}(q, -p, -t)\frac{\partial\rho}{\partial q} - \dot{G}(q, -p, -t)\frac{\partial\rho}{\partial p} \tag{6.7.30}$$

y por la simetría del movimiento frente a la inversión temporal

$$\dot{F}(q, -p, -t) = \dot{q}(-t) = -\dot{q}(t) \tag{6.7.31}$$

$$\dot{G}(q, -p, -t) = -\dot{p}(-t) = \dot{p}(t) \tag{6.7.32}$$

obtenemos la relación pedida

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial\rho}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)\rho(F(q, -p, -t), -G(q, -p, -t), 0) = 0 \tag{6.7.33}$$

Por tanto, la densidad de estados en el instante t, así definida, satisface el teorema de Liouville.

(b) En el caso que la densidad en el instante inicial dependa sólo del Hamiltoniano, se verifica

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}\right)\rho(F(q, -p, -t), -G(q, -p, -t), 0) = 0 \tag{6.7.34}$$

Y por tanto, de la ecuación de Liouville deducimos que la derivada parcial respecto al tiempo es nula:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(F\left(q,-p,-t\right),-G\left(q,-p,-t\right),0\right)=\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(q,p,t\right)=0 \tag{6.7.35}$$

luego la densidad es estacionaria (no depende explícitamente del tiempo) en todo instante posterior.

6.7.5. Factor de normalización en la densidad de estados

Sea un sistema de partículas cuya densidad de estados en el espacio de fases en el instante inicial tiene el valor

$$\rho\left(q_0,p_0,0\right)=\frac{1}{Z}\exp\left\{-\frac{q_0^2}{2a}-\frac{p_0^2}{2b}\right\} \tag{6.7.36}$$

siendo a, b dos constantes positivas.

(a) Determine la densidad $\rho\left(q,p,t\right)$ en el instante t considerando que las partículas del sistema son libres. Para ello, utilice los resultados obtenidos en el ejercicio 6.7.4. Determine también el valor del factor de normalización Z.

(b) Analice si el resultado obtenido (una densidad dependiente del tiempo) supone una contradicción con el concepto de densidad independiente del tiempo para sistemas conservativos en equilibrio.

(c) Determine la densidad $\rho\left(q,p,t\right)$ en el instante t para un sistema de osciladores armónicos, si parte de la misma densidad inicial del enunciado.

(a) Para el sistema de partículas libres, la ecuación de movimiento es

$$q=F\left(q_0,p_0,t\right)=q_0+\frac{p_0}{m}t \tag{6.7.37}$$

$$p=G\left(q_0,p_0,t\right)=p_0 \tag{6.7.38}$$

y su inversa

$$q_0=q+\frac{p}{m}t \tag{6.7.39}$$

$$p_0=p \tag{6.7.40}$$

por tanto, la densidad en el instante t viene dada por, aplicando los resultados del ejercicio 6.7.4,

$$\rho\left(q,p,t\right)\equiv\rho\left(q+\frac{p}{m}t,p,0\right)=\frac{1}{Z}\exp\left\{-\frac{\left(q+\frac{p}{m}t\right)^2}{2a}-\frac{p^2}{2b}\right\} \tag{6.7.41}$$

Por definición, la integral de la densidad en todo el volumen del espacio de fases es igual al número de partículas. Para una única partícula en el espacio de fases, la normalización de la densidad en el espacio de fases debe satisfacer

$$\int_\Gamma \rho dqdp=1 \tag{6.7.42}$$

y se escribe para la partícula libre

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho dqdp=\frac{1}{Z}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{q_0^2}{2a}\right)dq_0\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{p_0^2}{2b}\right)dp_0=1 \tag{6.7.43}$$

Evaluando entonces las integrales llegamos a la condición

$$Z=2\pi\sqrt{ab} \tag{6.7.44}$$

con lo cual

$$\rho\left(q,p,t\right)=\frac{1}{2\pi\sqrt{ab}}\exp\left\{-\frac{\left(q+\frac{p}{m}t\right)^{2}}{2a}-\frac{p^{2}}{2b}\right\} \tag{6.7.45}$$

que resulta ser una densidad dependiente del tiempo.

(b) Una densidad independiente del tiempo, y por tanto estacionaria, se corresponde siempre con una situación de equilibrio estadístico del sistema, cuando la distribución de los estados accesibles del sistema no depende del tiempo, es el mismo en todo momento. Esto sucede para todos los sistemas conservativos, cuyo Hamiltoniano es constante, siempre que la densidad inicial dependa únicamente del Hamiltoniano.
No obstante, no es el caso más general, ya que siempre existen soluciones a la ecuación de Liouville que dependen del tiempo, (es decir densidades que dependen del tiempo, como el caso anterior), y que corresponden con situaciones de no equilibrio en la evolución de los estados accesibles en el espacio de fases.
En nuestro caso, el sistema es conservativo pero la densidad inicial no se corresponde con un equilibrio estadístico inicial (ya que no depende directamente del Hamiltoniano), y por tanto, la evolución del sistema da lugar a una densidad de estados de no equilibrio, esto es, dependiente del tiempo.

(c) Para el sistema de osciladores armónicos, la ecuación de movimiento es

$$q=q_{0}\cos\omega t+\frac{p_{0}}{m\omega}\operatorname{sen}\omega t \tag{6.7.46}$$

$$p=m\dot{q}=-m\omega q_{0}\operatorname{sen}\omega t+p_{0}\cos\omega t \tag{6.7.47}$$

con la solución inversa en el tiempo

$$q_{0}=q\cos\omega t+\frac{p}{m\omega}\operatorname{sen}\omega t \tag{6.7.48}$$

$$p_{0}=p\cos\omega t-m\omega q\operatorname{sen}\omega t \tag{6.7.49}$$

De aquí, la densidad de estados en el instante t viene dada por

$$\rho\left(q,p,t\right)\equiv\rho\left(q\cos\omega t+\frac{p}{m\omega}\operatorname{sen}\omega t,p\cos\omega t-m\omega q\operatorname{sen}\omega t,0\right) \tag{6.7.50}$$

con el mismo factor de normalización anterior. El resultado es

$$\begin{aligned}\rho\left(q,p,t\right)=&\frac{1}{2\pi ab}\cdot\\&\exp\left\{\begin{array}{c}-\left(\frac{\cos^{2}\omega t}{2a}+\frac{m^{2}\omega^{2}\operatorname{sen}^{2}\omega t}{2b}\right)q^{2}-\left(\frac{1}{am\omega}-\frac{m\omega}{b}\right)\operatorname{sen}\omega t\cos\omega tqp\\-\left(\frac{\operatorname{sen}^{2}\omega t}{2am^{2}\omega^{2}}+\frac{\cos^{2}\omega t}{2b}\right)p^{2}\end{array}\right\}\end{aligned} \tag{6.7.51}$$

y se obtienen las mismas conclusiones que en el caso de las partículas libres.

6.7.6. Dinámica de partículas en espacio de fases

Un grupo de partículas, todas de la misma masa, tienen en el instante inicial posiciones q_0 y momentos p_0 en el espacio de fases cubriendo completamente la región $-a \leq q_0 \leq a$ y $-b \leq p_0 \leq b$. Las partículas se desplazan durante el tiempo t por la acción del Hamiltoniano

$$H(q,p) = \frac{1}{4}\left(p^2+q^2\right)^2 \tag{6.7.52}$$

(a) Determine cualitativamente cuál es la región del espacio de fases ocupada por las partículas a medida que avanza el tiempo.

(b) Describa cuál es dicha región cuando $t \to \infty$.

(a) Para determinar la posición de las partículas, y por tanto, su distribución en el instante t, debemos resolver las ecuaciones de movimiento del sistema, esto es, las ecuaciones de Hamilton, definidas por

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad H = \text{cte} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \left(p^2+q^2\right)p = 2\sqrt{H}p \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\left(p^2+q^2\right)q = -2\sqrt{H}q \end{aligned} \tag{6.7.53}$$

que da lugar a la trayectoria en el espacio de fases:

$$q^2(t) + p^2(t) = \sqrt{4H} = q_0^2 + p_0^2 \tag{6.7.54}$$

siendo $(q(t), p(t))$ las soluciones a las leyes de movimiento

$$\ddot{q} + 4Hq = 0 \quad \Longrightarrow \quad q(t) = q_0\cos(2\sqrt{H}t) + p_0\sin(2\sqrt{H}t) \tag{6.7.55}$$

y

$$\ddot{p} + 4Hp = 0 \quad \Longrightarrow \quad p(t) = p_0\cos(2\sqrt{H}t) - q_0\sin(2\sqrt{H}t) \tag{6.7.56}$$

• Comprobamos entonces que el conjunto de partículas describen trayectorias circulares de radio R_0, con la frecuencia dada por

$$\omega = \sqrt{4H} = q_0^2 + p_0^2 \equiv R_0^2 \tag{6.7.57}$$

y en el sentido de las agujas del reloj. Partiendo de la ley del movimiento, podemos verificar que

- Para $q_0 > 0$ y $p_0 > 0$, inicialmente $q(t)$ crece y $p(t)$ decrece, luego el sentido de giro es el sentido de las agujas del reloj,
- Para $q_0 > 0$ y $p_0 < 0$, inicialmente $q(t)$ decrece y $p(t)$ se hace más negativo, luego el sentido de giro es el sentido de las agujas del reloj,
- Para $q_0 < 0$ y $p_0 < 0$, inicialmente $q(t)$ se hace más negativo, y $p(t)$ se hace menos negativo, luego el sentido de giro es el sentido de las agujas del reloj,
- Para $q_0 < 0$ y $p_0 > 0$, inicialmente $q(t)$ se hace menos negativo, y $p(t)$ crece, luego el sentido de giro es el sentido de las agujas del reloj,

Por tanto el sentido de giro de la trayectoria es globalmente en el sentido de las agujas del reloj, en consonancia con un movimiento de fluido incompresible en el espacio de fases.

Las partículas, inicialmente en el interior del rectángulo, van girando con una velocidad dependiente de la distancia al origen al cuadrado. El rectángulo, conforme pasa el tiempo, se va transformando en un círculo de radio $R_c = \sqrt{a^2 + b^2}$, con una densidad de estados en su interior variable en el tiempo, que satisface el teorema de Liouville en el espacio de fases

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \big[\rho, H\big] = 0 \tag{6.7.58}$$

(b) El sistema de partículas, en el límite $t \to \infty$, alcanza un estado estacionario, la densidad no depende explícitamente del tiempo, y la región ocupada por las partículas es el círculo de radio $R_c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Se llega a una situación de equilibrio que satisface

$$\frac{\partial \rho_{\rm eq}}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \big[\rho_{\rm eq}, H\big] = 0 \tag{6.7.59}$$

Es decir, la densidad es una constante del movimiento, junto al Hamiltoniano. Dado que el sistema es unidimensional, no existen otras constantes del movimiento salvo el Hamiltoniano, por lo que se deduce que la densidad debe ser función del Hamiltoniano. Y como el Hamiltoniano sólo depende de la coordenada radial en el espacio de fases

$$r \equiv \sqrt{q^2 + p^2} \tag{6.7.60}$$

podemos concluir que la densidad es función unicamente de r. Para determinarla unívocamente aplicamos el siguiente razonamiento:

- Dado que las partículas se mueven sobre trayectorias circulares de radio constante, el número de partículas que se distribuyen en cada radio dado no cambia en el tiempo:

  $$N_0(r) = N_{\rm eq}(r) \tag{6.7.61}$$

  Esto es,

  $$\rho_0(r)\ell(r) = \rho_{\rm eq}(r) \cdot 2\pi r \tag{6.7.62}$$

  siendo $\rho_0(r)$ la densidad inicial de partículas, en función del radio r, al iniciarse el movimiento, $\ell(r)$ la longitud de la circunferencia de radio r que se encuentra en el interior del rectángulo inicial, $\rho_{\rm eq}(r)$ la densidad de partículas en el equilibrio, y $2\pi r$ la longitud total de la circunferencia de radio r.

- Aunque no sea parte de la resolución solicitada, dicho valor $\ell(r)$ puede obtenerse de forma geométrica. Considerando el caso particular $a < b$, dicha longitud está dada por

  $$\ell(r) = 4 \cdot r\,(\phi_2 - \phi_1) \tag{6.7.63}$$

  con

  $$\cos\phi_1 = \text{mín}\left\{1, \frac{a}{r}\right\} \quad , \quad \sin\phi_2 = \text{mín}\left\{1, \frac{b}{r}\right\} \tag{6.7.64}$$

  Para $r \leq a$ la circunferencia está totalmente incluida en el rectángulo inicial, y obtenemos $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi/2$, $\ell(r) = 2\pi r$, de forma que la densidad en esta región interior tiene el mismo valor que el inicial, $\rho_{\rm eq}(r) = \rho_0(r)$. A partir de esta región la densidad va decreciendo con r hasta llegar a un valor nulo en la frontera exterior, $\rho_{\rm eq}(R_c) = 0$.

Comentarios adicionales Podemos analizar la dinámica del sistema haciendo uso de forma directa de una reparametrización temporal y los resultados descritos en la sección 6.6.1. En este caso, definiríamos de forma adicional el Hamiltoniano del oscilador armónico, según la expresión

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 \tag{6.7.65}$$

que, como sabemos, da lugar a la relación energía-frecuencia para la variable de acción

$$I = \frac{2\pi}{\omega} E \tag{6.7.66}$$

Relacionado con éste, el problema plantea un Hamiltoniano diferente, que puede redefinirse como

$$H' \equiv f(H) = H^2 = \frac{1}{4}\left(p^2 + q^2\right)^2 \tag{6.7.67}$$

Según se analiza en la sección 6.6.1, esta relación funcional $H' = f(H) \equiv H^2$ implica que las ecuaciones de Hamilton son las mismas, pero con distinto paramétro temporal. Esto es, se recorre la misma trayectoria en el espacio de fases, en este caso la misma circunferencia, pero con distinta frecuencia. Dicha frecuencia está relacionada con el cambio de parámetro temporal (ecuación 6.6.5), que reescribimos aquí en la forma

$$t = f'(H)\tau \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{t}{f'(H)} \tag{6.7.68}$$

siendo t el parámetro temporal para el oscilador armónico. De aquí obtenemos directamente el valor de la frecuencia en la forma

$$\omega_\tau \equiv \frac{2\pi}{T_\tau} = \frac{2\pi}{T_t / f'(H)} = \omega_t f'(H) \tag{6.7.69}$$

Teniendo en cuenta que la frecuencia propia del oscilador armónico estaría dada por

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} \quad \rightarrow \quad \omega_t = 1 \tag{6.7.70}$$

y que la función $f(H)$ está dada por

$$f(H) = H^2 \quad \rightarrow \quad f'(H) = 2H \equiv 2\sqrt{H'} \tag{6.7.71}$$

siendo $H' \equiv H^2$ el Hamiltoniano del problema, obtenemos de nuevo el resultado

$$\omega_\tau \equiv \omega' = 2\sqrt{H'} \tag{6.7.72}$$

obtenido anteriormente con la resolución directa de las ecuaciones de Hamilton.

6.7.7. Dinámica en el espacio de fases en presencia de una fuerza externa no conservativa

En presencia de una fuerza externa F que no deriva de un potencial, la segunda ecuación de Hamilton para un movimiento unidimensional se escribe

$$\frac{dp}{dt} = F - \frac{\partial H}{\partial q} \tag{6.7.73}$$

(a) Demuestre que en este caso en general no se satisface el teorema de Liouville, esto es, obtenga la ecuación para la evolución temporal de la densidad y demuestre que

$$\frac{d\rho}{dt} \neq 0 \tag{6.7.74}$$

(b) Integre la ecuación resultante en el caso de que la fuerza F sea una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad. Interprete físicamente el resultado.

Nota introductoria La denominada *ecuación de continuidad* (en su forma diferencial)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{6.7.75}$$

establece que en la evolución dinámica del sistema no desaparece ningún estado específico, del mismo modo que no aparece ningún estado nuevo, distinto a los iniciales. En este sentido, también se denomina ecuación de *conservación de la probabilidad*. Es una ecuación que se aplica a distintos sistemas mecánicos, y no necesariamente está ligado a una densidad de estados constante en el tiempo. Por ejemplo, en un fluido se satisface la ecuación de continuidad si no existe una fuente o sumidero en el fluido. Y si existieran alguno de éstos, aparecería en el lado derecho de la ecuación de continuidad el término correspondiente de fuente o sumidero.

Lo destacable aquí es que la ecuación de continuidad no es igual a la ecuación de densidad constante, dado que, por definición la evolución temporal de la densidad está dada por la expresión

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \tag{6.7.76}$$

De hecho, uniendo los dos resultados, podemos ver que la ecuación de continuidad puede escribirse en la forma

$$\frac{d\rho}{dt} - \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{6.7.77}$$

ó

$$\frac{d\rho}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{v})\, \rho = 0 \tag{6.7.78}$$

(a) A partir de aquí, el resultado dependerá del perfil de velocidades que tengamos. En el caso Hamiltoniano, la dinámica en el espacio de fases satisface $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, y por tanto corresponde a un fluido incomprensible, de ahí que en el espacio de fases tengamos el teorema de Liouville

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{6.7.79}$$

Si además el sistema sufre la acción de una fuerza, no vinculada a un potencial, y por tanto disipativa, la dinámica deja de ser la de un fluido incompresible, y tenemos necesariamente

$$\frac{d\rho}{dt} \neq 0 \tag{6.7.80}$$

En particular, para el sistema bajo consideración

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} + \frac{\partial F}{\partial p} \tag{6.7.81}$$

y con ello

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial p} \rho \tag{6.7.82}$$

(b) Tomando por simplicidad el Hamiltoniano de una partícula libre

$$H = \frac{p^2}{2m} \tag{6.7.83}$$

para un fuerza F de rozamiento proporcional a la velocidad, obtenemos

$$v \equiv \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \Longrightarrow \quad F = -bv \equiv -\frac{b}{m} p \tag{6.7.84}$$

con lo cual, la ecuación resultante para la evolución temporal de la densidad

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{b}{m}\rho \tag{6.7.85}$$

admite la solución

$$\rho(t) = \rho(0)e^{\frac{b}{m}t} \tag{6.7.86}$$

esto es, la densidad de estados crece exponencialmente en el tiempo. Este crecimiento está directamente relacionado con la acumulación de estados por efecto del rozamiento del sistema: los estados iniciales van perdiendo parte de su energía, y tienden a acumularse en las regiones de menor energía del espacio de fases. En el límite $t \to \infty$, la densidad sería infinita, la partícula se encontraría en reposo, y todos los estados de energía iniciales estarían acumulados en el estado de energía final $E = 0$.

6.8. Teoría del campo medio

6.8.1. Introducción

Reinterpretación de la densidad ρ Hemos visto anteriormente que la densidad $\rho(q, p, t)$ tiene dos significados complementarios: 1) la densidad de puntos en el espacio de fases (q, p), y 2) la función definida en el espacio de fases que contiene la información completa de la dinámica del sistema en cada instante dado. Detallamos ahora una tercera interpretación: 3) ρ determina la densidad de probabilidad en el espacio de fases, como explicamos a continuación.

• Consideremos un sistema con N grados de libertad que se mueve por la acción de un Hamiltoniano independiente del tiempo

$$H = H(q, p) \quad , \quad \frac{dH}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad H(q, p) = \text{cte} \equiv E \tag{6.8.1}$$

Esta relación funcional representa una *superficie* en el espacio de fases sobre la cual se localizan a lo largo del tiempo los estados que recorre el sistema. En lugar de analizar los distintos puntos de la trayectoria del sistema en un espacio de fases extendido que incluya el tiempo, vamos a considerar un conjunto de sistemas idénticos, denominado *asamblea*, y vamos a analizar la distribución en el espacio de fases del conjunto de estados (uno por sistema) en el espacio de fases en un instante dado del tiempo, que podemos considerar arbitrario. Físicamente lo que estamos analizando es la evolución dinámica del sistema independientemente de las condiciones iniciales de su movimiento. Para ello generamos distintas copias del sistema que difieren entre sí en las condiciones iniciales, y que por tanto, en un instante t dado, representarán puntos diferentes en el espacio de fases, pero gobernados por la misma dinámica (mismo Hamiltoniano). Sea $\mathcal{N}$ el número de copias del sistema, de forma que partimos en $t = 0$ de un conjunto de $\mathcal{N}$ puntos en el espacio de fases, y seguimos su distribución en este mismo espacio de fases a medida que avanza el tiempo.

• Con esta descripción podemos interpretar ρ como la densidad de estados de la asamblea en el espacio de fases en el instante t tal que se satisface

$$\mathcal{N} = \int_\Omega \rho(q, p, t) dq dp \tag{6.8.2}$$

siendo Ω el volumen del espacio de fases sobre que el que está definido el Hamiltoniano del sistema. En particular, Ω será el volumen ocupado por la *capa* de energía E, con $H(q, p) = E$. Dentro de un subvolumen dado $\Delta\Omega$ de Ω, para el mismo instante de tiempo, el número de estados ocupados por la asamblea será

$$\Delta\mathcal{N}(t) \equiv \int_{\Delta\Omega} \rho(q, p, t) dq dp \tag{6.8.3}$$

Mientras que $\mathcal{N}$ es una cantidad neta, igual al número inicial de estados elegidos, $\Delta\mathcal{N}(t)$ dependerá del tiempo ya que se mide sobre un subvolumen en el que puedan entrar y salir trayectorias a lo largo

del tiempo. Dividiendo estas dos cantidades, definimos la *probabilidad* de ocupación del subvolumen $\Delta\Omega$ dado, en la forma

$$\frac{\Delta\mathcal{N}(t)}{\mathcal{N}} \tag{6.8.4}$$

como la probabilidad de que el sistema en el instante t ocupe cualquiera de los estados incluidos en $\Delta\Omega$. Aquí el sentido probabilístico únicamente proviene de nuestra elección al azar de un estado dado del sistema, dentro del conjunto de los $\mathcal{N}$ estados posibles, y no es una probabilidad que se genere por la dinámica del sistema. La asamblea está formada por copias idénticas del sistema, independientes entre sí, que no interaccionan entre sí.

• Dado que estamos evaluando la probabilidad sobre un volumen dado, podemos introducir la *densidad de probabilidad* correspondiente en el espacio de fases, digamos ρ_N, definida por la expresión

$$\int_{\Delta\Omega} \rho_N(q,p,t)dqdp = \frac{\Delta\mathcal{N}(t)}{\mathcal{N}} \equiv \frac{\int_{\Delta\Omega} \rho(q,p,t)dqdp}{\mathcal{N}} \tag{6.8.5}$$

ó, dado que el subvolumen $\Delta\Omega$ es arbitrario,

$$\rho_N(q,p,t) = \frac{\rho(q,p,t)}{\mathcal{N}} \tag{6.8.6}$$

Aquí el subíndice N refleja el hecho de que la densidad ρ_N está referida al sistema particular de N grados de libertad, a diferencia de ρ, que es una densidad referida al conjunto de dichos sistemas que conforman la asamblea. A pesar de esta diferencia, al ser proporcionales entre sí, la densidad ρ_N también satisface el teorema de Liouville en el espacio de fases

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\rho_N}{dt} = 0 \tag{6.8.7}$$

y tiene la normalización

$$\int_{\Omega} \rho dqdp = \mathcal{N} \quad \Longrightarrow \quad \int_{\Omega} \rho_N dqdp = 1 \tag{6.8.8}$$

esto es, la probabilidad de que el estado del sistema se encuentre en algún punto dentro del volumen total Ω accesible es la unidad, para todo instante del tiempo.

Valores promedio Así mismo, con la densidad ρ_N podremos obtener los denominados *valores promedios* de cualquier cantidad dinámica $G(q,p,t)$ definida en el espacio de fases. En particular, el valor promedio estadístico de G, representado por $\langle G\rangle$, tiene la definición

$$\langle G\rangle \equiv \int_{\Omega} \rho_N(q,p,t)G(q,p,t)dqdp \tag{6.8.9}$$

y será en general una función del tiempo. Y tiene la interpretación usual en la teoría de la probabilidad: $\langle G\rangle$ representa el promedio del valor $G(q,p,t)$ sobre el conjunto de valores posibles para el sistema dado, en función de su distribución probabilística.

6.8.2. Densidades reducidas de probabilidad

• Según hemos indicado, estamos analizando el estado particular de un sistema de N grados de libertad, descrito en el espacio de fases $2N-$dimensional, con

$$dqdp \equiv d\boldsymbol{q}_1 d\boldsymbol{p}_1 \cdots d\boldsymbol{q}_N d\boldsymbol{p}_N \tag{6.8.10}$$

siendo $(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{p}_1)$ las variables canónicas asociadas al primer grado de libertad del sistema (primera partícula), y así sucesivamente hasta llegar a $(\boldsymbol{q}_N, \boldsymbol{p}_N)$ las variables canónicas asociadas al grado de libertad $N-$ésimo del sistema (partícula N). Vamos a introducir la notación conjunta

$$\xi_i \equiv (\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{p}_i) \tag{6.8.11}$$

para aligerar la notación matemática, siendo entonces

$$dqdp \equiv d\xi_1 \cdots d\xi_N \tag{6.8.12}$$

Densidad ρ_1 Consideremos ahora que el sistema tiene ciertas propiedades del movimiento que están asignadas únicamente a cada particula individual, y que no dependen de ninguna relación dinámica entre las partículas. El caso más sencillo es la energía cinética del sistema, definida por

$$T \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} \tag{6.8.13}$$

tomando por simplicidad un sistema de partículas con la misma masa, $m_i \equiv m$. Los momentos de las partículas, $\{\boldsymbol{p}_i\}$, son independientes entre sí, de forma que cada partícula tiene su propia energía cinética, resultando una propiedad asignada a la partícula individual. Para estudiar la distribución estadística de esta propiedad, por ejemplo, su valor promedio, necesitaremos definir de antemano una densidad de probabilidad que esté asignada también a la partícula individual. Y esta definición deberá provenir necesariamente de la densidad ρ_N para el sistema completo.

• Matemáticamente el proceso que nos lleva de la densidad ρ_N para todo el sistema a una densidad ρ_1 para cada partícula individual se denomina reducción, y por ello ρ_1 recibe el nombre de *densidad reducida* de probabilidad para 1 partícula. Así mismo, podremos definir la densidad reducida ρ_2 para la combinación de 2 partículas, que será útil para la descripción estadística de propiedades dinámicas asociadas exclusivamente a cada par de partículas del sistema, como puede ser por ejemplo la energía potencial de interacción entre pares. Y así sucesivamente con las distintas densidades reducidas de orden hasta $N-1$, siendo por definición la densidad reducida para N partículas la propia densidad ρ_N para el sistema completo. Según la teoría de la probabilidad, la reducción consiste en estudiar la propiedad de la partícula dada independientemente del valor que tenga la misma propiedad para el resto de partículas del sistema, esto es, analizamos por ejemplo la energía cinética de la partícula 1

$$T_1 \equiv \frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2m} \tag{6.8.14}$$

para todo valor de las variables canónicas $\xi_2, \cdots, \xi_N$ de las restantes partículas. La reducción de estos valores irrelevantes para nuestra descripción se obtiene con la integración en el subvolumen dado por $d\xi_2 \cdots d\xi_N$. Definimos así la densidad reducida de $1-$partícula como

$$\begin{aligned} \rho_1(\xi_1,t)d\xi_1 &\equiv \int_{i=2,..,N} \rho_N(\xi_1,..,\xi_N,t)d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_N \\ \Longrightarrow \quad \rho_1(\xi_1,t) &= \int \rho_N(\xi_1,..,\xi_N,t)d\xi_2 \cdots d\xi_N \end{aligned} \tag{6.8.15}$$

En el lado izquierdo de esta expresión tenemos la probabilidad de que la partícula 1 tenga sus variables canónicas ξ_1 en un entorno $d\xi_1$ del espacio de fases, y en el lado derecho tenemos la probabilidad de que el estado del sistema se encuentre en cualquier punto que tenga las variables canónicas ξ_1 en un entorno $d\xi_1$ del espacio de fases, por lo que ambas expresiones son equivalentes.

• Aún así, nos queda un punto adicional a tener en cuenta. En general un sistema de N partículas con las mismas propiedades (misma masa, misma carga eléctrica,..) debe considerarse desde el punto de vista estadístico como un sistema de partículas idénticas, ya que no existe un procedimiento dinámico que nos permita discriminar qué partícula en concreto estamos analizando. Es decir, la asignación matemática del número $1, 2, .., N$ a cada partícula es arbitrario, sin sentido físico. De esta forma, en relación a la densidad ρ_1, el resultado que hemos obtenido estaba particularizado para la partícula 1, y no tenía en cuenta esta asignación arbitraria. Dado que la asignación de una partícula en un conjunto de N partículas podría hacerse de N formas distintas, igual al número combinatorio

$$\binom{N}{1} = \frac{N!}{(N-1)!1!} = N \tag{6.8.16}$$

y dado que cada asignación es independiente de las restantes, la densidad reducida de probabilidad de una partícula viene dada por la expresión

$$\rho_1(\xi_1,t) = N \cdot \int \rho_N(\xi_1,..,\xi_N,t)d\xi_2 \cdots d\xi_N \tag{6.8.17}$$

en concordancia con el resultado probabilístico de que la probabilidad de un conjunto de sucesos independientes es la suma de las probabilidades de cada suceso individual. La notación (ξ_1, t) ya no se refiere a las variables canónicas de la primera partícula, ya que las partículas son idénticas y no están numeradas como tal, sino al espacio de fases de *una* partícula individual. Y partir de esta definición obtendríamos, por ejemplo, la energía cinética promedio para una partícula del sistema en la forma

$$\langle T_1 \rangle \equiv \int \rho_1(\xi_1, t) \frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2m} d\xi_1 \tag{6.8.18}$$

que como indicamos será función del tiempo.

Densidad ρ_2 Para obtener ahora la densidad de probabilidad para la combinación de dos partículas, el procedimiento ya sería directo, en la forma

$$\rho_2(\xi_1, \xi_2, t) = \lambda(N) \cdot \int \rho_N(\xi_1, .., \xi_N, t) d\xi_3 \cdots d\xi_N \tag{6.8.19}$$

siendo $\lambda(N)$ el número de formas distintas de seleccionar dos partículas distintas en un sistema de N partículas idénticas, dado por

$$\lambda(N) = 2! \cdot \binom{N}{2} = 2! \frac{N!}{(N-2)!2!} = N(N-1) \tag{6.8.20}$$

donde el primer factor proviene de las dos formas posibles de asignar las dos partículas seleccionadas en el conjunto N. Esto es, seleccionar las partículas 1 y 2 por este orden da el mismo resultado que seleccionarlas como 2 y 1. Tenemos por tanto

$$\rho_2(\xi_1, \xi_2, t) = N(N-1) \cdot \int \rho_N(\xi_1, .., \xi_N, t) d\xi_3 \cdots d\xi_N \tag{6.8.21}$$

y de aquí podríamos obtener por ejemplo la energía potencial promedio para la interacción entre dos partículas del sistema

$$\langle V_2 \rangle \equiv \frac{1}{2} \int \rho_2(\xi_1, \xi_2, t) V_2(\xi_1, \xi_2) \, d\xi_1 d\xi_2 \tag{6.8.22}$$

siendo V_2 el potencial de interacción por pares, y siendo el factor $1/2$ el factor corrector necesario ya que la integración en $d\xi_1$ y $d\xi_2$ se realiza de forma independiente entre sí, sin considerar que las partículas son idénticas, y por tanto da una contribución doble para cada valor.

6.8.3. Ecuación de Liouville

• La ecuación de Liouville para la densidad de probabilidad ρ_N del estado particular del sistema está dada por

$$\frac{d\rho_N}{dt} \equiv \frac{\partial \rho_N}{\partial t} + \Big[\rho_N, H\Big] = 0 \tag{6.8.23}$$

siendo H el Hamiltoniano del sistema, definido en el espacio de fases $2N-$dimensional. Analizaremos en concreto un sistema de partículas idénticas con un Hamiltoniano de la forma

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j<i} \Phi_{ij} \tag{6.8.24}$$

siendo Φ_{ij} el potencial de interacción por pares, de tipo central

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \equiv \Phi\left(|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|\right) \tag{6.8.25}$$

y donde el sumatorio en j se realiza únicamente para los términos $j < i$. Esto es, tenemos un sistema de partículas idénticas con interacciones binarias únicamente.

• La ecuación de Liouville se escribe

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \rho_N}{\partial \boldsymbol{x}_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}_i} \cdot \frac{\partial \rho_N}{\partial \boldsymbol{p}_i} = 0 \tag{6.8.26}$$

y teniendo en cuenta este Hamiltoniano, obtenemos

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m} \cdot \frac{\partial \rho_N}{\partial \boldsymbol{x}_i} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j<i} \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \boldsymbol{x}_i} \cdot \frac{\partial \rho_N}{\partial \boldsymbol{p}_i} = 0 \tag{6.8.27}$$

Lo que nos interesa es encontrar partiendo de este resultado una ecuación de evolución (ecuación de Liouville) para la densidad de probabilidad ρ_1 de una partícula, que como sabemos depende exclusivamente de las variables canónicas $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1)$ y del tiempo.

Ecuación de Liouville para ρ_1 Para ello, aislamos en el lado izquierdo la dependencia en los operadores de derivación respecto a $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1)$, con el resultado

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial \rho_N}{\partial \boldsymbol{x}_1} = -\sum_{i=2}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m} \cdot \frac{\partial \rho_N}{\partial \boldsymbol{x}_i} + \sum_{i=2}^{N} \sum_{j<i} \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \boldsymbol{x}_i} \cdot \frac{\partial \rho_N}{\partial \boldsymbol{p}_i} \equiv \mathcal{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) \tag{6.8.28}$$

resultando el lado derecho una función, digamos $\mathcal{F}$, dependiente del conjunto de variables canónicas, incluidas $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1)$, y del tiempo. Si ahora integramos ambos lados en las variables canónicas $(\xi_2, .., \xi_N)$, considerando que

$$\int \frac{\partial \rho_N}{\partial t} d\xi_2 \cdot \cdot d\xi_N = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho_N d\xi_2 \cdot \cdot d\xi_N \equiv \frac{1}{N} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \tag{6.8.29}$$

donde hemos insertado la definición 6.8.17 de ρ_1, y del mismo modo que

$$\int \frac{\boldsymbol{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial \rho_N}{\partial \boldsymbol{x}_1} d\xi_2 \cdot \cdot d\xi_N = \frac{\boldsymbol{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1} \int \rho_N d\xi_2 \cdot \cdot d\xi_N \equiv \frac{\boldsymbol{p}_1}{Nm} \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial \boldsymbol{x}_1} \tag{6.8.30}$$

tenemos la ecuación de evolución resultante para $\rho_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1, t)$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial \boldsymbol{x}_1} = N\mathcal{G}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1, t) \tag{6.8.31}$$

siendo $\mathcal{G}$ la función resultante de la integración en $\xi_2, .., \xi_N$ de la función previamente definida $\mathcal{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)$.

Campo medio Esta ecuación que hemos obtenido será útil únicamente en el caso de la función $\mathcal{G}$ admita la representación funcional

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1, t) \equiv \mathcal{G}(\rho_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)) \tag{6.8.32}$$

esto es, sea un funcional de la densidad ρ_1. La determinación de este funcional $\mathcal{G}$, particularizado para cada tipo de sistema, es el cometido de la teoría del campo medio.

6.8.4. Campo medio

Definición La teoría del campo medio pretende substituir la dinámica de los $N-1$ grados de libertad restantes con variables canónicas $(\xi_2, .., \xi_N)$ en la ecuación anterior por una acción efectiva ó *campo medio*, definida por el funcional $\mathcal{G}$, y dependiente de la propia localización de la partícula, definida a su vez por la densidad reducida ρ_1.

Ejemplo. Ecuación cinética de Boltzmann Consideremos un sistema en el que sólo se tienen en cuenta en el potencial de interacción las interacciones por pares de partículas. En este caso, la dinámica del sistema quedará descrita completamente por las densidades reducidas ρ_1 y ρ_2, y en particular la ecuación de Liouville para ρ_1 tendrá la expresión

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial \boldsymbol{x}_1} = \mathcal{G}\left(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1, t\right) \equiv \mathcal{I}[\rho_2\left(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{p}_2, t\right)] \tag{6.8.33}$$

siendo en este caso $\mathcal{I}$ un funcional integral de la densidad reducida ρ_2. El significado físico de esta ecuación es directo: la dinámica de la partícula individual corresponde a una partícula libre (término de la izquierda) que se apartará de su trayectoria libre en las regiones donde sufra una interacción localizada con las partículas vecinas, que serán las regiones donde la densidad conjunta ρ_2 sea significativamente distinta de cero (término de la derecha). De ahí que a este tipo de ecuaciones para la densidad reducida ρ_1 se las denomine ecuaciones cinéticas. Y en particular, la ecuación resultante se denominará *ecuación de Boltzmann* si es aplicable además la aproximación del llamado *caos molecular*

$$\rho_2\left(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{p}_2, t\right) \approx \rho_1\left(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1, t\right) \rho_1\left(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{p}_2, t\right) \tag{6.8.34}$$

que establece que la probabilidad de una interacción binaria entre dos partículas en una región dada del espacio de fases es el producto de las probabilidades de localización en esa región de cada una de las partículas en colisión.

Ejemplo. Ecuación de Vlasov Bajo ciertas condiciones generales, la ecuación de Liouville para la densidad reducida ρ_1 admite la expresión

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial \boldsymbol{x}_1} + \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial \boldsymbol{p}_1} = 0 \tag{6.8.35}$$

siendo $\boldsymbol{F}$ la fuerza *externa* que recibe la partícula por efecto del potencial de interacción con las partículas del sistema, y por tanto, dependiente de la coordenada $\boldsymbol{x}_1$ y el tiempo, y dada por la expresión integral

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1, t) = \int \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, t) \rho_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{p} \tag{6.8.36}$$

siendo $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, t)$ la fuerza de interacción genérica entre dos partículas situadas en las posiciones $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}_1$ y en el instante t. El significado físico de esta ecuación también es directo: la densidad ρ_1 para la partícula evoluciona de acuerdo con el campo de fuerzas instantáneo (en el mismo tiempo t) creado por la configuración espacial de las demás partículas que la rodean. Las condiciones que deben darse para que esta descripción sea válida son las que aseguran que el efecto de esta fuerza externa es instantáneo sobre la partícula: las partículas del sistema deben tener una débil correlación entre sí en sus movimientos, pero su interacción mutua debe ser de largo alcance, lo que se conoce como el *límite de Vlasov*. Con esto aseguramos que la fuerza externa varía en el tiempo de forma suficientemente suave como para que la trayectoria de la partícula, con densidad ρ_1, sea suficientemente continua y quede así representada por la solución de la ecuación diferencial correspondiente.

Solución autoconsistente La ecuación de Vlasov tiene la misma apariencia que la ecuación de Liouville en presencia de una fuerza externa independiente del tiempo, digamos $\bar{\boldsymbol{F}}$, que se escribe

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + [\rho, H] = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}}{m} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{F}} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{p}} = 0 \tag{6.8.37}$$

al ser

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{F}} \equiv -\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \quad , \quad H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \Phi(\boldsymbol{x}) \tag{6.8.38}$$

siendo $\Phi(\boldsymbol{x})$ el potencial externo. Además dado que el Hamiltoniano es constante del movimiento, lo mismo que ρ, necesariamente se satisface

$$\rho = f(H) \equiv f\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \Phi(\boldsymbol{x})\right) \tag{6.8.39}$$

• Volviendo a la ecuación de Vlasov, para que sea posible esta misma descripción para una fuerza externa dependiente del tiempo, necesariamente el potencial deberá cumplir el requisito adicional

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{x}} \equiv \boldsymbol{F} = \int \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1)\rho_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{p} \tag{6.8.40}$$

y por ello, necesitaremos conocer la densidad ρ_1 para poder obtener el potencial de interacción. Ésta es la denominada *condición de consistencia*, esto es, la solución debe ser auto-consistente, debe estar generada por el potencial externo y debe generar a su vez el mismo potencial externo. Y finalmente, dado que la interacción debe ser considerada instantánea (se produce en el mismo tiempo t) será necesario que

$$\frac{d\Phi}{dt} \approx \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{6.8.41}$$

de forma que $\partial\Phi/\partial t$ sea un término despreciable.

Irreversibilidad. Teorema H Hemos visto en la sección 6.6.2 que la dinámica Hamiltoniana es reversible en el tiempo: si $(q(t), p(t))$ es una trayectoria del sistema en el espacio de fases también lo será $(q(-t), -p(-t))$. Sin embargo, existe también una dinámica irreversible en los sistemas, como por ejemplo cuando se mezclan dos gases de partículas, el proceso es irreversible y no dará lugar a lo largo del tiempo a una evolución de los dos gases por separado. Esta irreversibilidad nos indica que la dinámica no podrá ser Hamiltoniana. Para entender esta transición de una dinámica reversible localmente a un proceso irreversible globalmente en un sistema dado, podemos analizar, dentro de la teoría del campo medio, distintos teoremas integrales, entre los que destaca el teorema H.

• Para ello definimos en primer lugar la denominada *función* $\mathcal{H}$ del sistema[1]

$$\mathcal{H} = \int \rho_N \ln \rho_N \; d\xi_1..d\xi_N \tag{6.8.43}$$

Por definición esta cantidad depende exclusivamente del tiempo. Si ahora derivamos respecto al tiempo, que es el parámetro temporal t asociado al Hamiltoniano dado, tenemos

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int \frac{d}{dt}\left(\rho_N \ln \rho_N\right) d\xi_1..d\xi_N \tag{6.8.44}$$

dado que el intervalo de integración sobre todo el espacio de fases accesible de un sistema aislado no depende del tiempo, y la derivada resulta ser

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_N \ln \rho_N\right) = (1 + \rho_N)\frac{d\rho_N}{dt} \equiv 0 \tag{6.8.45}$$

ya que la densidad ρ_N satisface el teorema de Liouville para un flujo Hamiltoniano

$$\frac{d\rho_N}{dt} = 0 \tag{6.8.46}$$

[1] Existe una relación directa de la función $\mathcal{H}$ con la entropía termodinámica S del sistema. Dado que ρ puede interpretarse como una densidad de estados en el espacio de fases, su entropía asociada es directamente

$$S = -k \int \rho \ln \rho \; dqdp \tag{6.8.42}$$

siendo k_B la constante de Boltzmann, y por tanto tenemos $S = -k_B\mathcal{H}$.

En conclusión, se satisface

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H} = \text{cte} \tag{6.8.47}$$

y además $\mathcal{H}$ mantiene la reversibilidad en el tiempo: si $\mathcal{H}(t)$ es solución de esta ecuación, también lo será $\mathcal{H}(-t)$ ya que se satisface igualmente

$$\frac{d\mathcal{H}(-t)}{dt} \equiv -\frac{d\mathcal{H}(-t)}{d\,(-t)} \equiv -\frac{d\mathcal{H}(\tau)}{d\tau} = 0 \tag{6.8.48}$$

• Es en la aproximación del campo medio cuando aparece un resultado distinto, ya que el sistema estudiado (en este caso, la dinámica de una partícula individual) deja de ser un sistema aislado al estar sometido a la interacción (el campo medio) con el conjunto de los otros grados de libertad del sistema completo. Éste es el origen de la irreversibilidad en la dinámica del sistema bajo observación (sistema de una partícula en este caso), y da lugar a la expresión general para la función $\mathcal{H}$

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} < 0 \tag{6.8.49}$$

ó en términos de la entropía, $S \equiv -k_B\mathcal{H}$, a la ley de crecimiento de la entropía $dS/dt > 0$. Esta irreversibilidad también nos indica que existe una dirección preferente del tiempo, ya que las dos direcciones t y $-t$ son incompatibles entre sí. En particular, la dirección *correcta* del tiempo estará vinculada con la dinámica del sistema y no será conocida a priori: corresponderá a la dirección en la que decrece la función $\mathcal{H}$ (crece la entropía S).

Transiciones de fases Otro particularidad especialmente útil de la teoría del campo medio es que nos permite analizar de forma sencilla las transiciones de fase que se producen en la dinámica de un sistema. Para que exista una *transición de fase*, en general, en un sistema es necesario que exista un parámetro característico *interno* de la partícula, digamos μ, y una cantidad dinámica *externa*, digamos M, que describa o caracterice el campo medio que sufre la partícula y que nos permita diferenciar físicamente dos características dinámicas distintas (dos fases distintas) dentro del sistema. Como caso sencillo podríamos tener, por ejemplo, en una fase el movimiento de la partícula en una región confinada del espacio de fases en forma de dominio, y en la otra fase un movimiento de la partícula en el espacio de fases que no estuviera acotado, o que el primer movimiento fuera regular y el segundo caótico. En todo caso, las dos fases son soluciones de la misma dinámica de la partícula, pero que corresponden a distintas configuraciones del campo medio, definidas por la cantidad M, y generadas por la variación del parámetro μ. Y llegaríamos a tener un valor M_1 para $\mu < \mu_c$ y un valor M_2 para $\mu > \mu_c$, y definiríamos μ_c como el valor del parámetro μ para esta transición de fase.

6.9. Ejercicios resueltos

6.9.1. Distribución canónica en el espacio de fases

Considere un gas de N moléculas idénticas que se encuentra en equilibrio y cuyo Hamiltoniano está dada por la expresión general

$$H\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}\right)=T\left(\boldsymbol{p}\right)+V\left(\boldsymbol{x}\right) \tag{6.9.1}$$

Demuestre que si la densidad del sistema admite la factorización

$$\rho\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}\right)=f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{p}) \quad , \quad g(\boldsymbol{p})=\prod_{i=1}^{N}g_i\left(\boldsymbol{p}_i^2\right) \tag{6.9.2}$$

entonces necesariamente tiene la solución

$$\rho\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}\right)=A\exp\left(-BH\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}\right)\right) \tag{6.9.3}$$

siendo A y B constantes.

• Tenemos en primer lugar el resultado general para una densidad independiente del tiempo, y por tanto en estado de equilibrio, aplicando el teorema de Liouville

$$0=\frac{d\rho}{dt}=[\rho,H] \quad \Longrightarrow \quad [\rho,H]=0 \tag{6.9.4}$$

que tiene como solución directa

$$\rho\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}\right)=\rho\left(H\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}\right)\right) \tag{6.9.5}$$

esto es, la densidad ρ es función exclusiva del Hamiltoniano H.

• Requerimos además, de acuerdo con el enunciado, que la solución esté factorizada en la forma

$$\rho\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}\right)=f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{p}) \quad , \quad g(\boldsymbol{p})=\prod_{i}^{N}g_i\left(\boldsymbol{p}_i^2\right) \tag{6.9.6}$$

Para comparar ambas expresiones analizamos la siguiente derivada

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dH}\equiv\frac{d\ln\rho}{dH} \tag{6.9.7}$$

Para simplificar la formulación matemática, desarrollamos la expresión anterior en términos de las variables canónicas genéricas (x,p) sin tener en cuenta su naturaleza vectorial. La demostración exacta diferirá de ésta desarrollada únicamente en este tratamiento vectorial. Analizamos por tanto la versión simplificada

$$\ln\rho=\ln f(x)+\ln g(p) \tag{6.9.8}$$

y con ello

$$\frac{d\ln\rho}{dH}=\frac{d\ln f(x)}{dH}+\frac{d\ln g(p)}{dH} \tag{6.9.9}$$

Realizando las derivadas por separado tenemos

$$\frac{d\ln f(x)}{dH}=\frac{f'(x)}{f(x)}\frac{1}{\partial H/\partial x} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial x}=V'(x) \tag{6.9.10}$$

y también

$$\frac{d\ln g(p)}{dH}=\frac{g'(p)}{g(p)}\frac{1}{\partial H/\partial p} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p}=T'(p) \tag{6.9.11}$$

Reuniendo ambos resultados obtenemos la derivada en la forma

$$\frac{d\ln\rho}{dH} = \frac{f'(x)}{V'(x)f(x)} + \frac{g'(p)}{T'(p)g(p)} \tag{6.9.12}$$

• Por consistencia, el lado derecho sólo puede depender del Hamiltoniano H, y ésto sólo sera posible si cada sumando del lado derecho, dependiente de x y p, es igual a una constante, no necesariamente la misma. Resolviendo esta condición por separado podemos encontrar la solución a las funciones f y g que determinan la función ρ. Obtenemos

$$\frac{g'(p)}{T'(p)g(p)} = \text{cte} \equiv C_1 \quad \Longrightarrow \quad g(p) = a_1 \exp(C_1 T(p)) \tag{6.9.13}$$

y

$$\frac{f'(x)}{V'(x)f(x)} = \text{cte} \equiv C_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = a_2 \exp(C_2 V(x)) \tag{6.9.14}$$

de forma que la expresión factorizada de la densidad ρ tiene la resolución exacta

$$\rho(x,p) = f(x)g(p) = a_1 \exp(C_1 T(p)) \cdot a_2 \exp(C_2 V(x)) \tag{6.9.15}$$

Finalmente, para que la expresión obtenida dependa exclusivamente del Hamiltoniano $H = T(p) + V(x)$, será necesario identificar las constantes implicadas en la forma

$$a_1 = a_2 \equiv A \quad , \quad C_1 = C_2 \equiv -B \tag{6.9.16}$$

y obtenemos el resultado pedido

$$\rho(x,p) = A\exp(-BH(x,p)) \tag{6.9.17}$$

• En el caso de que (q,p) sean variables vectoriales, el procedimiento es similar, aunque en este caso debemos evaluar directamente el valor del corchete de Poisson $[\rho, H] = 0$ en la forma

$$[\rho, H] \equiv \frac{\partial\rho}{\partial \boldsymbol{x}_i}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_i} - \frac{\partial\rho}{\partial \boldsymbol{p}_i}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}_i} = 0 \tag{6.9.18}$$

con suma en i, y siendo

$$\frac{\partial\rho}{\partial \boldsymbol{x}_i} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_i} g(\boldsymbol{p}) \quad , \quad \frac{\partial\rho}{\partial \boldsymbol{p}_i} = \frac{\partial g(\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}_i} f(\boldsymbol{x}) \tag{6.9.19}$$

y

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}_i} = \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_i} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_i} = \frac{\partial T(\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}_i} \tag{6.9.20}$$

que nos lleva a la condición

$$\frac{\partial \ln f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_i}\frac{\partial T(\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}_i} = \frac{\partial \ln g(\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}_i}\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_i} \tag{6.9.21}$$

Dado que $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ son variables canónicas independientes, esto es, no puede existir una relación funcional entre ellas, la condición anterior será cierta sólo si no establece ninguna relación funcional. Para ello es necesario tener simultáneamente

$$\frac{\partial \ln f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_i} = C_1 \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_i} \quad , \quad \frac{\partial T(\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}_i} = \frac{1}{C_1}\frac{\partial \ln g(\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}_i} \tag{6.9.22}$$

siendo C_1 una constante. En la segunda relación tenemos, por las propias definiciones de enunciado, $T = \sum_i T_i,\ \ln g = \sum_i \ln g_i$,

$$\frac{\partial T(\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}_i} = \frac{\partial T_i(\boldsymbol{p}_i)}{\partial \boldsymbol{p}_i} \quad , \quad \frac{\partial \ln g(\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}_i} = \frac{\partial \ln g_i(\boldsymbol{p}_i)}{\partial \boldsymbol{p}_i} \tag{6.9.23}$$

Con esto, la integración en ambos casos es directa, con el resultado

$$f(\boldsymbol{x}) = C_2 \exp(C_1 V(\boldsymbol{x})) \quad , \quad g_i(\boldsymbol{p}_i) = C_2 \exp(C_1 T_i(\boldsymbol{p}_i)) \tag{6.9.24}$$

donde hemos asignado la misma constante de integración C_2, lo que nos lleva efectivamente al resultado pedido

$$\begin{aligned} \rho &= C_2 \exp(C_1 V(\boldsymbol{x})) \prod_i C_2 \exp(C_1 T_i(\boldsymbol{p}_i)) = (C_2)^{N+1} \exp\left(C_1 \left(\sum_i T_i(\boldsymbol{p}_i)) + V(\boldsymbol{x}) \right) \right) \\ &= (C_2)^{N+1} \exp\left(C_1 \left(T(\boldsymbol{p}) + V(\boldsymbol{x}) \right) \right) \equiv A \exp\left(-BH\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p} \right) \right) \end{aligned} \tag{6.9.25}$$

6.9.2. Densidad reducida para gas molecular

Considere un gas de N moléculas idénticas, sin interacción, en el que una de las moléculas se mueve con velocidad constante $\boldsymbol{v}$ y está localizada en el origen en el instante $t = 0$. Las moléculas restantes permanecen inmóviles en todo instante de tiempo en las posiciones fijas $\boldsymbol{x}_{i0}$, con $i = 2, .., N$.

(a) Determine la densidad de probabilidad ρ_N de este estado particular del gas

(b) Obtenga a partir de ρ_N la densidad de probabilidad de la partícula, ρ_1

(c) Obtenga la expresión de la *densidad de número* $n\left(\boldsymbol{x}, t\right)$, definida por

$$n\left(\boldsymbol{x}, t\right) \equiv \int \rho_1\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t\right) d\boldsymbol{p} \tag{6.9.26}$$

y verifique que su normalización (integración sobre todo el espacio $\boldsymbol{x}$) es correcta.

Nota: Cuando una partícula sigue en el espacio de fases la ley de movimiento conocida $(q(t), p(t))$ su densidad de $1-$partícula está dada por la expresión

$$\rho_1(q, p, t) = \delta(q - q(t))\delta(p - p(t)) \tag{6.9.27}$$

de forma que, utilizando las propiedades de la función δ, se satisface

$$\int \rho_1(q, p, t) dq dp = \int \delta(q - q(t)) dq \cdot \int \delta(p - p(t)) dp = 1 \cdot 1 = 1 \tag{6.9.28}$$

esto es, comprobamos que efectivamente la probabilidad de que la partícula esté localizada en algún punto de la región accesible del espacio de fases es la unidad.

(a) Dado que las partículas son idénticas tenemos el resultado general (6.8.17)

$$\rho_1(\xi_1, t) = N \cdot \int \rho_N(\xi_1, .., \xi_N, t) d\xi_2 \cdots d\xi_N \tag{6.9.29}$$

Por otro lado, según indica la nota del enunciado, ρ_1 está dada por la expresión, para la partícula 1

$$\rho_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1, t) = \delta(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{v}t)\delta(\boldsymbol{p}_1 - m\boldsymbol{v}) \tag{6.9.30}$$

dado que la ley de movimiento para la partícula 1 es

$$\boldsymbol{v} = \text{cte} \quad , \quad \boldsymbol{x}(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{v}t \quad , \quad \boldsymbol{p}(t) = m\boldsymbol{v} \tag{6.9.31}$$

Igualando ambas expresiones, e introduciendo los factores δ correspondientes, para coordenadas y momentos, de las restantes $N - 1$ partículas, podemos concluir por identificación que la densidad

ρ_N vendría dada por la expresión

$$\rho_N(\xi_1,\xi_2,..,\xi_N,t)=\frac{1}{N}\delta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{v}t)\delta(\boldsymbol{p}_1-m\boldsymbol{v})\delta(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{20})\delta(\boldsymbol{p}_2)\cdots\delta(\boldsymbol{x}_N-\boldsymbol{x}_{N0})\delta(\boldsymbol{p}_N) \quad (6.9.32)$$

de acuerdo con las leyes de movimiento adicionales para las $N-1$ moléculas en reposo

$$\boldsymbol{x}_i(t)=\boldsymbol{x}_{i0} \quad , \quad \boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{0} \quad , \quad i=2,..,N \quad (6.9.33)$$

Este resultado no es completo ya que, aunque que no hemos identificado cada una de las moléculas en reposo, sí hemos identificado la molécula en movimiento como la molécula 1, cuando no tiene por qué ser cierto, dado que las partículas son indistinguibles, al ser idénticas. Debemos sumar por tanto a este resultado el que resulta de la asignación de las etiquetas restantes $i=2,..,N$ a la molécula en movimiento. Con ello, la densidad ρ_N para estas partículas idénticas estará dada por

$$\begin{aligned}\rho_N(\xi_1,\xi_2,..,\xi_N,t)=&\frac{1}{N}\delta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{v}t)\delta(\boldsymbol{p}_1-m\boldsymbol{v})\delta(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{20})\delta(\boldsymbol{p}_2)\cdots\delta(\boldsymbol{x}_N-\boldsymbol{x}_{N0})\delta(\boldsymbol{p}_N)\\&+\frac{1}{N}\delta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_{20})\delta(\boldsymbol{p}_1)\delta(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{v}t)\delta(\boldsymbol{p}_2-m\boldsymbol{v})\cdots\delta(\boldsymbol{x}_N-\boldsymbol{x}_{N0})\delta(\boldsymbol{p}_N)\\&+...\\&+\frac{1}{N}\delta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_{N0})\delta(\boldsymbol{p}_1)\delta(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{20})\delta(\boldsymbol{p}_2)\cdots\delta(\boldsymbol{x}_N-\boldsymbol{v}t)\delta(\boldsymbol{p}_N-m\boldsymbol{v})\end{aligned} \quad (6.9.34)$$

(b) A partir de esta densidad ρ_N obtenemos ρ_1 por integración sobre las variables canónicas $\xi_2,..,\xi_N$, con el resultado

$$\begin{aligned}\rho_1(\xi_1,t)&=N\cdot\int\rho_N(\xi_1,..,\xi_N,t)d\xi_2\cdots d\xi_N\\&=\delta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{v}t)\delta(\boldsymbol{p}_1-m\boldsymbol{v})+\delta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_{20})\delta(\boldsymbol{p}_1)+..+\delta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_{N0})\delta(\boldsymbol{p}_1)\end{aligned} \quad (6.9.35)$$

que no más que la afirmación de que la partícula individual puede ser cualquiera de las N partículas idénticas, cada una con su posición y velocidad.

(c) Utilizando la definición del enunciado, la densidad de número del gas estará dada por la expresión, dependiente de la coordenada $\boldsymbol{x}$, y del tiempo

$$n\left(\boldsymbol{x},t\right)=\int\rho_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)d\boldsymbol{p}=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t)+\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{20})+..+\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{N0}) \quad (6.9.36)$$

que de nuevo expresa que la partícula individual puede estar localizada en estas N posiciones distintas. Integrando entonces en todo el espacio $\boldsymbol{x}$ accesible, obtenemos la normalización

$$\int n\left(\boldsymbol{x},t\right)d\boldsymbol{x}=1+1+..+1=N \quad (6.9.37)$$

que corresponde efectivamente al número total de partículas del sistema. Esta normalización difiere de la normalización para 1 partícula indicada en la nota del enunciado. La diferencia reside en que para un sistema de N partículas idénticas no podemos asociar una probabilidad individual a una partícula, ya que para ello tendríamos que identificarla del resto para saber si está o no localizada en la región de interés, pero esta identificación no es posible al ser las partículas idénticas.

6.9.3. Teorema H para la ecuación de Boltzmann

Considere una ecuación de campo medio para la densidad $\rho_N \equiv f$ en la forma (ecuación de Boltzmann)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\boldsymbol{K}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \mathcal{J}(f) \tag{6.9.38}$$

siendo $\boldsymbol{v}$ la velocidad de la partícula, $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ su momento, $\boldsymbol{K}$ la fuerza externa conocida generada por el campo medio, y $\mathcal{J}$ un funcional conocido de la densidad f que mide el efecto de la interacción de la partícula con sus partículas vecinas, en forma de colisiones binarias.

(a) Demuestre que para este sistema la función $\mathcal{H}$ satisface

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int \mathcal{I}\,(1 + \ln f)\, d\boldsymbol{x} \tag{6.9.39}$$

siendo $\mathcal{I}$ un cierto funcional de la cantidad $1 + \ln f$, que deberá definir expresamente.

(b) Considere, sin entrar en detalle, que el funcional $\mathcal{I}$ depende de la integración en el espacio de momentos $\boldsymbol{p}$ de la combinación

$$\left(f_a f_b - f'_a f'_b\right) \ln\left(\frac{f'_a f'_b}{f_a f_b}\right) \tag{6.9.40}$$

siendo a y b las partículas individuales que sufren la interacción en forma de colisión binaria, y siendo los valores sin prima y con prima, sus densidades correspondientes de $1-$partícula antes de la colisión y después de la colisión. Utilice criterios generales para demostrar que, en este caso, independientemente de la expresión explícita de cada densidad f, se satisface

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} \leq 0 \tag{6.9.41}$$

(c) Demuestre que el caso $\frac{d\mathcal{H}}{dt} < 0$ corresponde a la irreversibilidad de la dinámica de la partícula, analizando la inversión temporal que satisface la ecuación de Boltzmann.

(d) Considere que el sistema avanza de forma irreversible hasta una configuración de equilibrio. Determine en este caso qué relación satisface la densidad f, y determine su solución en el caso de colisiones binarias elásticas, que conservan la energía cinética de las partículas.

(a) El resultado es directo ya que tenemos, por un lado

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} \tag{6.9.42}$$

siendo

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v} \quad , \quad \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{K}}{m} \tag{6.9.43}$$

junto a

$$\mathcal{H} = \int f \ln f \; d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{p} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int \frac{d}{dt}\left(f \ln f\right) \; d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{p} \tag{6.9.44}$$

Realizando las derivaciones obtenemos simultáneamente para $d(f \ln f)/dt$

$$\frac{\partial}{\partial t}(f \ln f) = (1 + \ln f)\,\frac{\partial f}{\partial t} \;;\; \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(f \ln f) = (1 + \ln f)\,\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} \;;\; \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}(f \ln f) = (1 + \ln f)\,\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} \tag{6.9.45}$$

que nos lleva directamente al resultado pedido, al ser

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \int (1+\ln f)\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}+\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\right)\,d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{p}\\ &= \int (1+\ln f)\,\frac{df}{dt}\,d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{p} = \int (1+\ln f)\,\mathcal{J}(f)\,d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{p} \equiv \int \mathcal{I}\,(1+\ln f)\,d\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{6.9.46}$$

donde hemos definido el funcional

$$\mathcal{I}\,(1+\ln f) \equiv \int (1+\ln f)\,\mathcal{J}(f) d\boldsymbol{p} \tag{6.9.47}$$

(b) Según indica el enunciado tenemos en este caso el teorema H en la forma

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int \mathcal{A}\cdot\left(f_a f_b - f'_a f'_b\right)\ln\left(\frac{f'_a f'_b}{f_a f_b}\right) d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{p} \tag{6.9.48}$$

siendo $\mathcal{A}$ un factor que depende de las características físicas del proceso de colisión (pe, parámetro de impacto, velocidad relativa,..), pero que es independiente de las densidades de las partículas en colisión. Podemos considerar que este factor $\mathcal{A}$ es estricamente positivo, por su carácter fundamentalmente geométrico, de forma que el signo de la derivada de $\mathcal{H}$ será el signo que tenga la dependencia del integrando en las densidades f, con $f > 0$ por definición. Renombrando esta expresión en la forma

$$\left(f_a f_b - f'_a f'_b\right)\ln\left(\frac{f'_a f'_b}{f_a f_b}\right) \equiv (X-Y)\ln\frac{Y}{X} \tag{6.9.49}$$

vamos a comprobar que para $X > 0$ e $Y > 0$ la función

$$g(X,Y) \equiv (X-Y)\ln\frac{Y}{X} \tag{6.9.50}$$

no es positiva. Para ello, con la redefinición $Y \equiv \alpha X$, siendo necesariamente $\alpha > 0$, tenemos

$$g(X,Y) = X\,(1-\alpha)\ln\alpha \tag{6.9.51}$$

Para $\alpha < 1$ el primer factor en α es positivo, y el segundo negativo. Para $\alpha > 1$ el primer factor es negativo y el segundo positivo. En ambos casos el resultado neto es un valor negativo. Y para $\alpha = 1$ tenemos el valor cero. Por tanto, comprobamos que se satisface

$$g(X,Y) \le 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\mathcal{H}}{dt} \le 0 \tag{6.9.52}$$

(c) Si invertimos el sentido del tiempo, la coordenada de la partícula no cambia de signo, su velocidad sí cambia de signo, y la fuerza (al ser proporcional a la derivada segunda respecto al tiempo) no cambia de signo. En definitiva, en la ecuación de Boltzmann su lado izquierdo tiene un cambio de signo en conjunto, mientras que el lado derecho depende de las características propias de las colisiones binarias. Y entre éstas, sabemos que las colisiones sí son reversibles en el tiempo, por lo que el lado derecho de la ecuación de Boltzmann no cambiará de signo en la inversión temporal. Podemos entender entonces que la fuente de la irreversibilidad de la dinámica de la partícula reside en esta disimilitud entre la dinámica de una partícula en el lado izquierdo y la contribución de procesos de dos partículas en el lado derecho.

(d) El estado de equilibrio dinámico corresponde al valor mínimo de la función $\mathcal{H}$, esto es, la densidad de la partícula alcanza el valor de equilibrio cuando

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \tag{6.9.53}$$

que corresponde a la solución indicada anteriormente, $\alpha = 1$, para la función f. Con esto, para el proceso de colisión tendremos

$$f_a f_b \equiv f'_a f'_b \tag{6.9.54}$$

Teniendo en cuenta además que en una colisión elástica se conserva la energía cinética, de forma que se satisface

$$T_a + T_b = T'_a + T'_b \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_a^2 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_b^2 = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_a'^2 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_b'^2 \tag{6.9.55}$$

podemos escribir la primera expresión en su forma logaritmica

$$\ln f_a + \ln f_b = \ln f'_a + \ln f'_b \tag{6.9.56}$$

y comparando ambas expresiones podemos llegar a establecer la dependencia funcional de la densidad en el estado de equilibrio

$$\ln f_{eq} = \text{cte}\ \boldsymbol{v}^2 \quad \Longrightarrow \quad f_{eq} = e^{\text{cte}\ \boldsymbol{v}^2} \tag{6.9.57}$$

que resulta ser la conocida función de distribución de Maxwell para las velocidades.

6.9.4. Densidad de estados para un plasma eléctricamente neutro

Considere un plasma neutro eléctricamente (esto es, con carga eléctrica total $Q = 0$) formado por un conjunto de iones de carga individual $+e$ y un conjunto de electrones de carga individual $-e$, siendo $e > 0$. La dinámica del sistema en la teoría del campo medio está gobernada por las ecuaciones de Vlasov para cada tipo de partícula

$$\begin{aligned} \frac{d\rho^+}{dt} + \frac{e}{m_+}\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\rho^+}{\partial\boldsymbol{v}} &= 0 \\ \frac{d\rho^-}{dt} - \frac{e}{m_-}\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\rho^-}{\partial\boldsymbol{v}} &= 0 \end{aligned} \tag{6.9.58}$$

siendo ρ^+ y ρ^- las densidad de la partícula para el ión y el electrón respectivamente, estando sus valores en el estado de equilibrio dados por ρ^+_{eq} y ρ^-_{eq}, respectivamente.

(a) Identique los distintos términos en la ecuación de Vlasov.

(b) La solución de la ecuación de Vlasov para las densidades de la partícula debe ser autoconsistente, en particular el campo eléctrico externo debe estar generado por la propia distribución de las partículas. Utilice la ley de Gauss del campo eléctrico en forma diferencial y establezca la condición de consistencia que deben satisfacer las densidades.

(c) Particularice esta condición de consistencia para las densidades en el estado de equilibrio, $\rho^\pm_{eq}$, cuya ecuación de campo deberá determinar expresamente. Y como conclusión de este apartado, analice, en relación a los resultados obtenidos, la configuración del plasma en el estado del equilibrio.

(d) Considere ahora que se produce una pequeña perturbación en el sistema por la entrada de un electrón adicional que se desplaza con una velocidad $\boldsymbol{v}_0$ constante. Determine en este caso cuales son las nuevas ecuaciones del campo medio y la nueva condición de consistencia. Para simplificar el análisis considere que los iones, por ser más pesados, mantienen sus posiciones de equilibrio tras la entrada del electrón adicional.

(a) Por un lado tenemos la derivada temporal de la densidad de una partícula libre, descrita en la forma genérica

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{x}} \tag{6.9.59}$$

y por otro la contribución al movimiento de la partícula de la fuerza *externa* $\boldsymbol{F}$ ejercida por las partículas restantes del sistema

$$\frac{\boldsymbol{F}}{m} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{v}} \tag{6.9.60}$$

En este caso, ya que la partícula (ión ó electrón) tiene carga la fuerza externa sobre la partícula es debida al campo eléctrico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ medio generado por las partículas restantes

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{6.9.61}$$

en función de la carga y la masa de la partícula en cuestión, $q = \pm e$ y $m = m_{\pm}$.

(b) La ley de Gauss en forma diferencial establece que

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\boldsymbol{x}, t) \tag{6.9.62}$$

siendo ρ la densidad de carga neta por unidad de volumen. Dado que $\rho^{\pm}$ son las densidades de la partícula en el espacio de fases, si las integramos sobre todo valor del momento $\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{v}$, obtendremos las densidades de la partícula en el espacio $\boldsymbol{x}$. Finalmente la densidad de carga será el producto de la carga eléctrica por su densidad espacial. Con ello, obtenemos la expresión de la ley de Gauss para el sistema en la forma

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{e}{\epsilon_0} \left(m_+ \int \rho^+ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)\, d\boldsymbol{v} - m_- \int \rho^- (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)\, d\boldsymbol{v} \right) \tag{6.9.63}$$

y dado que el campo eléctrico está generado por la propia distribución de las partículas del plasma, esta relación constituye una condición de consistencia para las densidades $\rho^{\pm}$.

(c) En el equilibrio las densidades son independientes del tiempo, y además dado que la solución debe ser autoconsistente, el campo eléctrico externo $\boldsymbol{E}$ debe ser idénticamente nulo. Ambos requisitos dan lugar a las ecuaciones para el equilibrio

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \rho^+_{eq}}{\partial \boldsymbol{x}} &= 0 \\ \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \rho^-_{eq}}{\partial \boldsymbol{x}} &= 0 \end{aligned} \tag{6.9.64}$$

junto a la condición de consistencia

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \quad \Longrightarrow \quad m_+ \int \rho^+_{eq} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} = m_- \int \rho^-_{eq} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} \tag{6.9.65}$$

cuya solución es la distribución homogénea espacial de iones y electrones, independiente de la posición $\boldsymbol{x}$, que de lugar a una densidad de carga local idénticamente nula.

(d) Como indica el enunciado, con la entrada en el plasma del electrón adicional, las nuevas densidades de las partículas satisfacen

$$\rho^+ \equiv \rho^+_{eq} \quad , \quad \rho^- \neq \rho^-_{eq} \tag{6.9.66}$$

Y al ser la perturbación generada en el plasma pequeña por definición, podemos considerar que la nueva densidad para el electrón tendrá la expresión aproximada

$$\rho^- = \rho^-_{eq} + f \quad , \quad |f| \ll \rho^-_{eq} \tag{6.9.67}$$

que dará lugar también a un campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ pequeño. Respecto a la nueva configuración, la ecuación de Vlasov para los iones se satisface idénticamente al ser $\rho^+ = \rho^+_{eq}$, mientras que la ecuación de Vlasov para la variación f de densidad del electrón tiene la expresión, en este límite

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{e\boldsymbol{E}}{m_-} \cdot \frac{\partial \rho^-_{eq}}{\partial \boldsymbol{v}} = 0 \tag{6.9.68}$$

y la condición de consistencia se escribe, también en este límite,

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{em_-}{\epsilon_0}\int f\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t\right) d\boldsymbol{v} + \frac{\rho_e\left(\boldsymbol{x},t\right)}{\epsilon_0} \tag{6.9.69}$$

donde hemos añadido en la ley de Gauss la contribución de carga del electrón adicional, con densidad espacial ρ_e y carga $-e$. Dado que este electrón sigue una trayectoria predefinida con velocidad $\boldsymbol{v}_0$ constante, y de acuerdo con la nota aclaratoria del enunciado del ejercicio 6.9.2, esta densidad de carga espacial adicional estará dada por

$$\rho_e\left(\boldsymbol{x},t\right) = -e\delta\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}_0 t\right) \tag{6.9.70}$$

6.9.5. Hamiltoniano de dos cuerpos y su aproximación de campo medio

Considere el Hamiltoniano de un sistema de N partículas idénticas

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} + \sum_{i<j} V\left(|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|\right) \tag{6.9.71}$$

siendo V el potencial de interacción entre las partículas, que se reduce a una interacción binaria de tipo central con la magnitud

$$|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j| \equiv r \quad , \quad V(r) = \begin{cases} -V_0 & , \quad r<a \\ \\ 0 & , \quad r\geq a \end{cases} \tag{6.9.72}$$

siendo V_0 una constante positiva y a la distancia máxima de interacción.

(a) Teniendo en cuenta el resultado general del ejercicio 6.9.1, construya la densidad de la partícula en el equilibrio en la aproximación de campo medio para este Hamiltoniano de N partículas.

(b) Determine la densidad de número $n(\boldsymbol{x})$ para la partícula, y su normalización, demostrando que no depende explícitamente del tiempo.

(c) Determine el potencial medio de interacción $W(\boldsymbol{x})$ y obtenga su expresión en forma integral para una densidad con simetría esférica.

(a) Dado que el Hamiltoniano $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ satisface las condiciones dadas en el ejercicio 6.9.1, la densidad de la partícula tiene la expresión directa

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = A\exp\left(-BH(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\right) \equiv A\exp(-BT(\boldsymbol{p}))\exp(-BW(\boldsymbol{x})) \tag{6.9.73}$$

siendo H el Hamiltoniano promedio para la partícula, y $W(\boldsymbol{x})$ el denominado potencial promedio de interacción.
(b) Dado que la densidad de la partícula es independiente del tiempo, por estar el sistema en equilibrio, la densidad espacial, ó densidad de número

$$n(\boldsymbol{x}) = \int \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})d\boldsymbol{p} \tag{6.9.74}$$

será también independiente del tiempo, y tendrá la expresión

$$\begin{aligned} n(\boldsymbol{x}) &= \int A\exp(-BT(\boldsymbol{p}))\exp(-BW(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{p} \\ &= A\exp(-BW(\boldsymbol{x}))\int \exp(-BT(\boldsymbol{p}))d\boldsymbol{p} \equiv C\exp(-BW(\boldsymbol{x})) \end{aligned} \tag{6.9.75}$$

siendo C una constante. Y de aquí podemos obtener el factor de normalización para el sistema de N partículas idénticas, en la forma

$$\int n(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = N \quad \Longrightarrow \quad C = N\left(\int \exp(-BW(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}\right)^{-1} \tag{6.9.76}$$

(c) Dado que la solución debe ser autoconsistente, el potencial promedio $W(\boldsymbol{x})$ debe estar dado por el promedio espacial del potencial de interacción entre las partículas. En particular, se debe satisfacer la condición de consistencia

$$W(\boldsymbol{x}) = \int n(\boldsymbol{y})V\left(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\right)d\boldsymbol{y} \tag{6.9.77}$$

esto es, $W(\boldsymbol{x})$ será la interacción sobre la partícula localizada en el punto $\boldsymbol{x}$ y generada por la presencia de la partícula en el punto vecino $\boldsymbol{y}$, con densidad $n(\boldsymbol{y})$, integrando el resultado sobre todas las posiciones posibles $\boldsymbol{y}$. En el caso de una solución con simetría esférica, $n(\boldsymbol{y}) = n(y)$, tenemos la expresión reducida

$$W(x) = 4\pi\int_0^\infty n(y)V\left(x,y\right)y^2dy \tag{6.9.78}$$

teniendo $V\left(x,y\right)$ la expresión analítica

$$V\left(x,y\right) = -V_0\begin{cases} 0 & , \quad |x-y| > a \\ 1 & , \quad x+y < a \\ \frac{1}{xy}\left(a^2-(x-y)^2\right) & , \quad |x-y| < a < x+y \end{cases} \tag{6.9.79}$$

6.9.6. Teorema H y transiciones de fase para la ecuación de Kramers

Considere la ecuación de campo medio de Kramers

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial v} + fv\right) \tag{6.9.80}$$

para un sistema de N partículas idénticas que se mueven sobre una circunferencia de radio fijo, siendo v la velocidad y θ el ángulo de localización sobre la circunferencia, y siendo $f(\theta,v,t)$ la densidad de la partícula y $\Phi(\theta,t)$ el potencial promedio de interacción, y siendo $\alpha > 0$ un parámetro positivo.

(a) Analice la existencia de un teorema H para esta ecuación, en la forma

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} \leq 0 \tag{6.9.81}$$

para el funcional $\mathcal{F}$ del campo, definido por

$$\mathcal{F}(t) \equiv \int\int\left(\left(\frac{1}{2}v^2+\Phi\right)f + \alpha f\ln f\right)d\theta dv \tag{6.9.82}$$

(b) Determine a partir del teorema H la solución f_{eq} en el estado de equilibrio del sistema. Con el resultado obtenido interprete físicamente el significado del parámetro α.

• Considere ahora que tenemos el sistema en el equilibrio y que analizamos el caso particular de un potencial de interacción entre dos partículas del sistema en la forma

$$V(\theta,\theta') = -\cos\left(\theta-\theta'\right) \tag{6.9.83}$$

siendo θ y θ' la localización angular sobre la circunferencia de las dos partículas en interacción. Defina el vector de *polarización* $\boldsymbol{P}$ de la partícula en la forma

$$\boldsymbol{P} \equiv (P_x, P_y) \equiv \left(\int \rho(\theta)\cos\theta d\theta, \int \rho(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta\right) \tag{6.9.84}$$

en términos de $\rho(\theta)$, la densidad de la partícula en el espacio θ definida por

$$\rho(\theta) \equiv \int f(\theta, v)dv \tag{6.9.85}$$

(c) Demuestre que el potencial promedio de la partícula tiene la expresión en este caso

$$\Phi(\theta) = -\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} \tag{6.9.86}$$

siendo $\boldsymbol{n}$ el vector unitario perpendicular a la circunferencia. Demuestre además que, con la condición de consistencia, podemos deducir que existe una relación funcional de la polarización de la partícula con el parámetro α.

(d) Finalmente, utilizando la expresión que define la función I_0 de Bessel

$$I_0(Q) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{n}\right) d\theta \tag{6.9.87}$$

siendo $Q \equiv |\boldsymbol{Q}|$, y la expresión de su derivada

$$I_1(Q) \equiv \frac{dI_0}{dQ} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\boldsymbol{Q}}{Q}\cdot\boldsymbol{n}\right) \exp\left(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{n}\right) d\theta \tag{6.9.88}$$

determine la condición de consistencia para el vector de polarización

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\alpha) \tag{6.9.89}$$

en términos de las funciones I_0 e I_1. Con el análisis gráfico de la condición resultante demuestre que se produce en el sistema una transisión de fase para $\alpha = 1/2N$, identificando cada una de las fases.

(a) La derivada total respecto al tiempo de $\mathcal{F}$, teniendo en cuenta que el intervalo de integración en el espacio de fases

$$0 \le \theta < 2\pi \quad , \quad -\infty < v < +\infty \tag{6.9.90}$$

es independiente del tiempo, satisface

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \int\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}fv^2 + f\Phi + \alpha f\ln f\right) d\theta dv \tag{6.9.91}$$

que podemos desarrollar en la forma

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \int\int f\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2+\Phi\right) d\theta dv + \int\int \left(\frac{1}{2}v^2+\Phi+\alpha\left(1+\ln f\right)\right)\frac{df}{dt}d\theta dv \tag{6.9.92}$$

Para el primer término del integrando obtenemos

$$f\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2+\Phi\right) = f\left(v\dot{v} + v\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = fv\left(\dot{v}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) \equiv 0 \tag{6.9.93}$$

dado que se satisface

$$\dot{v} \equiv -\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{d\Phi}{dt} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial t} + v\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \simeq v\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \tag{6.9.94}$$

teniendo en cuenta que para la teoría del campo medio tenemos la condición de consistencia siguiente, (véase la sección 6.8.4) debido a que la acción del potencial externo es instantánea sobre la partícula,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \ll v\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{6.9.95}$$

• Por otro lado, para obtener el resultado del segundo término integral, partimos del desarrollo, una vez aplicada la ecuación de campo,

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{v}\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial v} + fv\right) \tag{6.9.96}$$

y tras una integración por partes en la velocidad obtenemos

$$\int\int \left(\frac{1}{2}v^2 + \Phi + \alpha\left(1 + \ln f\right)\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial v} + fv\right)d\theta dv = \int \left(\frac{1}{2}v^2 + \Phi + \alpha\left(1 + \ln f\right)\right)\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial v} + fv\right)\Big|_{\Omega} d\theta - \int\int \left(v + \alpha\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial v}\right)\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial v} + fv\right)d\theta dv \tag{6.9.97}$$

Aplicando las condiciones frontera habituales para la densidad de la partícula en el espacio de velocidades

$$f \to 0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial v} \to 0 \quad , \quad v \to \pm\infty \tag{6.9.98}$$

que corresponde a un valor estríctamente nulo $f \equiv 0$ en la frontera Ω del espacio de velocidades[1], tenemos el resultado final

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = -\int\int \frac{1}{f}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial v} + fv\right)^2 d\theta dv \tag{6.9.100}$$

Al ser $f > 0$ el integrando no puede ser negativo, de forma que podemos deducir el teorema H para esta ecuación de campo

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} \leq 0 \tag{6.9.101}$$

(b) La densidad de la partícula en el estado de equilibrio es independiente del tiempo siendo específicamente aquella para la cual $\mathcal{F}$ alcanza su valor mínimo, esto es,

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = f_{eq} \tag{6.9.102}$$

y dada la expresión del teorema H, corresponde a la solución de la ecuación diferencial

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial v} + fv = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = C\left(\theta\right)\exp\left(-\frac{v^2}{2\alpha}\right) \tag{6.9.103}$$

siendo $C(\theta)$ una función que dependerá del potencial promedio $\Phi(\theta)$. Para obtener su expresión explícita, aplicamos la ecuación de campo a la solución del equilibrio, con el resultado para la variable θ

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{f}{\alpha}\frac{d\Phi}{d\theta} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dC}{d\theta} + \frac{C}{\alpha}\frac{d\Phi}{d\theta} = 0 \quad \Longrightarrow \quad C(\theta) = \text{cte}\cdot\exp\left(-\frac{\Phi}{\alpha}\right) \tag{6.9.104}$$

[1] Esta condición frontera es necesaria para que la densidad de la partícula tenga una normalización finita, en particular,

$$\int\int f d\theta dv = N \tag{6.9.99}$$

y obtenemos por tanto la densidad de la partícula en el equilibrio en la forma completa

$$f\left(\theta, v\right) = \text{cte} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{v^2}{2} + \Phi(\theta)\right)\right) \tag{6.9.105}$$

que corresponde a la distribución canónica en el equilibrio a la *temperatura* α. Vemos por tanto que el parámetro α determina la energía *térmica* presente en el sistema. A mayor valor de α mayor agitación térmica de la partícula, y la densidad f mostrará valores no nulos en un rango mayor de velocidades altas, en valor absoluto. A menor α la densidad estará más concentrada en los valores de la velocidad más cercanos a 0.

(c) Definido el potencial de interacción entre dos partículas, el potencial promedio está definido por la condición de consistencia (véase la sección 6.8.4)

$$\Phi(\theta) = \int \rho(\theta')V(\theta, \theta')d\theta' \tag{6.9.106}$$

Teniendo en cuenta que el potencial V admite el desarrollo

$$V(\theta, \theta') \equiv -\cos\left(\theta - \theta'\right) = -\cos\theta\cos\theta' - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta' \tag{6.9.107}$$

y teniendo en cuenta la definición del vector de polarización

$$P_x = \int \rho(\theta')\cos\theta' d\theta' \quad , \quad P_y = \int \rho(\theta')\operatorname{sen}\theta' d\theta' \tag{6.9.108}$$

encontramos la expresión

$$\Phi(\theta) = -P_x\cos\theta - P_y\operatorname{sen}\theta \tag{6.9.109}$$

Dado que el vector $\boldsymbol{n}$ normal a la circunferencia tiene las componentes en el plano xy

$$\boldsymbol{n} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \tag{6.9.110}$$

el potencial promedio admite la expresión escalar

$$\Phi(\theta) = -\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} \tag{6.9.111}$$

y de esta forma la densidad normalizada de la partícula en el espacio θ admite la expresión

$$\rho(\theta) = N\frac{\exp\left(\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\right)}{\int_0^{2\pi}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\right)d\theta} \equiv \rho\left(\boldsymbol{P}, \theta, \alpha\right) \tag{6.9.112}$$

• Teniendo en cuenta que la condición de consistencia para el vector de polarización (en notación vectorial)

$$\boldsymbol{P} \equiv \int \rho(\theta)\boldsymbol{n}d\theta \tag{6.9.113}$$

tiene en este caso la forma

$$\boldsymbol{P} = \int \rho\left(\boldsymbol{P}, \theta, \alpha\right)\boldsymbol{n}d\theta \tag{6.9.114}$$

comprobamos que esta condición define de forma implícita la relación funcional

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\left(\alpha\right) \tag{6.9.115}$$

entre la polarización que sufre la partícula y el parámetro de activación térmica del sistema presente en el equilibrio.

(d) La condición de consistencia para el vector de polarización $\boldsymbol{P}$, obtenida en el apartado anterior, tiene la expresión desarrollada

$$\boldsymbol{P}\int_0^{2\pi}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\right)d\theta = \int N\exp\left(\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}d\theta \tag{6.9.116}$$

Multiplicando ambos lados por $\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{P}$, y utilizando las definiciones de las funciones de Bessel obtenemos la condición de consistencia en la forma

$$2\pi\frac{1}{\alpha}P^2 I_0\left(\frac{P}{\alpha}\right) = 2\pi N\frac{P}{\alpha}I_1\left(\frac{P}{\alpha}\right) \tag{6.9.117}$$

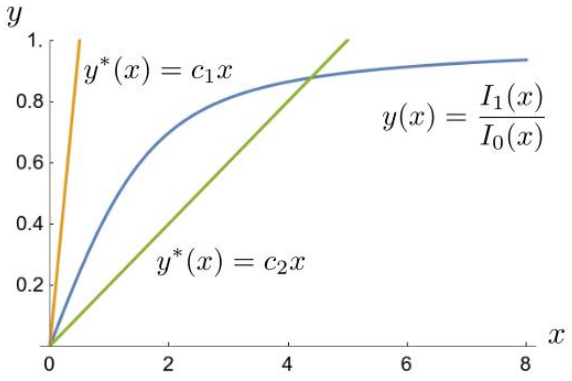
ó

$$\frac{P}{N}I_0\left(\frac{P}{\alpha}\right) = I_1\left(\frac{P}{\alpha}\right) \tag{6.9.118}$$

La relación funcional entre la polarización del sistema P y el parámetro de activación α, $P = P(\alpha)$, será la solución a esta ecuación, que pasamos a analizar gráficamente. Para ello, redefinimos la variable independiente obteniendo

$$x \equiv \frac{P}{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\alpha}{N}x = \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \tag{6.9.119}$$

Gráficamente la solución a esta condición de consistencia será el punto de corte x entre la recta del lado izquierdo, que pasa por el origen, y el cociente de las funciones de Bessel del lado derecho. Teniendo en cuenta la representación gráfica de la figura,



vemos que para el valor c_1 de la pendiente de la recta que pasa por el origen, sólo existe un punto de corte $x = 0$, mientras que para el valor c_2 existe un segundo punto de corte en un valor $x > 0$, digamos $x = X$. Y la diferencia entre el valor c_1 y el valor c_2 reside en que c_1 es mayor que la pendiente de la curva $\frac{I_1(x)}{I_0(x)}$ en $x = 0$, y c_2 menor respectivamente. Dado que esta pendiente tiene el valor

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{I_1(x)}{I_0(x)}\right)_{x=0} = \frac{1}{2} \tag{6.9.120}$$

concluimos que para el parámetro de activación α tal que

$$c \equiv \frac{\alpha}{N} > \frac{1}{2} \tag{6.9.121}$$

la polarización (el único punto de corte) tiene el valor

$$P = \alpha x = 0 \tag{6.9.122}$$

mientras que si α satisface

$$c \equiv \frac{\alpha}{N} < \frac{1}{2} \tag{6.9.123}$$

la polarización (el punto de corte) tiene dos valores posibles, uno nulo y otro mayor que cero

$$P = \alpha x = 0 \quad , \quad P = \alpha X > 0 \tag{6.9.124}$$

Sin entrar en el detalle de la demostración, en este caso el valor $P = 0$ corresponde a un estado de equilibrio inestable (estado *metaestable*), mientras que el valor $P > 0$ corresponde al estado de equilibrio estable. Concluimos por tanto que:

- Para $\alpha > 1/2N$ el sistema presenta una polarización nula, que corresponde a una fase completamente aleatoria. La energía *térmica*, proporcional a α, es suficientemente alta como para distribuir aleatoriamente las partículas a lo largo de toda la circunferencia, independientemente de su interacción mutua, lo que da en promedio un valor nulo en la orientación angular ó polarización: las partículas no están localizadas angularmente en ninguna disposición preferente.

- Para $\alpha < 1/2N$ el sistema presenta una polarización mayor que cero, que corresponde a una fase ordenada. La energía *térmica*, proporcional a α, no es lo suficientemente alta como para distribuir aleatoriamente las partículas. Las partículas quedan ligadas por su interacción a lo largo de toda la circunferencia, lo que da en promedio un valor no nulo en la orientación angular ó polarización: las partículas están localizadas angularmente preferentemente hacia el valor mínimo del potencial promedio. Dado que el potencial, según 6.9.111, resulta ser $-\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} \equiv -P\cos\varphi$, las partículas tenderán a distribuirse con $P \neq 0$ y con un valor del ángulo de orientación promedio φ tal que $\cos\varphi$ sea el mayor posible, siempre considerando la energía de activación disponible. En particular, en el caso límite $\alpha \to 0$ el punto de corte se alcanza en $x \to \infty$ y la polarización alcanza su valor máximo

$$P = N \lim_{x\to\infty} \frac{I_1(x)}{I_0(x)} = N \cdot 1 = N \tag{6.9.125}$$

  lo que indica que en el equilibrio, para $\alpha \to 0$, las N partículas tienden a concentrarse, al no tener energía térmica disponible, en la misma localización angular, digamos θ_0, arbitraria por lo demás, por efecto de la interacción mutua de carácter atractivo:

$$\begin{aligned} &\rho(\theta) = N\delta(\theta-\theta_0) \\ &\boldsymbol{P} \equiv \left(\int \rho(\theta)\cos\theta d\theta, \int \rho(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta\right) = N\,(\cos\theta_0, \mathrm{sen}\,\theta_0) \\ &P \equiv |\boldsymbol{P}| = N \end{aligned} \tag{6.9.126}$$

- Y como conclusión final, podemos identificar el valor $\alpha = 1/2$ como el valor del parámetro de activación para la transición de fase del sistema de una fase aleatoria a una fase ordenada, y viceversa.

6.10. Autoevaluación

Ejercicios

6.10.1. Partículas en movimiento vertical en campo gravitatorio (R)

Un grupo de partículas, todas de la misma masa m, se mueven en presencia el campo gravitatorio terrestre (supuesto constante) en dirección vertical, y tienen inicialmente en el tiempo $t = 0$ alturas q_0 y momentos p_0 dados en el espacio de fases por el rectángulo $-a \leq q_0 \leq a$, $-b \leq p_0 \leq b$.

(a) Determine cuál es la región que ocupan las partículas en el espacio de fases en el instante t.

(b) Comprueba que se conserva el área en el espacio de fases de dos formas: utilizando la transformación canónica $(q_0, p_0) \to (q, p)$ y por cálculo directo, a partir de la solución al movimiento.

6.10.2. Dinámica disipativa en el espacio de fases (R)

(a) Determine la trayectoria y la densidad de estados en el espacio de fases de un oscilador amortiguado, cuya fuerza de fricción es $F_r = -2m\lambda\dot{q}$.

(b) Describa el espacio de fases del oscilador amortiguado si utilizáramos el Lagrangiano equivalente

$$L' = \frac{1}{2} m e^{2\lambda t} \left(\dot{q}^2 - \omega_0^2 q^2\right) \tag{6.10.1}$$

6.10.3. Evolución de la densidad de estados en el espacio de fases (R)

Obtenga la ecuación de evolución para la densidad $\rho\left(t, q_1, q_2, p_1, p_2\right)$ en el espacio de fases de dos osciladores idénticos unidimensionales acoplados, con el Hamiltoniano

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} k \left(q_1 - q_2\right)^2 \tag{6.10.2}$$

y encuentre la solución que satisface la condición inicial

$$\rho\left(0, q_1, q_2, p_1, p_2\right) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\beta \left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}\right)\right) \tag{6.10.3}$$

siendo Z un factor de normalización, por determinar.

Cuestionarios en línea

6.10.4. Teorema de Liouville

- Enlace al cuestionario

6.10.5. Teoría del campo medio

- Enlace al cuestionario

6.11. Apendice A. Billares mecánicos

6.11.1. Introducción

Billares mecánicos En los denominados *billares mecánicos*, una partícula puntual de masa m tiene confinado su movimiento al interior de un contorno cerrado de forma arbitraria, por el efecto de la reflexión elástica en cada colisión con las paredes del contorno. Podemos asumir que el sistema es conservativo, de forma que después de cada colisión la partícula describe siempre una trayectoria rectilínea. Aunque aparentemente el sistema es muy simple, la dinámica de la partícula depende fuertemente de la forma del contorno, y el principal interés reside en el análisis de su movimiento de forma cualitativa, y a grandes tiempos.
En ocasiones tendremos un movimiento *totalmente predecible y regular*, en el que un cambio pequeño en las condiciones iniciales produce sólo un cambio pequeño en la trayectoria de la partícula. En otras ocasiones el movimiento será *caótico, no predecible*, e irregular, y cualquier pequeño cambio resulta en una modificación total de la trayectoria, y también podemos observar un comportamiento mezcla de ambos, con regiones de regularidad y regiones de caos dependiendo de las condiciones iniciales.

Ergodicidad En todo caso, el estado de la partícula queda determinado, en cada instante, exclusivamente por su posición y su dirección de movimiento, de forma que la dinámica prácticamente queda reducida a pura geometría. La cuestión dinámica más interesante es saber si la partícula recorrerá todo el volumen accesible, es decir, pasará cerca de cada vecindad interior al contorno, o por ejemplo si viajará en casi todas las direcciones posibles. Son cuestiones que debe responder la denominada *teoría ergódica*, y cuyo interés fundamental reside en desarrollar la transición formal del sistema clásico al sistema cuántico análogo.

Aplicaciones Muchos modelos actuales en Física pueden ser reducidos a, y analizados como, billares mecánicos. Uno de los billares más simples es, por ejemplo, la partícula en el interior de una caja rectangular, que puede ser la idealización de un nucleón confinado en un núcleo. El interés actual en los billares se debe a las posibilidades nuevas de estudiarlos de forma experimental, como en el caso de átomos ultrafrios en una trampa laser, las ondas microondas en cavidades superconductoras, los llamados puntos cuánticos mesoscópicos o los nanodispositivos electrónicos. Como referencia en este último caso, desde el punto de vista de la nanotecnología, se han fabricado estructuras cerradas muy pequeñas, de escala nanoscópica, como los *corrales cuánticos*, que sirven para confinar electrones. La frontera de este nanodispositivo es tan abrupta que el electrón puede considerarse una partícula confinada en un billar bidimensional. El espectro energético del electrón, y de ahí la capacidad electrónica del dispositivo, se podrá determinar en numerosas ocasiones aplicando un simple proceso de cuantización al billar clásico correspondiente.

6.11.2. Billares en 2D

Definición Un *billar* en dos dimensiones es un contorno cerrado $\mathcal{C}$ de paredes impenetrables donde se encuentra confinada una partícula puntual en movimiento. Desde el punto de vista dinámico, el problema que definido por el potencial

$$V = \begin{cases} 0 & \text{en el interior de } \mathcal{C} \\ +\infty & \text{en la frontera de } \mathcal{C} \end{cases} \tag{6.11.1}$$

de forma que entre las sucesivas colisiones elásticas la partícula sigue una trayectoria rectilínea, a potencial cero. Si $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario sobre la frontera de $\mathcal{C}$, la igualdad del ángulo de colisión y el ángulo de reflexión $\theta_i = \theta_r$, hacia y desde la frontera permite determinar la modificación del momento de la partícula, que vale

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} - 2\,(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n} \tag{6.11.2}$$

de forma que sólo cambia de sentido el momento en la dirección de la normal a la frontera

$$p'_n = \boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{n} = -(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{n}) = -p_n \tag{6.11.3}$$

$$p'_t = \boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{t} = (p \cdot \boldsymbol{t}) = p_t \tag{6.11.4}$$

siendo $\boldsymbol{t}$ un vector unitario tangente a la frontera.

6.11.3. Ejemplo. Billar circular

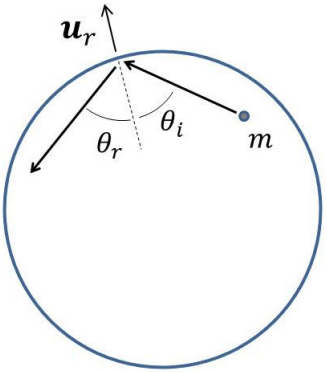
Hamiltoniano Consideremos un billar circular de radio R, generado por el potencial singular de paredes impenetrables

$$V = \begin{cases} 0 & r < R \\ +\infty & r \geq R \end{cases} \tag{6.11.5}$$

En coordenadas polares (r, φ) el Hamiltoniano para el movimiento libre de la partícula entre las sucesivas colisiones es

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) \tag{6.11.6}$$

donde el momento conjugado $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ es constante del movimiento por ser φ una coordenada cíclica.



Condiciones frontera Como en este caso $\boldsymbol{u}_r$ es el vector unitario sobre la frontera, y $\boldsymbol{u}_\varphi$ el vector tangente, la modificación del momento de la partícula tras la colisión con las paredes del billar, se escribe

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} - 2(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{u}_r)\boldsymbol{u}_r \tag{6.11.7}$$

que da lugar a

$$p'_r = -p_r \quad , \quad p'_\varphi = p_\varphi \tag{6.11.8}$$

La última relación muestra de nuevo la constancia del momento conjugado p_φ. El movimiento de la partícula se ve acotado radialmente entre el valor máximo $r = R$ de la frontera, donde se producen las sucesivas colisiones, y un valor mínimo r_0 que depende de su energía.

Conservación de la energía En este valor mínimo se satisface $p_r = 0$, y por tanto, de la conservación de la energía obtenemos

$$E = \frac{1}{2m}\frac{p_\varphi^2}{r_0^2} \rightarrow r_0 = \frac{p_\varphi}{\sqrt{2mE}} \tag{6.11.9}$$

Para hallar el valor de p_φ basta tener en cuenta las condiciones iniciales del movimiento. Por ejemplo, si la partícula inicialmente está en $r = a$, $\varphi = 0$ y es lanzada con una velocidad v_0 formando un ángulo α con el eje x, tenemos en módulo

$$p_\varphi = mr \cdot r\dot{\varphi} = ma \cdot v_\varphi = mav_0 \operatorname{sen}\alpha \tag{6.11.10}$$

en cuyo caso

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 \to r_0 = a \operatorname{sen}\alpha \tag{6.11.11}$$

Solución separable. Variables de acción Debido a la estructura separable del Hamiltoniano, las dos coordenadas de la partícula (r, φ) tienen movimientos periódicos independientes, un movimiento de rotación de 0 a 2π para la variable angular φ, y un movimiento de libración (entre r_0 y R) para la variable radial. Las variables de acción asociadas a estos movimientos periódicos son sencillas de calcular, por la propia conservación de p_φ. Obtenemos

$$I_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = p_\varphi \oint d\varphi = 2\pi p_\varphi \tag{6.11.12}$$

y para la coordenada radial

$$I_r = \oint p_r dr = \oint \pm\sqrt{2mE - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}dr = \frac{p_\varphi}{r_0}\oint \pm\frac{\left(r^2 - r_0^2\right)^{1/2}}{r}dr \tag{6.11.13}$$

En esta integración sobre un ciclo de movimiento radial debemos tener en cuenta el signo correcto para el momento radial p_r, aunque no se ha hecho explícito en la definición anterior. Dado que un periodo de libración en r corresponde a la secuencia $r_0 \to R \to r_0$, deducimos

$$I_r = \frac{p_\varphi}{r_0}\int_{r_0}^{R}\frac{\left(r^2 - r_0^2\right)^{1/2}}{r}dr - \frac{p_\varphi}{r_0}\int_{R}^{r_0}\frac{\left(r^2 - r_0^2\right)^{1/2}}{r}dr = 2\frac{p_\varphi}{r_0}\int_{r_0}^{R}\frac{\left(r^2 - r_0^2\right)^{1/2}}{r}dr \tag{6.11.14}$$

Ambas variables de acción son función de la energía, y con ello podríamos expresar el valor del Hamiltoniano en función de I_r, I_φ, para determinar posteriormente la frecuencia de los movimientos permitidos en el pozo de potencial circular. Deducimos lo siguiente

$$p_\varphi = \frac{I_\varphi}{2\pi} \tag{6.11.15}$$

y con ayuda de $\int \frac{\sqrt{x^2-A^2}}{x}dx = \sqrt{x^2 - A^2} + A \operatorname{arc\,sen}\frac{A}{x}$, obtenemos

$$I_r = \frac{I_\varphi}{\pi}\left(\left(\frac{R^2}{r_0^2} - 1\right)^{1/2} + \operatorname{arc\,sen}\frac{r_0}{R} - \frac{\pi}{2}\right) \tag{6.11.16}$$

ó en función de la energía,

$$I_r = \frac{I_\varphi}{\pi}\left(\left(\frac{8\pi^2 mER^2}{I_\varphi^2} - 1\right)^{1/2} + \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{I_\varphi}{2\pi\sqrt{2m\bar{E}}R}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \tag{6.11.17}$$

expresión que implícitamente nos daría la relación pedida $E = E\left(I_r, I_\varphi\right)$.

Frecuencias del movimiento Derivando esta ecuación respecto a las variables acción de forma implícita, podemos obtener las frecuencias de los movimientos periódicos que vienen dadas por, para el movimiento radial

$$\nu_r = \frac{\partial E}{\partial I_r} = \frac{p_\varphi}{2mr_0^2}\left(\frac{R^2}{r_0^2} - 1\right)^{-1/2} \tag{6.11.18}$$

y para el movimiento angular,

$$\nu_\varphi = \frac{\partial E}{\partial I_\varphi} = 2\frac{E}{I_\varphi}\left[1 - \pi\frac{I_r}{I_\varphi}\left(\frac{R^2}{r_0^2} - 1\right)^{-1/2}\right] \tag{6.11.19}$$

Trayectoria de la partícula. Número de ciclos Cada trayectoria periódica de la partícula en el espacio (r, φ) se produce por la combinación de estos dos movimientos periódicos independientes, y se caracteriza por el *número relativo de ciclos*, definido por el cociente

$$\Gamma \equiv \frac{\nu_\varphi}{\nu_r} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{R^2}{r_0^2} - 1\right)^{1/2} - \frac{I_r}{I_\varphi} \tag{6.11.20}$$

que se reduce con el uso de la expresión de las variables de acción, a

$$\Gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,sen}\frac{r_0}{R} \tag{6.11.21}$$

Este número determina el factor de más (ó de menos) en el número de ciclos que se recorren en la coordenada angular respecto a la coordenada radial en cada periodo de revolución de la partícula en el espacio (r, φ).

Ángulo de incidencia Para el potencial circular que estamos analizando, existe una relación sencilla entre el número Γ y el ángulo de incidencia sobre la frontera, que renombramos en la forma $\theta_i \equiv \chi$, y está dado por la relación de conservación del momento angular en notación vectorial

$$p_\varphi \boldsymbol{u}_z = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{6.11.22}$$

En el momento de cada colisión, $\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{u}_r$, $\boldsymbol{p} = p\,(\cos\chi \boldsymbol{u}_r + \operatorname{sen}\chi \boldsymbol{u}_\varphi)$, por lo que

$$p_\varphi \boldsymbol{u}_z = R\boldsymbol{u}_r \times p\operatorname{sen}\chi \boldsymbol{u}_\varphi = pR\operatorname{sen}\chi \boldsymbol{u}_z \tag{6.11.23}$$

ó

$$\operatorname{sen}\chi = \frac{p_\varphi}{pR} = \frac{p_\varphi}{\sqrt{2mER}} = \frac{r_0}{R} \tag{6.11.24}$$

Utilizando este ángulo de incidencia, el número de ciclos está dado directamente por

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi}(\pi - 2\chi) \tag{6.11.25}$$

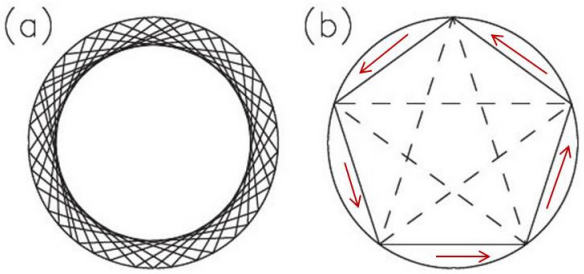
Conclusiones. Tipos de movimientos La conclusión más destacada es que Γ no depende de E: la energía no tiene efecto en la configuración geométrica de las trayectorias de la partícula, sólo influye en la velocidad con la que las describe. Ésta es una peculiaridad esencial de los potenciales de paredes impenetrables.

Dado que el ángulo respecto a la normal está acotado por los valores $-\pi/2 \leq \chi \leq \pi/2$, ó $0 \leq \pi - 2\chi \leq 2\pi$, tenemos que $0 \leq \Gamma \leq 1$. Por lo tanto, esto significa que $\nu_\varphi < \nu_r$ ó en función de sus periodos, $T_\varphi > T_r$, esto es, el periodo de la rotación es mayor que el periodo de la libración, la partícula tarda menos tiempo en oscilar radialmente que en realizar una rotación completa.
Y en función de Γ, tenemos dos tipos de trayectorias:

- Cuando Γ es un número racional, p.e. de la forma $\Gamma = p/q$, con p, q enteros y $p < q$, la trayectoria se cierra (esto es, vuelve al punto inicial) después de q reflexiones en la frontera, o lo que es lo mismo, después de q periodos en el movimiento de libración radial (Figura b). En estos casos de Γ racional, otro hecho característico es que dado Γ, la trayectoria para el valor $\Gamma' \equiv 1 - \Gamma$, satisface

$$\Gamma' = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\chi}{\pi}\right) = \frac{1}{2} - \frac{(-\chi)}{\pi} \tag{6.11.26}$$

  y corresponde al ángulo de reflexión $-\chi$, que sucede para la misma trayectoria al ser recorrida en el sentido inverso. Por tanto, Γ y $\Gamma' = 1 - \Gamma$, son versiones inversas en el tiempo de la misma trayectoria.



– Cuando Γ es irracional, lo que sucede en la mayoría de los casos, la trayectoria no es cerrada. El círculo $r = r_0$ se transforma en la caústica de todas las trayectorias: todas ellas son tangentes a este círculo tras la reflexión en la frontera. (Figura a)

6.11.4. Billar circular con radio variable

Invariancia adiabática Consideramos ahora el caso de un billar circular cuyo radio R varía en el tiempo de manera suficientemente lenta, y estudiamos el efecto de esta variación sobre la distribución de las órbitas de la partícula. Dado que la variable de acción I_r tiene la forma funcional

$$I_r = f\left(\frac{ER^2}{I_\varphi^2}\right) \tag{6.11.27}$$

y es un invariante adiabático junto con I_φ, deducimos que

$$ER^2 = \text{cte} \tag{6.11.28}$$

se mantiene constante durante el movimiento. Por tanto, la energía del sistema es inversamente proporcional al radio al cuadrado.

Conclusiones. Movimiento de la partícula El movimiento de la partícula se ve de nuevo acotado radialmente entre el valor máximo $r = R$ de la frontera, donde se producen las sucesivas colisiones, y un valor mínimo r_0 que depende de su energía. En este valor mínimo se satisface $p_r = 0$, y por tanto, de la conservación de la energía, y de la expresión anterior obtenemos

$$E = \frac{1}{2m}\frac{p_\varphi^2}{r_0^2} \to r_0 = \frac{p_\varphi}{\sqrt{2mE}} = \text{cte} \cdot R \tag{6.11.29}$$

El radio mínimo de la órbita se mantiene proporcional al radio del billar, y de aquí el ángulo de incidencia mantiene su valor constante

$$\operatorname{sen}\chi = \frac{p_\varphi}{pR} = \frac{p_\varphi}{\sqrt{2mE}R} = \frac{r_0}{R} = \text{cte} \tag{6.11.30}$$

de forma que el número de ciclos también se mantiene constante

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi}(\pi - 2\chi) = \text{cte} \tag{6.11.31}$$

Con todo ello, la conclusión es que la distribución de las órbitas (caracterizada por Γ) no depende de la variación (siempre que sea suficientemente lenta) del radio del billar.

6.11.5. Gas ideal (ejemplo de billar en 3D)

Definición. Hamiltoniano Analizamos finalmente el ejemplo de un gas ideal formado por una única partícula puntual de masa m que se encuentra localizada en el interior de un billar formado por un cubo impenetrable de lado L, asumiendo que las colisiones con las paredes son elásticas. En

coordenadas cartesianas (x, y, z) el Hamiltoniano para el movimiento libre de la partícula entre las sucesivas colisiones es

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) \tag{6.11.32}$$

y es totalmente separable. La ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right) = E \tag{6.11.33}$$

tiene la solución directa

$$W = \pm\alpha_x x \pm \alpha_y y \pm \alpha_z z \tag{6.11.34}$$

por ser x, y, z coordenadas cíclicas, siendo $\pm\alpha_x, \pm\alpha_y, \pm\alpha_z$ los momentos conjugados, cuyo signo se corresponde con cada sentido del movimiento, tras las sucesivas colisiones con la frontera del potencial. Las constantes de separación satisfacen además

$$E = \frac{1}{2m}\left(\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2\right) \tag{6.11.35}$$

Variables de acción Las variables de acción (I_x, I_y, I_z) están dadas por las integrales sobre el movimiento periódico en cada uno de los ejes

$$I_x = \oint p_x dx = \int_0^L \alpha_x dx + \int_L^0 (-\alpha_x)\, dx = 2L\alpha_x \tag{6.11.36}$$

y de forma análoga

$$I_y = 2L\alpha_y \quad , \quad I_z = 2L\alpha_z \tag{6.11.37}$$

Con ayuda de estas definiciones, obtenemos la energía en función de las variables de acción en la forma

$$E = \frac{1}{8mL^2}\left(I_x^2 + I_y^2 + I_z^2\right) \tag{6.11.38}$$

Frecuencias del movimiento. Órbita Las frecuencias asociadas a los tres grados de libertad son, respectivamente

$$\nu_x = \frac{\partial E}{\partial I_x} = \frac{I_x}{4mL^2} \quad , \quad \nu_y = \frac{I_y}{4mL^2} \quad , \quad \nu_z = \frac{I_z}{4mL^2} \tag{6.11.39}$$

y estos valores coinciden obviamente con los valores $\nu = 1/T$, donde T es el periodo del movimiento en la dirección dada. Por ejemplo, para la coordenada x, tenemos en función de la velocidad v_x de la partícula en esa dirección

$$T_x = \frac{2L}{v_x} = \frac{2mL}{\alpha_x} = \frac{4mL^2}{I_x} = \frac{1}{\nu_x} \tag{6.11.40}$$

La órbita de la partícula será periódica cuando las tres frecuencias sean conmensurables entre sí, en la forma

$$n_1\nu_x = n_2\nu_y = n_3\nu_z \tag{6.11.41}$$

siendo $n_1, n_{2,} n_3$ números enteros.

Presión del gas sobre la frontera Como modelo de gas ideal, no nos interesa tanto las características de la órbita de la partícula, sino su efecto dinámico sobre el volumen que la contiene, en este caso el cubo de lado L. Entre todas las variables, la más relevante es la *presión* P que ejerce la partícula sobre cada una de las paredes, y que tiene la expresión

$$P = \frac{\overline{F}}{L^2} \tag{6.11.42}$$

siendo $\overline{F}$ el promedio en el tiempo de la fuerza en la dirección dada, por ejemplo $\overline{F} = \overline{F_x}$ cuando consideramos la presión sobre las dos paredes del cubo perpendiculares al eje x. En este caso, en cada colisión la partícula cede a cada pared la cantidad de momento en la direcciónx

$$\Delta p_x \equiv p_f - p_i = p_x - (-p_x) = 2p_x \tag{6.11.43}$$

y esto sucede en cada intervalo de tiempo que corresponde a un periodo T_x de movimiento. Entonces, a partir de la definición de fuerza $F = dP/dt$, la fuerza promedio que ejerce la partícula sobre cada una de las paredes está dada por

$$\overline{F_x} = \frac{\Delta p_x}{T_x} = \frac{2p_x}{\frac{2mL}{p_x}} = \frac{p_x^2}{mL} \tag{6.11.44}$$

con lo cual, la presión ejercida es, en función del volumen del sistema $V = L^3$, e introduciendo el concepto de temperatura

$$P = \frac{p_x^2}{mL^3} = \frac{p_x^2}{mv} \to PV = \frac{p_x^2}{m} = f(T) \tag{6.11.45}$$

siendo $f(T)$ una función de la energía del sistema, y por tanto de su temperatura. Aplicando el teorema de equipartición de la energía, $\frac{1}{2}k_BT$ por cada grado de libertad, llegaríamos a la denominada *ley de los gases ideales*.

Ecuación de estado del gas Finalmente, analizamos cuál sería la ecuación de estado del sistema cuando su volumen varía de forma suficientemente lenta, lo que correspondería a una transformación adiabática. En este caso, la invariancia adiabática de la variable de acción nos lleva a la relación para el momento de la partícula

$$I_x = 2Lp_x \to p_x = \frac{\text{cte}}{L} \tag{6.11.46}$$

y de forma análoga para p_y, p_z. Con ello, la presión debe satisfacer la relación

$$P = \frac{p_x^2}{mL^3} = \frac{\text{cte}}{L^5} \to PV^{5/3} = \text{cte} \equiv g(T) \tag{6.11.47}$$

que supone la ecuación de estado para la transformación adiabática de cambio de volumen, con un coeficiente adiabático

$$\gamma = \frac{5}{3} \tag{6.11.48}$$

en acuerdo con el resultado conocido del gas ideal monoatómico, sin grados de libertad internos (asimilable a un gas de partículas puntuales).

6.12. Videoclases

Tipo	Duración	Contenidos	Enlace
Teoría	90 mn	Secciones 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.6, 6.8	S.6.1–S.6.6, S.6.8
Problemas	60 mn	Problemas 6.7, 6.9	S.6.7, S.6.9
Autoevaluación	20 mn	Problemas 6.10	S.6.10
Otros	30 mn	Apéndices 6.11	–

Capítulo 7

Invariantes integrales

7.1. Introducción

Variación de la acción Consideremos el funcional de acción

$$S[q] \equiv \int_{t_i}^{t_f} L dt \tag{7.1.1}$$

siendo L el Lagrangiano del sistema y $q(t)$ una trayectoria del sistema[2] (real o no) entre los instantes inicial t_i y final t_f. Queremos determinar la variación de $S[q]$ para una variación totalmente arbitraria de $q(t)$ y del parámetro temporal t[3], sin exigir mayor restricción sobre las coordenadas y el tiempo en los puntos extremos de la trayectoria variada. Partiendo de su definición, y aplicando el cálculo variacional, esta variación completa δS está dada por la expresión integral

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{d} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt + \left(p\delta q - H\delta t \right) |_{t_i}^{t_f} \tag{7.1.2}$$

Si exigimos además que se anule la variación de las coordenadas y el tiempo en los extremos de cada trayectoria, recuperamos de forma directa las ecuaciones de Euler−Lagrange a partir del principio de la acción estacionaria

$$\delta S = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{d} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \tag{7.1.3}$$

Variación de la acción para trayectorias reales Cambiemos ahora el criterio, y consideremos que todas las trayectorias variadas son trayectorias reales del sistema, y por tanto, satisfacen las ecuaciones de Euler−Lagrange, aunque debemos esperar entonces que $\delta q \neq 0$, $\delta t \neq 0$ en los extremos de integración. En este caso, la variación del funcional es, directamente

$$\delta S = \left(p\delta q - H\delta t \right) |_{t_i}^{t_f} \tag{7.1.4}$$

Tubo de trayectorias en el espacio extendido Evaluamos ahora esta variación en el espacio de fases extendido[4], formado por las variables (q, p) y el parámetro temporal tiempo t, considerando en particular una curva cerrada ó *contorno* C_i de estados del sistema en el instante inicial t_i, que evoluciona en el tiempo y pasará a ser contorno C_f en el instante final t_f. Generamos así un *tubo de trayectorias reales* en el espacio de fases extendido, cada una de ellas iniciándose en un punto de C_i y finalizando en el punto de correspondiente de C_f, y para cada una de ellas la variación δS del funcional está dada por la expresión anterior.

[2] Recordamos que la trayectoria es *real* si satisface las ecuaciones del movimiento, en este caso, las ecuaciones de Euler−Lagrange.

[3] Esta variación del parámetro temporal debe entenderse siempre como un variación de las condiciones externas del sistema, en este caso, la *perspectiva* del observador externo al sistema.

[4] Para su definición, véase la sección 3.4.1.

Parametrización en el tubo de trayectorias Para distinguir unas trayectorias de otras dentro de este tubo de trayectorias, vamos a introducir un nuevo parámetro continuo, digamos α, y definamos el funcional de acción en la forma

$$S(\alpha) \equiv S[q(\alpha)] \tag{7.1.5}$$

recordando que aquí la trayectoria $q(t)$ es una trayectoria real, esto es, el funcional S pasará a ser, como indica la expresión anterior, una mera función de α.
Considerando que necesitamos únicamente un intervalo para el parámetro α que sea finito para recorrer completamente el contorno C de trayectorias, y si arbitrariamente le asignamos los valores $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces se cumplirá

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=1} \delta S(\alpha) \equiv S(1) - S(0) \equiv 0 \tag{7.1.6}$$

dado que las trayectorias en el contorno forman un tubo cerrado, con el mismo estado inicial y final, desde $\alpha = 0$ hasta $\alpha = 1$.

Integración sobre el contorno C Con esta condición para la variación total del funcional, se debe satisfacer entonces

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=1} (pdq - Hdt)\,|_{t_i}^{t_f} = 0 \tag{7.1.7}$$

y de aquí, ya que los parámetros α y t son independientes (el primero recorre todas las trayectorias, y el segundo pertenece a una única trayectoria)

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=1} (pdq - Hdt)_{t_i} = \int_{\alpha=0}^{\alpha=1} (pdq - Hdt)_{t_f} \tag{7.1.8}$$

ó

$$\oint_{C_i} pdq - Hdt = \oint_{C_f} pdq - Hdt \tag{7.1.9}$$

7.2. Definición de invariante integral

Invariante integral de Poincaré−Cartan Hemos demostrado así que la integral de línea, definida por

$$K = \oint_C (pdq - Hdt) \tag{7.2.1}$$

evaluada a lo largo de un contorno C en el espacio formado por las variables (q, p) y el tiempo t, no cambia su valor para un desplazamiento arbitrario del contorno C a lo largo de un tubo de trayectorias reales. Este valor constante, dado que se trata de un funcional, corresponde al concepto de *invariante*. Por tanto, se demuestra que K es un *invariante integral*, denominado en particular *invariante integral de Poincaré−Cartan*.

Tipos de invariantes integrales Los invariantes integrales pueden ser de primer orden, segundo orden, .., en función del número de variables diferenciales sobre las que se integra en su expresión. Además se denominan invariantes *absolutos* si la región de integración es una región abierta en el espacio de fases y *relativos*, si la región de integración es cerrada. Por ejemplo, el invariante de Poincaré-Cartán es un invariante relativo de primer orden.
La importancia de esta distinción reside en lo siguiente. Puede demostrarse que un invariante relativo de orden p es equivalente a un invariante absoluto de orden $p + 1$. Uno de los ejemplos más comunes es el denominado *teorema de Stokes*, que por ejemplo establece para dos dimensiones

la equivalencia entre la integral sobre un contorno cerrado C y la integral sobre la superficie S que delimita, según la relación

$$\oint_C A\,(x,y)\,dx + B\,(x,y)\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) dxdy \tag{7.2.2}$$

y por tanto, de un invariante relativo de orden 1 (en el lado izquierdo), obtendríamos un invariante absoluto de orden 2 (en el lado derecho).

7.2.1. Ejemplos

• Partimos de la expresión completa del invariante de Poincaré−Cartan

$$K = \oint_{C_i} (p\Delta q - H\Delta t) \tag{7.2.3}$$

donde $\Delta q, \Delta t$ representan las variaciones arbitrarias de las coordenadas y el tiempo, pero compatibles con que la trayectoria variada debe ser también una trayectoria real. La variación total de la coordenada satisface

$$\Delta q \equiv \delta q + \dot{q}\Delta t \tag{7.2.4}$$

El primer término es la variación arbitraria de la trayectoria a tiempo constante, y el segundo la variación de q debida a la variación arbitraria del parámetro de tiempo.

Caso $\Delta t = 0$ Esto es, no existe una variación arbitraria del tiempo en la trayectoria variada. Tenemos por tanto la variación de la coordenada

$$\Delta q = \delta q \tag{7.2.5}$$

y distinguimos dos casos.

(1) Cuando

$$\delta q \equiv dq \equiv \dot{q}dt \tag{7.2.6}$$

es decir, cuando la variación de q no es arbitraria, sino fruto de la propia evolución temporal del sistema. Tenemos en este caso el invariante de la variable de acción

$$K_{\Delta t=0} \equiv \oint_C pdq \equiv I = \oint_{\mathcal{C}} p\dot{q}dt \tag{7.2.7}$$

dado que el conjunto de estados que forman el contorno $\mathcal{C}$ en el instante dado proviene de la evolución temporal del sistema. Es el caso del invariante de acción de un oscilador armónico. En el espacio de fases la trayectoria es una elipse y cada punto de la elipse proviene de la evolución temporal de un punto vecino.

(2) Cuando

$$\delta q \equiv dQ = Q'(q)dq \quad , \quad Q = Q(q) \tag{7.2.8}$$

es decir la variación se define de una forma arbitraria, en función de la transformación de coordenadas $Q = Q(q)$. Tenemos en este caso el invariante genérico

$$I \equiv \oint PdQ \tag{7.2.9}$$

que denota simplemente que el área en el espacio de fases es invariante bajo transformación de coordenadas (con su correspondiente transformación del momento) y además se mantiene invariante a lo largo del tubo de trayectorias reales.

Caso $\delta q = 0$ Esto es, no existe variación arbitraria de las coordenadas en la trayectoria variada. Tenemos por tanto

$$\Delta q = \dot{q}\Delta t \tag{7.2.10}$$

De nuevo distinguimos dos casos.

(1) Cuando

$$\Delta t = dt \quad , \quad \Delta q = \dot{q}dt \tag{7.2.11}$$

Es decir la variación del parámetro temporal sobre las trayectorias no es arbitraria, y es fruto de la propia evolución temporal del sistema. Tenemos en este caso el invariante

$$\oint_{\mathcal{C}} (p\dot{q} - H)\, dt \equiv \oint_{\mathcal{C}} L dt \tag{7.2.12}$$

que no es más que la expresión de la reversibilidad dinámica del movimiento

$$\int_{t_i}^{t_f} L dt = -\int_{t_f}^{t_i} L dt \tag{7.2.13}$$

ó introduciendo la función principal de Hamilton, $S \equiv \int L dt$, nos indica que si S determina la solución hacia el futuro, $-S$ determina la solución hacia el pasado (Véase el ejercicio 5.4.1, apartado (a)).

(2) Cuando la variación temporal está dada por la función arbitraria

$$t = g(\tau) \quad , \quad \Delta t = g'(\tau)d\tau \tag{7.2.14}$$

tenemos el invariante

$$\oint_{\mathcal{C}} (p\dot{q} - H)\, g'(\tau)d\tau \equiv \oint_{\mathcal{C}} L\Delta t \tag{7.2.15}$$

que, visto el punto anterior, no es más que la reversibilidad de la dinámica, para reparametrizaciones arbitrarias del tiempo.

Caso general $\Delta t \neq 0$, $\delta q \neq 0$ En este caso hablaremos de una transformación general de la coordenada y del tiempo, en la forma

$$\Delta t = g'(\tau)d\tau \quad , \quad \delta q = df(Q) = f'(Q)dQ \tag{7.2.16}$$

y en este caso

$$K \equiv \oint_{\mathcal{C}} (p\delta q + L\Delta t) \tag{7.2.17}$$

se mantiene invariante a lo largo del tubo de trayectorias reales.

7.3. Invariante de acción

Si calculamos el invariante de Poincaré−Cartan sobre un contorno cerrado específicamente formado por los puntos de una *misma* trayectoria real en el espacio de fases, y para la cual, por definición, no existe variación del parámetro temporal, $dt = 0$, obtenemos la expresión para este invariante integral

$$K = \oint_C pdq \equiv I \tag{7.3.1}$$

y vemos que equivale a la variable de acción I sobre la trayectoria cerrada. Y además por definición, I es un invariante relativo, que además es *universal*, puesto que es invariante independientemente de la expresión exacta que tenga el Hamiltoniano del sistema.

Teorema de Liouville Aplicando entonces a este invariante I el teorema de Stokes, equivalente a las definiciones $A(q,p) = p, B(q,p) \equiv 0$, tenemos el resultado

$$I \equiv \oint_C p dq = \iint_\Gamma \left(\frac{\partial A}{\partial p}\right) dqdp = \iint_\Gamma dqdp \equiv \text{inv.} \tag{7.3.2}$$

concluimos que el propio *área* Γ en el espacio de fases es un invariante universal absoluto. Este invariante, para un sistema con N estados dinámicos, lleva al teorema de Liouville (descrito en la sección 6.4), que establece que la densidad de estados en el espacio de fases es una constante del movimiento.

7.4. Otros invariantes

A partir de este conjunto de invariantes se puede construir todo invariante, de cualquier orden, del sistema. En particular se satisface el denominado *teorema de Lee Hwa-Chung*: cualquier otro invariante integral universal (esto es, independiente de H) difiere de los anteriores como máximo en un factor constante.

7.5. Ejercicios resueltos

7.5.1. Integral de Poincaré−Cartan

Sabiendo que la integral de Poincaré−Cartan K es un invariante respecto a los contornos cerrados sobre el tubo de trayectorias en el espacio de fases ampliado (de las variables canónicas más el tiempo), el objetivo de este ejercicio es demostrar que necesariamente el tubo de trayectorias está formado por las trayectorias *reales*, es decir, trayectorias que satisfacen las ecuaciones de Hamilton del sistema. Para ello,

(a) Como primer paso, introduzca el parámetro μ que identifica el estado del sistema, con coordenadas (q,p,t), dentro de la trayectoria dada, y obtenga la expresión de la variación de K para una variación de μ dada. Exprese el resultado en forma de una ecuación variacional.

(b) Teniendo en cuenta que la operación de variación y la operación de derivación conmutan, es decir, la variación en la localización del sistema dentro de la trayectoria y la variación de las coordenadas y el tiempo conmutan, ambos operadores pueden ser intercambiados. Realice entonces este intercambio, e integre por partes el resultado para eliminar las diferenciales de las variaciones, esto es, expresiones que contienen una diferencial de la forma $d(\Delta q)$.

(c) Como último paso, introduzca la dependencia funcional del Hamiltoniano $H \equiv H(q,p,t)$ del sistema, y obtenga la condición necesaria para que la variación de K sea nula, esto es, K sea invariante.

(d) Analice de qué manera el resultado obtenido expresa que la trayectoria elegida satisface las ecuaciones de Hamilton, y por tanto es una trayectoria *real*.

(a) Además del parámetro α que identifica cada trayectoria dentro del tubo, introducimos, como indica el enunciado, un parámetro μ que identifica el estado del sistema (q,p,t) dentro de la trayectoria dada.

Con esta descripción elegimos ahora un estado dado del sistema, esto es, fijamos un valor constante μ, e integramos en todo α, para recorrer un contorno cerrado, que corresponde a la localización del estado dado en todas las trayectorias del tubo en el mismo instante de tiempo, digamos t_μ, y que denominaremos el contorno C_μ. Para este contorno, el invariante de Poincaré-Cartán puede

expresarse en la forma

$$K \equiv \oint_{C_\mu} (pdq - Hdt) = \int_{\alpha=0}^{\alpha=1} (pdq - Hdt)_{t_\mu} \tag{7.5.1}$$

Una vez definida K, la condición para su invariancia exige que la integral no cambie cuando nos trasladamos a otro estado del sistema, por ejemplo con coordenadas (q', p', t'), dentro de la trayectoria dada, es decir, cuando modificamos expresamente el valor del parámetro μ. Y matemáticamente, podemos expresar esta invariancia en la forma variacional

$$\Delta K \equiv \frac{\delta K}{\delta \mu} \Delta\mu = 0 \tag{7.5.2}$$

ó también

$$0 = \oint_{C_\mu} \Delta\left(pdq - Hdt\right) \tag{7.5.3}$$

ecuación variacional que tiene el desarrollo

$$0 = \oint_{C_\mu} \left(\Delta p \cdot dq + p \cdot \Delta\left(dq\right) - \Delta H \cdot dt - H \cdot \Delta\left(dt\right)\right) \tag{7.5.4}$$

(b) Ya que la operación de variación y la operación de derivación conmutan, es decir, la variación en la localización del sistema dentro de la trayectoria y la variación de las coordenadas y el tiempo conmutan, ambos pueden ser intercambiados. Esto es, se satisface

$$\Delta\left(dq\right) = d\left(\Delta q\right) \quad , \quad \Delta\left(dt\right) = d\left(\Delta t\right) \tag{7.5.5}$$

y la ecuación variacional anterior se escribe

$$0 = \oint_{C_\mu} \Delta p \cdot dq + p \cdot d\left(\Delta q\right) - \Delta H \cdot dt - H \cdot d\left(\Delta t\right) \tag{7.5.6}$$

Integramos entonces por partes el segundo y el cuarto término en $d\left(\Delta q\right), d\left(\Delta t\right)$ respectivamente, teniendo en cuenta que

$$\oint_{C_\mu} p \cdot d\left(\Delta q\right) = p \cdot \Delta q\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=1} - \oint_{C_\mu} \Delta q \cdot dp = -\oint_{C_\mu} \Delta q \cdot dp \tag{7.5.7}$$

$$-\oint_{C_\mu} H \cdot d\left(\Delta t\right) = -H \cdot \Delta t\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=1} + \oint_{C_\mu} \Delta t \cdot dH = \oint_{C_\mu} \Delta t \cdot dH \tag{7.5.8}$$

dado que en la integral en el contorno C_μ los puntos inicial y final son los mismos, y por tanto, también sus variaciones resultan iguales. Obtenemos por tanto un resultado en el que no aparecen ya las diferenciales de las variaciones, en la forma

$$0 = \oint_{C_\mu} \Delta p \cdot dq - \Delta q \cdot dp - \Delta H \cdot dt + \Delta t \cdot dH \tag{7.5.9}$$

(c) Podemos introducir entonces en el último término el valor de la diferencial del Hamiltoniano, que será función de las variables canónicas y el tiempo en la forma

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{7.5.10}$$

Agrupando entonces los términos semejantes en la integral cíclica, obtenemos la condición de invariancia en la forma

$$0 = \oint_{C_\mu} \left(\Delta p + \frac{\partial H}{\partial q}\Delta t\right) \cdot dq + \left(-\Delta q + \frac{\partial H}{\partial p}\Delta t\right) \cdot dp + \left(-\Delta H + \frac{\partial H}{\partial t}\Delta t\right) \cdot dt \tag{7.5.11}$$

ó

$$0 = \oint_{C_\mu} \Delta t \left[\left(\frac{\Delta p}{\Delta t} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) dq + \left(-\frac{\Delta q}{\Delta t} + \frac{\partial H}{\partial p} \right) dp + \left(-\frac{\Delta H}{\Delta t} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt \right] \tag{7.5.12}$$

donde la variación Δt está relacionada con la variación $\Delta\mu$, por la definición,

$$\Delta t = \frac{\partial t}{\partial \mu} \Delta \mu \tag{7.5.13}$$

En conclusión, dado que Δt es arbitrario, la integral cíclica será nula únicamente cuando el término entre corchetes en el integrando sea idénticamente nulo. Obtenemos entonces que para cada generatriz del tubo, esto es para cada trayectoria, la variación de las coordenadas (q, p, t) del estado del sistema a lo largo de la trayectoria debe cumplir

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta t} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) dq + \left(-\frac{\Delta q}{\Delta t} + \frac{\partial H}{\partial p} \right) dp + \left(-\frac{\Delta H}{\Delta t} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt \equiv 0 \tag{7.5.14}$$

para cualquier diferencial arbitraria (dq, dp, dt) de sus coordenadas (q, p, t).
Se satisface por tanto, en todo instante de tiempo, y para todo estado del sistema

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad , \quad \frac{\Delta H}{\Delta t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{7.5.15}$$

(d) Para interpretar estas ecuaciones, observamos finalmente que cuando se elige una única trayectoria la variación Δ de la localización del sistema se reduce a la variación del sistema entre puntos vecinos de la misma trayectoria, esto es, la variación Δ se reduce a la derivación ordinaria, y podemos escribir las ecuaciones anteriores como

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad , \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{7.5.16}$$

En conclusión, las ecuaciones que debe satisfacer la trayectoria son las ecuaciones de Hamilton para el Hamiltoniano dado, y por tanto la trayectoria es una trayectoria *real*.

7.6. Autoevaluación

Ejercicios

7.6.1. Teorema de Lee Hwa-Chung (R)

Demuestre que si la cantidad integral K, definida de forma genérica por

$$K \equiv \oint \left(A\left(q, p, t\right) dq + B\left(q, p, t\right) dp \right) \tag{7.6.1}$$

es un invariante integral universal, entonces necesariamente debe ser múltiplo de la variable de acción.

Cuestionarios en línea

7.6.2. Invariantes integrales

- Enlace al cuestionario

7.7. Videoclases

Tipo	Duración	Contenidos	Enlace
Teoría	60 mn	Secciones 7.1, 7.2, 7.3	S.7.1–S.7.3
Problemas	45 mn	Problemas 7.5	S.7.5
Autoevaluación	15 mn	Problemas 7.6	S.7.6
Otros	30 mn	Sección 7.4	–

Capítulo 8

Invariantes adiabáticos

8.1. Definición de invariante adiabático

Introducción Consideremos un sistema unidimensional sometido a un potencial $V(q)$ tal que su movimiento es periódico, y cuyas características dependen de un parámetro genérico, digamos λ, como puede ser la longitud en el caso del péndulo o la frecuencia de oscilación en el caso del oscilador armónico. Los invariantes adiabáticos se relacionan con el estudio del sistema cuando se permite, de forma externa, que el parámetro λ varíe lentamente en el tiempo.

Variable de acción Dado que tenemos $\lambda = \lambda(t)$, la energía $E = H(q, p, \lambda)$ ya no es una constante del movimiento, y su variación en el tiempo se escribe

$$\frac{dE}{dt} \equiv \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt} \neq 0 \tag{8.1.1}$$

A pesar de esto, todavía existen combinaciones especiales de E y λ que sí se mantienen (de una manera aproximada, como veremos) constantes en el tiempo. Son los denominados *invariantes adiabáticos*, que dado el carácter periódico del movimiento coincidirán necesariamente con las variables de acción[2]. En particular, ya que hemos elegido por simplicidad un sistema unidimensional con el Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q, \lambda(t)) \tag{8.1.2}$$

la variable de acción I queda definida mediante la expresión integral

$$I = \oint p dq = \oint \sqrt{2m\left(E(t) - V(q, \lambda(t))\right)} dq \tag{8.1.3}$$

Variación de I Dado que I dependerá del valor de la energía y de λ, su variación en el tiempo será la suma de las dos contribuciones correspondientes

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{\partial I}{\partial E}\right)_{\lambda}\frac{dE}{dt} + \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)_{E}\frac{d\lambda}{dt} \tag{8.1.4}$$

aunque el cambio en E y λ no es arbitrario sino que, como hemos visto, están relacionado entre sí mediante la ecuación $\dot{E} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\dot{\lambda}$. La clave en el invariante adiabático es que cuando $\dot{E}$ y $\dot{\lambda}$ están relacionados de esta forma, los dos términos anteriores se cancelan de forma aproximada, y se sigue que $\dot{I} = 0$ en la misma aproximación.

[2]Debemos recordar que cuando existe una dependencia explícita en el tiempo la variable de acción ya no puede ser constante, ya que la trayectoria del sistema, aunque se mantenga periódica, encierra en el espacio de fases un área dependiente del tiempo.

8.2. Condición de invariancia adiabática

Expresión exacta para dI/dt Analizando el primer sumando en la expresión anterior, vemos que, por las propiedades de la variable acción,

$$\left(\frac{\partial I}{\partial E}\right)_\lambda = \left(\frac{\partial I}{\partial H}\right)_\lambda = \frac{1}{\nu(\lambda)} = T(\lambda) \tag{8.2.1}$$

siendo ν la frecuencia del movimiento periódico, y $T(\lambda)$ su periodo, ambos evaluados para λ fijo.
• Para el segundo sumando, tenemos

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)_E = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_E \oint p dq = \oint \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)_E dq \tag{8.2.2}$$

Aquí para la integración en la coordenada q, dadas las ecuaciones de Hamilton, podemos hacer el siguiente cambio para integrar en el parámetro temporal t

$$dq \equiv \dot{q} dt = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_\lambda dt \tag{8.2.3}$$

necesariamente tomando un λ fijo. Con este cambio la integral cíclica se corresponde con una integral temporal entre el instante $t = 0$ y el instante $t = T(\lambda)$. Reuniendo ambos resultados, encontramos

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)_E = \int_0^{T(\lambda)} \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_\lambda \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)_E dt \tag{8.2.4}$$

Analizando el primer factor en el integrando, dada la dependencia funcional del Hamiltoniano

$$H(q, p, \lambda) \equiv H\left(q, \sqrt{2m(E - V(q, \lambda))}, \lambda\right) = E \tag{8.2.5}$$

diferenciando ésta con respecto a λ, vemos que se satisface

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_E + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_\lambda \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)_E = 0 \tag{8.2.6}$$

puesto que ni la energía ni q dependen de λ. Por tanto, podemos simplificar el valor del integrando, llegando al resultado

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)_E = -\int_0^{T(\lambda)} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_E dt \tag{8.2.7}$$

• Y con ello, deducimos la expresión general exacta para la variación temporal de I, en la forma

$$\frac{dI}{dt} = \left(T(\lambda)\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_E - \int_0^{T(\lambda)} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_E dt\right) \frac{d\lambda}{dt} \tag{8.2.8}$$

Los dos términos deben evaluarse en cada instante de tiempo t dado, esto es, para el $\lambda(t)$ correspondiente.

Condición de invariancia adiabática Ahora bien, cuando se satisfaga aproximadamente que

$$T(\lambda)\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_E = \int_0^{T(\lambda)} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_E dt \tag{8.2.9}$$

la variable de acción podrá será un invariante adiabático, esto es, con una variación temporal casi nula. Para ello es necesario que $\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_E$ pueda considerarse aproximadamente constante durante el tiempo $T(\lambda)$. Será así si la velocidad de variación $\lambda(t)$ es mucho menor que la velocidad de

movimiento del sistema. Dicho de otra forma, el sistema realiza muchos periodos de movimiento antes de que λ cambie apreciablemente. En ese caso, promediando sobre un periodo de movimiento, dado que λ será constante sobre el mismo, tenemos que

$$\left\langle \frac{dI}{dt} \right\rangle \equiv 0 \tag{8.2.10}$$

que establece que para cambios suficientemente lentos de λ, el valor promedio de la variable de acción, y no su valor en cada instante t, es un invariante adiabático. Esta condición de invariancia $I \simeq$ cte juega el mismo papel clave en la descripción de la dinámica del sistema que la condición de conservación de la energía $E =$ cte cuando el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo.

8.3. Invariantes adiabáticos y el teorema de Liouville

• Consideremos un conjunto de sistemas idénticos, gobernados por el mismo Hamiltoniano dependiente de un parámetro constante λ, que inicialmente tienen la misma energía, y por tanto, la misma variable de acción, pero que se encuentran en distintos estados iniciales del espacio de fases (esto es, distintos valores de (q_0, p_0). La dinámica del sistema completo se describe por la evolución del conjunto de puntos sobre la superficie de energía constante.

• Supongamos ahora que permitimos una variación en el tiempo del parámetro $\lambda(t)$. Dado que la evolución es hamiltoniana, el teorema de Liouville se satisface independientemente de que el Hamiltoniano dependa del tiempo. Por tanto, el área (ó volumen) en el espacio de fases es invariante bajo la variación arbitraria de $\lambda(t)$. Sin embargo, en este caso no puede asegurarse que la variable de acción sea invariante. En particular, para un cambio rápido de $\lambda(t)$, no puede asegurarse que las partículas que inicialmente tenían la misma energía, aunque diferentes localizaciones en (q, p), evolucionen a estados con la misma energía final.

• Para ello será necesario apelar al denominado *principio adiabático en el espacio de fases*, que establece que para variaciones lentas de $\lambda(t)$, todos los estados en la misma órbita, esto es con la misma energía, se verán afectados de la misma forma, y así en un instante de tiempo arbitrario habrán pasado conjuntamente a un misma órbita de energía E', conservando el área (la variable de acción I) interior a ella. Bajo estas circunstancias, el teorema de Liouville de la conservación del área implica directamente que el invariante adiabático I es constante en el tiempo.

8.4. Ejemplo detallado. Oscilador armónico

Presentamos en esta sección de forma resumida el cálculo del invariante adiabático para un oscilador armónico unidimensional con una frecuencia dependiente del tiempo.

8.4.1. Primera demostración

Características del movimiento

- Hamiltoniano:

$$H\left(t\right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(t\right)x^2 \equiv E(t) \tag{8.4.1}$$

- Trayectoria en espacio de fases:

$$\frac{x^2}{2E(t)/m\omega^2\left(t\right)} + \frac{p^2}{2mE(t)} = 1 \tag{8.4.2}$$

- Variable de acción:

$$I = \oint pdx = \pi ab = \pi\sqrt{\frac{2E(t)}{m\omega^2\left(t\right)}}\sqrt{2mE(t)} = 2\pi\frac{E(t)}{\omega(t)} \neq \text{cte} \tag{8.4.3}$$

Variación y promedio temporal

- Variación en el tiempo de I:

$$I = 2\pi\frac{E}{\omega} \rightarrow \frac{dI}{dt} = 2\pi\frac{\dot{E}}{\omega} - 2\pi E\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \frac{2\pi}{\omega}\left(\dot{E} - E\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right) \tag{8.4.4}$$

- Variación en el tiempo de la energía E:

$$E\left(t\right) \equiv H\left(\omega\left(t\right)\right) \rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \omega}\dot{\omega} = m\omega x^2\dot{\omega} \tag{8.4.5}$$

- Variación en el tiempo de I:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{2\pi\dot{\omega}}{\omega^2}\left(m\omega^2x^2 - E\right) \tag{8.4.6}$$

- Promedio temporal:

$$\left\langle\frac{dI}{dt}\right\rangle = \left\langle\frac{2\pi\dot{\omega}}{\omega^2}\left(m\omega^2x^2 - E\right)\right\rangle \tag{8.4.7}$$

Aproximación adiabática El promedio temporal se realiza sobre un intervalo de tiempo Δt mucho menor que el intervalo sobre el que varía la frecuencia $\omega(t)$, del orden de $\frac{\omega}{\dot{\omega}}$, pero mucho mayor que el periodo del movimiento, del orden $\frac{2\pi}{\omega}$, para que la energía $E(t)$ sea función continua de t. Si es posible encontrar este intervalo de tiempo Δt tal que

$$\frac{2\pi}{\omega} \ll \Delta t \ll \frac{\omega}{\dot{\omega}} \tag{8.4.8}$$

entonces, definiendo

$$\left\langle\frac{dI}{dt}\right\rangle \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\frac{dI}{dt}dt \tag{8.4.9}$$

se satisface

(1) $\left\langle\frac{2\pi\dot{\omega}}{\omega^2}\left(m\omega^2x^2 - E\right)\right\rangle \simeq \frac{2\pi\dot{\omega}}{\omega^2}\left\langle m\omega^2x^2 - E\right\rangle$ salvo términos de orden superior (proporcionales a $\dot{\omega}^2, \ddot{\omega}$, etc).

(2) $\left\langle m\omega^2x^2 - E\right\rangle \simeq m\omega^2\left\langle x^2\right\rangle - \left\langle E\right\rangle$

Teorema del virial Aplicando entonces el teorema del virial (deducible de las ecuaciones de Hamilton)

$$\left\langle T\right\rangle = \left\langle V\right\rangle \tag{8.4.10}$$

$$\left\langle E\right\rangle = \left\langle T + V\right\rangle = 2\left\langle V\right\rangle \simeq m\omega^2\left\langle x^2\right\rangle \tag{8.4.11}$$

concluimos que

$$\left\langle\frac{dI}{dt}\right\rangle \simeq 0 \Rightarrow\ I \simeq \text{cte} \tag{8.4.12}$$

siendo sobre este intervalo de tiempo Δt

$$I \equiv 2\pi\frac{E(t)}{\omega(t)} \simeq \text{cte} \Rightarrow\ \frac{E(t)}{\omega(t)} \simeq \text{cte} \tag{8.4.13}$$

Corolario Al ser $E(t)$ una función continua del tiempo, podemos definir una amplitud $A(t)$ tal que

$$E(t) \equiv \frac{1}{2} m\omega^2 (t) A^2(t) \tag{8.4.14}$$

con lo cual el invariante adiabático puede leerse también:

$$I \equiv \pi m\omega(t) A^2(t) \simeq \text{cte} \Rightarrow \omega(t) A^2(t) \simeq \text{cte} \tag{8.4.15}$$

8.4.2. Segunda demostración

Podemos realizar también la demostración de la invariancia adiabática de I desarrollando uno a uno los pasos de la teoría general (sección 8.2) para este Hamiltoniano particular. Obtenemos los resultados:

Variación temporal de I

$$\frac{dI}{dt} \equiv \left(\frac{\partial I}{\partial E}\right)_\omega \frac{dE}{dt} + \left(\frac{\partial I}{\partial \omega}\right)_E \frac{d\omega}{dt} \quad , \quad \frac{dE}{dt} \equiv \left(\frac{\partial H}{\partial \omega}\right)_E \frac{d\omega}{dt} \tag{8.4.16}$$

luego tenemos

$$\frac{dI}{dt} = \left[\left(\frac{\partial I}{\partial E}\right)_\omega \left(\frac{\partial H}{\partial \omega}\right)_E + \left(\frac{\partial I}{\partial \omega}\right)_E\right] \frac{d\omega}{dt} \tag{8.4.17}$$

Cálculo de las derivadas parciales de I

(1) Por definición,

$$\left(\frac{\partial I}{\partial E}\right)_\omega \equiv T(\omega) \tag{8.4.18}$$

al ser

$$I \equiv 2\pi \frac{E(t)}{\omega(t)} \rightarrow \left(\frac{\partial I}{\partial E}\right)_\omega = \frac{2\pi}{\omega(t)} \equiv T(\omega) \tag{8.4.19}$$

luego

$$\frac{dI}{dt} = \left[T(\omega) \left(\frac{\partial H}{\partial \omega}\right)_E + \left(\frac{\partial I}{\partial \omega}\right)_E\right] \frac{d\omega}{dt} \tag{8.4.20}$$

(2) Por definición, tenemos

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \omega}\right)_E = \left(\frac{\partial}{\partial \omega}\right)_E \oint p dq = \oint \left(\frac{\partial p}{\partial \omega}\right)_E dq \tag{8.4.21}$$

siendo

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \omega}\right)_E = -\frac{m^2 \omega x^2}{p} = \frac{\frac{p^2}{\omega} - \frac{2mE}{\omega}}{p} = \frac{p}{\omega} - \frac{2mE}{\omega p} \tag{8.4.22}$$

con lo cual

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \omega}\right)_E = \oint \frac{p}{\omega} dq - \oint \frac{2mE}{\omega p} dq = \frac{1}{\omega} \oint p dq - \frac{2E}{\omega} \oint \frac{dq}{p/m} \tag{8.4.23}$$

Dado que $p = mv$, con $v = \dot{q}$, tenemos en la ultima integral el elemento diferencial

$$\frac{dq}{p/m} = \frac{\dot{q} dt}{\dot{q}} = dt \tag{8.4.24}$$

y por tanto

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \omega}\right)_E = \frac{1}{\omega} \oint p dq - \frac{2E}{\omega} \oint dt = \frac{I}{\omega} - \frac{2E}{\omega} T(\omega) \tag{8.4.25}$$

Y al ser $I \equiv 2\pi \frac{E(t)}{\omega(t)}$ y $\frac{2\pi}{\omega} = T(\omega)$, esta derivada parcial tiene finalmente la expresión

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \omega}\right)_E = \frac{ET(\omega)}{\omega} - \frac{2ET(\omega)}{\omega} = -\frac{ET(\omega)}{\omega} \tag{8.4.26}$$

Cálculo de los promedios temporales. Invariancia adiabática Reordenando los resultados obtenidos hasta ahora tenemos la variación temporal exacta

$$\frac{dI}{dt} = \frac{T(\omega)}{\omega}\left(\omega\left(\frac{\partial H}{\partial \omega}\right)_E - E\right)\frac{d\omega}{dt} = \frac{T(\omega)}{\omega}(2V - E)\frac{d\omega}{dt} \tag{8.4.27}$$

y tomando el promedio temporal, y aplicando el teorema del virial para este Hamiltoniano particular

$$\langle T\rangle = \langle V\rangle \Rightarrow \langle E\rangle = \langle T + V\rangle = 2\langle V\rangle \tag{8.4.28}$$

obtenemos finalmente

$$\left\langle \frac{dI}{dt}\right\rangle \simeq \frac{T(\omega)}{\omega}(2\langle V\rangle - \langle E\rangle)\frac{d\omega}{dt} \equiv 0 \tag{8.4.29}$$

8.4.3. Aclaración adicional. Ejemplo de frecuencia variable

• Consideremos el caso particular de un oscilador con la frecuencia variable

$$\omega(t) = \omega_0 e^{\alpha t} \tag{8.4.30}$$

en cuyo caso tenemos

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \alpha = \text{cte} \tag{8.4.31}$$

Para esta frecuencia variable se cumple

$$\frac{dI}{dt} = \frac{2\pi}{\omega_0}\alpha e^{-\alpha t}\left(m\omega^2(t)x^2 - E(t)\right) \tag{8.4.32}$$

y tenemos el correspondiente promedio temporal

$$\left\langle \frac{dI}{dt}\right\rangle = \frac{2\pi\alpha}{\omega_0}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau e^{-\alpha t}\left(m\omega^2(t)x^2 - E(t)\right)dt \tag{8.4.33}$$

siendo τ el tiempo sobre el que se realiza el promedio temporal.

• Si elegimos este tiempo tal que $\tau \ll \frac{1}{\alpha}$ ó $\alpha\tau \ll 1$ la integral anterior puede desarrollarse en la forma

$$\left\langle \frac{dI}{dt}\right\rangle = \frac{2\pi\alpha}{\omega_0}\left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \left(m\omega^2x^2 - E\right)dt + O(\alpha\tau)\right) \tag{8.4.34}$$

y si aplicamos ahora el teorema del virial $2\langle V\rangle = \langle E\rangle$, obtenemos el resultado adiabático esperado

$$\left\langle \frac{dI}{dt}\right\rangle = 0 + O((\alpha\tau)^2) \tag{8.4.35}$$

• Para un tiempo τ que no cumpla $\alpha\tau \ll 1$ obtendríamos un promedio temporal no infinitesimalmente nulo, esto es,

$$\left\langle \frac{dI}{dt}\right\rangle = f(\tau) \neq 0 \tag{8.4.36}$$

lo que indica que sobre estos tiempos la acción no se conserva aproximadamente constante.

8.5. Ejercicios resueltos

8.5.1. Partícula en colisión con paredes móviles

Una partícula de masa m se mueve en el eje x entre dos paredes impenetrables situadas en $x = \pm\frac{L}{2}$, sobre las que colisiona elásticamente, realizando un movimiento periódico.

(a) Deduzca cuál es la variación de la velocidad de la partícula al cabo de un periodo de movimiento en dos casos, cuando las paredes se mantienen fijas, y cuando varía lentamente la distancia entre ellas.

(b) Deduzca cuál es la variación de la velocidad de la partícula en función de la variación de L, cuando L varía lentamente. Para ello, considere el efecto acumulado después de muchos periodos de oscilación.

(c) Integre la expresión resultante y determine de esta forma la variación de la energía de la partícula con la longitud total L del movimiento, cuando L varía lentamente. Finalmente defina el invariante adiabático de este sistema.

(a) Cuando las paredes están fijas, dadas las colisiones elásticas con cada una de ellas, la velocidad de la partícula cambia de sentido manteniendo constante su módulo. De esta forma, al cabo de un periodo la partícula tiene la misma velocidad que al inicio, y su variación es nula.

El resultado es diferente cuando las paredes están en movimiento. Sea $x_d = L/2$ la posición de la pared de la derecha y $x_i = -L/2$ la posición de la pared de la izquierda. Si ambas paredes son móviles, podemos asumir que las paredes llevarán las velocidades respectivas

$$\dot{x}_{d,i} = \pm\frac{\dot{L}}{2} \tag{8.5.1}$$

siendo $\dot{L}$ es la variación en el tiempo de distancia entre ellas, esto es la variación de la longitud L. Además se satiface

$$\dot{L} = \dot{x}_d - \dot{x}_i \tag{8.5.2}$$

Analicemos entonces la colisión de la partícula con la pared de la derecha. La partícula colisiona con ella con una velocidad relativa $v - \dot{x}_d$, y después de la colisión elástica invierte su sentido de movimiento con la velocidad relativa opuesta $-(v - \dot{x}_d)$, y por tanto con la velocidad absoluta

$$v' = \dot{x}_d - (v - \dot{x}_d) = 2\dot{x}_d - v \tag{8.5.3}$$

y se dirige entonces en su movimiento hacia la pared de la izquierda. De forma análoga, comprobamos que tras esta segunda colisión elástica, la partícula se dirigirá de nuevo hacia la derecha con la velocidad absoluta

$$v'' = \dot{x}_i - \left(v' - \dot{x}_i\right) = 2\dot{x}_i - v' = 2\dot{x}_i - 2\dot{x}_d + v \tag{8.5.4}$$

y dado que $\dot{L} = \dot{x}_d - \dot{x}_i$, concluimos que la variación de velocidad en cada período de movimiento está dado por

$$\Delta v \equiv v'' - v = 2\dot{x}_i - 2\dot{x}_d = -2\dot{L} \tag{8.5.5}$$

(b) La variación de la longitud L puede considerarse lenta si el periodo T de oscilación de la partícula es mucho menor que el tiempo en el que la variación de la longitud es despreciable. Dicho de otra forma, la partícula al oscilar apenas ve una variación en la longitud de su movimiento. Matemáticamente, esto se expresa en la forma

$$T \sim \frac{L}{v} \ll \frac{L}{\dot{L}} \tag{8.5.6}$$

Es decir, el tiempo asociado al movimiento, T, debe ser mucho menor que el tiempo asociado a la variación de L, de magnitud $L/\dot{L}$. Dicho de otra forma, el movimiento de las paredes debe realizarse a una velocidad muy pequeña respecto a la velocidad de la partícula, $\dot{L} \ll v$.

Tomemos entonces un intervalo de tiempo Δt con un valor intermedio,

$$\frac{L}{v} \ll \Delta t \ll \frac{L}{\dot{L}} \tag{8.5.7}$$

de forma que contenga muchos periodos de oscilación, pero durante el cual la longitud apenas varíe apreciablemente. Para este Δt, el número n de periodos de movimiento será aproximadamente igual a la distancia total recorrida $v\Delta t$ dividida por la longitud $2L$ fija de una única oscilación:

$$n = \frac{v\Delta t}{2L} \tag{8.5.8}$$

Sabemos por el apartado anterior que un solo periodo la variación de la velocidad está dada por

$$\Delta v = -2\dot{L} \tag{8.5.9}$$

de forma que el efecto acumulado al cabo de n periodos será

$$\Delta v = -2\dot{L}n = -\frac{v\Delta t}{2L}2\dot{L} = -v\frac{\dot{L}\Delta t}{L} \tag{8.5.10}$$

Teniendo en cuenta que en el tiempo transcurrido la variación total en la longitud será aproximadamente

$$\Delta L \simeq \dot{L}\Delta t \tag{8.5.11}$$

fórmula válida cuando se pueden despreciar los términos de mayor orden en Δt (vinculados a las derivadas temporales de L en mayor orden, por ejemplo $\ddot{L}$), deducimos el resultado pedido

$$\Delta v = -v\frac{\Delta L}{L} \tag{8.5.12}$$

(c) Del resultado anterior, obtenemos la ecuación desarrollada

$$L\Delta v + v\Delta L = 0 \tag{8.5.13}$$

para el intervalo de tiempo dado, y deducimos por integración el resultado general

$$\Delta\left(vL\right) \equiv L\Delta v + v\Delta L = 0 \rightarrow vL = \text{cte} \tag{8.5.14}$$

Esta ley de conservación no es una ley que se satisfaga en todo instante de tiempo, sino que es aproximadamente válida al cabo de un número considerable de periodos y bajo la condición de una variación lenta de la longitud L. Dicho de otra forma, la cantidad anterior constante constituye un invariante adiabático del sistema. La expresión del invariante adiabático no es única, ya que podemos una expresión diferente relacionando la energía con la longitud del movimiento.
Dado que la energía de la partícula es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \tag{8.5.15}$$

elevando al cuadrado el invariante adiabático, obtenemos la expresión del invariante en la forma

$$v^2L^2 = \text{cte} \rightarrow EL^2 = \text{cte} \tag{8.5.16}$$

Esta fórmula nos indica que al aumentar la longitud de forma adiabática debe disminuir la energía de la partícula como el inverso al cuadrado de dicha longitud. Y también el efecto contrario, si disminuimos la longitud de forma adiabática, la energía aumenta con el inverso al cuadrado de

dicha longitud.

8.5.2. Invariante adiabático para oscilador armónico unidimensional

Para un oscilador armónico unidimensional, utilizando la definición de variable de acción y su carácter invariante,

(a) Demuestre que el cociente entre la energía y la frecuencia es un invariante adiabático.

(b) Se puede demostrar también este resultado por el método directo. Para ello, en primer lugar, determine las ecuaciones de movimiento del oscilador de frecuencia variable, y particularice su expresión para la representación compleja de la coordenada q en amplitud y fase:

$$q(t) = A(t) \cdot e^{iS(t)} \tag{8.5.17}$$

(c) Integrando de forma adiabática la ecuación de movimiento obtenida en el apartado anterior para la amplitud del movimiento, demuestre por este método directo que el cociente entre la energía y la frecuencia es un invariante adiabático. Detalle todos los pasos.

(a) Sabemos que la variable de acción I es un invariante adiabático respecto a la variación suficientemente lenta de los parámetros de los que dependen el Hamiltoniano, como pueden ser la masa de la partícula, o la frecuencia natural del oscilador. En el caso del oscilador armónico, el Hamiltoniano es

$$H\left(q,p\right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E \tag{8.5.18}$$

y en el espacio de fases (q,p) el movimiento, para un valor de la energía E, describe una elipse con semiejes a, b dados por

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \quad , \quad b = \sqrt{2mE} \tag{8.5.19}$$

Por definición, la variable de acción

$$I = \oint p dq \tag{8.5.20}$$

es el área que cubre la trayectoria de la partícula en el espacio de fases, esto es, será el área de la elipse anterior, con el valor

$$I = \pi ab = \pi\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sqrt{2mE} = 2\pi\frac{E}{\omega} = \frac{E}{\nu} \tag{8.5.21}$$

siendo $\omega = 2\pi\nu$, la frecuencia angular de oscilación y ν la frecuencia de oscilación.
Por tanto, por la invariancia adiabática de la acción, deducimos que el cociente entre la energía y la frecuencia de oscilación también es un invariante adiabático. Esto quiere decir por ejemplo, que si la frecuencia varía lentamente (régimen adiabático), la variación que aparece en la energía de la partícula es proporcional a la variación de la frecuencia.

(b) Para un oscilador cuya frecuencia depende del tiempo, el Hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2 \tag{8.5.22}$$

que coincide con la energía total, pero no es una constante del movimiento. Las ecuaciones de Hamilton correspondientes

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \quad \frac{dp}{dt} = -m\omega^2 q \quad , \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = m\frac{d\omega}{dt}\omega q^2 \tag{8.5.23}$$

nos permiten deducir la ecuación de movimiento para la variable q

$$\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0 \tag{8.5.24}$$

cuya solución no será ya una oscilación armónica, correspondiente a una frecuencia constante del movimiento.
Introduciendo en esta ecuación la representación compleja de la coordenada $q(t) = A(t) \cdot e^{iS(t)}$ en amplitud y fase, de su velocidad

$$\dot{q} \equiv \left(\dot{A} + iA\dot{S}\right) e^{iS} \tag{8.5.25}$$

y de su aceleración

$$\ddot{q} \equiv \left(\ddot{A} + 2i\dot{A}\dot{S} + iA\ddot{S} - A\dot{S}^2\right) e^{iS} \tag{8.5.26}$$

obtenemos la ecuación compleja de movimiento (omitimos la dependencia en t por brevedad)

$$\ddot{q} \equiv \ddot{A}e^{iS} + 2i\dot{A}\dot{S}e^{iS} + iA\ddot{S}e^{iS} - A\dot{S}^2e^{iS} = -\omega^2 Ae^{iS} \tag{8.5.27}$$

Y de aquí, deducimos las dos ecuaciones de movimiento solicitadas para la parte real y la parte imaginaria en la forma

$$\ddot{A} - \dot{S}^2 A + \omega^2 A = 0 \tag{8.5.28}$$

$$2\dot{A}\dot{S} + A\ddot{S} = 0 \tag{8.5.29}$$

(c) Por el método directo, tendríamos que asumir una variación conocida $\dot{\omega}$ de la frecuencia ω, y verificar qué le sucede a la energía de la partícula después de un intervalo de tiempo suficientemente grande como para que la partícula realice numerosas oscilaciones de movimiento, con periodo $T = 2\pi/\omega$, y suficientemente pequeño para que la variación de frecuencia en ese intervalo sea despreciable.

Por tanto, elegimos un Δt tal que

$$\frac{2\pi}{\omega} \ll \Delta t \ll \frac{\omega}{\dot{\omega}} \tag{8.5.30}$$

De esta desigualdad también podríamos extraer ya la condición que debe satisfacer $\dot{\omega}$ para poder hablar de régimen adiabático,

$$\dot{\omega} \ll \omega^2/2\pi \tag{8.5.31}$$

Y con esto, comprobar también que al cabo de un periodo, la frecuencia habrá cambiado en una cantidad relativa de orden mucho menor que la unidad, ya que

$$\omega' \simeq \omega + \dot{\omega}T = \omega + \frac{2\pi}{\omega}\dot{\omega} = \omega\left(1 + 2\pi\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\right) \equiv \omega\,(1+\alpha) \tag{8.5.32}$$

con $\alpha = 2\pi\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \ll 1$.

Asumiendo estos resultados, es decir, asumiendo que la variación de la frecuencia del oscilador es adiabática, veamos cuál es la variación de la energía en el intervalo Δt. Retomamos las ecuaciones de movimiento para la representación compleja. Multiplicando la última ecuación por la amplitud A, que siempre será distinta de cero, e integrando obtenemos el invariante exacto del movimiento

$$2A\dot{A}\dot{S} + A^2\ddot{S} = 0 \to \frac{d}{dt}\left(A^2\dot{S}\right) = 0 \to A^2\dot{S} = \text{cte} \equiv a \tag{8.5.33}$$

Hasta este punto el cálculo es exacto, válido para cualquier variación de la frecuencia con el tiempo. Sin embargo, debemos obtener el resultado sólo para el régimen adiabático. Analizamos ahora la ecuación restante, que escribimos en la forma

$$\ddot{A} + \left(\omega^2 - \dot{S}^2\right) A = 0 \tag{8.5.34}$$

En el régimen adiabático el primer término es mucho menor que el segundo, puesto que al aplicar la regla de la cadena a la derivada segunda

$$\ddot{A} \equiv \frac{d}{dt}\left(\dot{A}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\omega}\frac{dA}{d\omega}\right) = \ddot{\omega}\frac{dA}{d\omega} + \dot{\omega}^2\frac{d^2A}{d\omega^2} \tag{8.5.35}$$

encontramos que tiene la aproximación en función de la variación $\dot{\omega}$ de la frecuencia

$$\ddot{A} \simeq \frac{\dot{\omega}}{T}\frac{dA}{d\omega} + \dot{\omega}^2\frac{d^2A}{d\omega^2} = \dot{\omega}\left(\frac{\omega}{2\pi}\frac{dA}{d\omega} + \dot{\omega}\frac{d^2A}{d\omega^2}\right) \tag{8.5.36}$$

Y por tanto, es proporcional a $\dot{\omega}$, y de orden $\alpha \ll 1$, mientras que el segundo término de la ecuación analizada $\left(\omega^2 - \dot{S}^2\right) A$ es de orden unidad.

Como conclusión entonces, en el régimen adiabático, se satisface

$$\left(\omega^2 - \dot{S}^2\right) A = 0 \rightarrow \dot{S} = \omega(t) \tag{8.5.37}$$

dado que la amplitud siempre es distinta de cero. Con ello, el invariante exacto calculado anteriormente se reduce en el régimen adiabático al invariante adiabático

$$A^2\dot{S} = \text{cte} \equiv a \rightarrow A^2\omega = \text{cte} \equiv a \tag{8.5.38}$$

Aplicando este resultado a la energía del oscilador armónico para el intervalo de tiempo escogido Δt, la energía del oscilador tras cada intervalo de tiempo Δt está dada por el valor correspondiente al oscilador de frecuencia ω y amplitud A, esto es,

$$E(t) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(t\right)A^2\left(t\right) \tag{8.5.39}$$

y por el invariante adiabático, vemos que su dependencia en el tiempo se reduce a

$$E(t) = \frac{1}{2}m\omega\left(t\right)a \tag{8.5.40}$$

Por tanto, queda demostrada por el método directo la invariancia adiabática del cociente entre la energía y la frecuencia del oscilador

$$\frac{E(t)}{\omega\left(t\right)} = \frac{1}{2}ma = \text{cte} \tag{8.5.41}$$

8.5.3. Invariante exacto para el oscilador armónico unidimensional-pendiente

Para un oscilador armónico unidimensional,

(a) Demuestre que existe el invariante exacto J dado por

$$J = \frac{1}{2}\left[\frac{q^2}{g^2(t)} + \left(g\left(t\right)\dot{q} - q\dot{g}\left(t\right)\right)^2\right] \tag{8.5.42}$$

que es constante, independientemente de la variación lenta o no de la frecuencia, siendo $g(t)$ una función dada, y que satisface la ecuación diferencial

$$\ddot{g}\left(t\right) + \omega^2\left(t\right) g\left(t\right) = \frac{1}{g^3\left(t\right)} \tag{8.5.43}$$

Le resultará conveniente realizar en primer lugar el cambio de variable $q = g\left(t\right)\Gamma(t)$.

(b) Demuestre que en límite de la variación lenta de la frecuencia el invariante anterior J está directamente relacionado con el invariante adiabático del oscilador (esto es, es su variable de acción I). Detalle todos los pasos.

(b) Analice si con el procedimiento de aproximación empleado en el apartado anterior pueden obtenerse los invariantes adiabáticos en orden 1 y orden 2, que incluyen términos proporcionales a las sucesivas derivadas temporales de $\omega(t)$. Detalle todos los pasos.

(a) El cálculo es directo. Basta determinar que su variación en el tiempo es nula utilizando la ecuación del movimiento del oscilador unidimensional más general posible, aquel con frecuencia variable

$$\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0 \tag{8.5.44}$$

cuya solución insistimos no será ya una oscilación armónica, correspondiente a una frecuencia constante del movimiento. Con la definición de la función

$$\Gamma\left(t\right) \equiv \frac{q}{g\left(t\right)} \rightarrow q = g\left(t\right)\Gamma\left(t\right) \tag{8.5.45}$$

el invariante toma la forma

$$J = \frac{1}{2}\left[\Gamma^2(t) + g^4(t)\dot{\Gamma}^2(t)\right] \tag{8.5.46}$$

Derivando entonces J respecto al tiempo, encontramos la condición de invariancia

$$\frac{dJ}{dt} = \dot{\Gamma}\left(t\right)\left(\Gamma\left(t\right) + 2g^3\left(t\right)\dot{g}\left(t\right)\dot{\Gamma}\left(t\right) + g^4(t)\ddot{\Gamma}\left(t\right)\right) = 0 \tag{8.5.47}$$

Podemos agrupar los dos últimos términos, viendo que

$$2\dot{g}\left(t\right)\dot{\Gamma}\left(t\right) + g\left(t\right)\ddot{\Gamma}\left(t\right) = \ddot{q} - \ddot{g}\left(t\right)\Gamma\left(t\right) \tag{8.5.48}$$

que con la ayuda de la ecuación de movimiento, y la definición de Γ, queda en la forma

$$2\dot{g}\dot{\Gamma} + g\ddot{\Gamma}\left(t\right) = -\omega^2 q - \ddot{g}\Gamma = -\Gamma\left(t\right)\left[\omega^2\left(t\right)g\left(t\right) + \ddot{g}\left(t\right)\right] \tag{8.5.49}$$

Con esto, la condición de invariancia se reduce a

$$\frac{dJ}{dt} = \dot{\Gamma}\left(t\right)\Gamma\left(t\right)\left(1 - g^3\left(t\right)\left[\omega^2\left(t\right)g\left(t\right) + \ddot{g}\left(t\right)\right]\right) = 0 \tag{8.5.50}$$

Dado que por definición $\dot{\Gamma}(t)\,\Gamma(t)$ no es idénticamente nulo, la cantidad J será un invariante exacto para el oscilador de frecuencia variable, siempre y cuando la función definida $g(t)$ satisfaga la ecuación diferencial del enunciado

$$\ddot{g}(t) + \omega^2(t)\, g(t) = \frac{1}{g^3(t)} \tag{8.5.51}$$

(b) En el régimen adiabático el primer término de la ecuación diferencial para $g(t)$ es mucho menor que los dos restantes, puesto que al ser la derivada segunda, aplicando la regla de la cadena,

$$\ddot{g} \equiv \frac{d}{dt}(\dot{g}) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\omega}\frac{dg}{d\omega}\right) = \ddot{\omega}\frac{dg}{d\omega} + \dot{\omega}^2\frac{d^2g}{d\omega^2} \tag{8.5.52}$$

ésta tiene la aproximación en función de la variación $\dot{\omega}$ de la frecuencia

$$\ddot{g} \simeq \frac{\dot{\omega}}{T}\frac{dg}{d\omega} + \dot{\omega}^2\frac{d^2g}{d\omega^2} = \dot{\omega}\left(\frac{\omega}{2\pi}\frac{dg}{d\omega} + \dot{\omega}\frac{d^2g}{d\omega^2}\right) \tag{8.5.53}$$

Y por tanto, es proporcional a $\dot{\omega}$, y de orden $\alpha \ll 1$.

Como conclusión entonces, en el régimen adiabático, se satisface directamente

$$\omega^2(t)\, g(t) = \frac{1}{g^3(t)} \tag{8.5.54}$$

con la solución

$$g^2(t) = \frac{1}{\omega(t)} \tag{8.5.55}$$

asumiendo que en este caso además $\dot{g}(t), \ddot{g}(t) \simeq 0$, y por tanto tenemos las aproximaciones derivadas

$$\Gamma(t) = \sqrt{\omega(t)}q \quad , \quad \dot{\Gamma}(t) = \sqrt{\omega(t)}\dot{q} \tag{8.5.56}$$

Retomando entonces al invariante J, vemos que en su versión adiabática se escribe como

$$J = \frac{1}{2}\left[\omega(t)\, q^2 + \frac{1}{\omega(t)}\dot{q}^2\right] \tag{8.5.57}$$

Introduciendo el valor del momento conjugado

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \tag{8.5.58}$$

obtenemos el resultado pedido

$$J = \frac{1}{2}\left[\omega(t)\, q^2 + \frac{1}{m^2\omega(t)}p^2\right] = \frac{E}{m\omega(t)} = \frac{I}{2\pi m} \tag{8.5.59}$$

siendo $I = E/\nu$ la variable de acción del oscilador.

8.5.4. Partícula con rebotes sucesivos sobre el suelo

Una partícula puntual m se deja caer en la superficie terrestre desde una altura h_0, y realiza sucesivos movimientos de rebote al golpear el suelo de forma elástica. Deduzca la variación del período del movimiento de la partícula cuando varía lentamente uno de los parámetros del movimiento, que puede seleccionar arbitrariamente, justificando la situación física que lo produce.

• El invariante adiabático del movimiento está dado por la variable de acción

$$I = \oint pdq \tag{8.5.60}$$

y la trayectoria de la partícula en el espacio de fases está dada por la ley de movimiento

$$q = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad , \quad p = mgt \tag{8.5.61}$$

para el movimiento de caída, y

$$q = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad , \quad p = mv_0 - mgt \tag{8.5.62}$$

para el movimiento de subida, donde v_0 es la velocidad del impacto con el suelo dada por la conservación de la energía

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = E = mgh \tag{8.5.63}$$

y h es la altura máxima alcanzada, que podrá variar lentamente con la variación adiabática del parámetro considerado.

• Aplicando esta ley de movimiento, obtenemos I en la forma

$$I = 2\int_0^{T/2} mgt \cdot gtdt \tag{8.5.64}$$

siendo $T/2$ el semiperiodo del movimiento, dado por ejemplo, para el movimiento de caída,

$$q\left(\frac{T}{2}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad T = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{8.5.65}$$

Con esto, obtenemos la expresión del invariante adiabático

$$I = \frac{1}{12}mg^2T^3 = \frac{2}{3}E \cdot T = \text{cte} \tag{8.5.66}$$

en función del periodo T y la energía mecánica E del movimiento, dada por

$$E = mgh \tag{8.5.67}$$

Ó podríamos obtener el mismo resultado con un modo más directo en la integración. Dado que tenemos un movimiento periódico, es conveniente trasladar la integración espacial a una integración temporal sobre el periodo T del movimiento, en la forma

$$I = \oint pdq \equiv \int_0^T p\dot{q}dt = \int_0^T \frac{p^2}{m}dt \tag{8.5.68}$$

Dado además que $p^2 = 2m(E - V(q))$ tenemos

$$I = \int_0^T (2E - 2V(q))dt = 2ET - 2\int_0^T V(q)dt \tag{8.5.69}$$

Introduciendo aquí el valor medio del potencial sobre cada período, definido en la forma

$$\langle V \rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T V(q)dt \tag{8.5.70}$$

tenemos

$$I = 2(E - \langle V \rangle)T \tag{8.5.71}$$

y haciendo uso del teorema del virial, que da lugar a

$$E = \frac{n+2}{2}\langle V\rangle \tag{8.5.72}$$

siendo n el grado de homogeneidad del potencial, en este caso $n = 1$, obtenemos finalmente

$$I = \frac{2n}{n+2}ET = \frac{2}{3}ET \tag{8.5.73}$$

• Queda entonces elegir el parámetro cuya variación pueda considerarse adiabática. El más sencillo de interpretar físicamente sería un cambio adiabático en la masa de la partícula, por ejemplo, si se evaporase o condensase un vapor en su movimiento, o si perdiera o ganase masa al chocar con el suelo. En este caso, de la invariancia de I se obtendría la relación entre la variación de masa y la variación del periodo del movimiento:

$$mgh \cdot T = \text{cte} \tag{8.5.74}$$

No obstante, tenemos una variable más que debe ser analizada, la altura máxima de la trayectoria. Por ejemplo, si suponemos que la masa varía de forma adiabática sólo en la posición más alta de la trayectoria, en cada rebote se alcanzaría una altura constante, e igual a su valor inicial h_0, por lo que directamente tendríamos

$$I(t) = \frac{4}{3}m(t)gh_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \tag{8.5.75}$$

esto es, el invariante I tendría un valor exacto en cada instante del tiempo t. En este caso, aunque la masa $m(t)$ pueda tener una variación lenta, no afecta a la dinámica de la partícula puntual, y por tanto no actúa como un parámetro externo dependiente del tiempo que determine una aproximación adiabática al movimiento.
• En un ejemplo más complicado, la masa podría variar en toda la trayectoria, como sería el caso de la evaporación, y la altura máxima ya no sería una constante. Obtenemos entonces

$$T = \frac{\text{cte}}{mh} \tag{8.5.76}$$

Para avanzar tendríamos que apoyarnos entonces en la ecuación de movimiento para una masa variable

$$\frac{d}{dt}(mv) = -mg \quad , \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{dm}{dt}\frac{d}{dm} \tag{8.5.77}$$

aplicando la regla de la cadena, de forma que

$$\frac{dm}{dt}\frac{d}{dm}(mv) = -mg \tag{8.5.78}$$

Considerando, por ejemplo, que el proceso de evaporación se produce en la superficie de la partícula, y por tanto $\frac{dm}{dt}$ es proporcional al área L^2 de la superficie, al ser $m = \rho V, V \propto L^3, V^{2/3} \propto L^2 \implies L^2 \propto m^{2/3}$, tenemos

$$\frac{dm}{dt} = -Km^{2/3} \tag{8.5.79}$$

donde el signo negativo neto refleja la disminución de la masa en el tiempo, debido a la evaporación. Integrando entonces la ecuación de movimiento con este perfil de variación de la masa, obtendríamos una solución de la forma $v = v(m(t))$, y con una nueva integración, una ley de movimiento en la forma $q = q(m(t))$. Y aplicando entonces la condición $v = 0$, para $q = h$, obtendríamos la dependencia de la altura máxima con la masa en ese instante, digamos $h = h(m(t))$, y por tanto deduciríamos que la relación entre el periodo y la masa variable está dada por la fórmula

$$T = \frac{\text{cte}}{m \cdot h(m)} \tag{8.5.80}$$

8.5.5. Péndulo doble con masa móvil

Considere de nuevo el péndulo doble del ejercicio 5.7.9, en el que por un defecto de fabricación del péndulo, la masa M no permanece fija en la varilla, sino que desliza lentamente hacia abajo a lo largo de la misma. Determine en este caso cuál es la amplitud angular de oscilación de este péndulo doble cuando la distancia de la masa M al punto fijo O se ha duplicado, esto es, vale $2R$.
Nota: Aunque no es imprescindible, puede realizar el cálculo utilizando la aproximación de ángulos de giro pequeños.

• Por simplicidad consideramos desde un principio la aproximación de ángulos pequeños. En tal caso el movimiento del sistema de masas es un movimiento armónico simple (MAS), con una frecuencia por determinar. Una vez establecido el movimiento inicial del péndulo, con amplitud angular θ_0, la posición de la masa M va variando lentamente, con lo que es aplicable la invariancia adiabática de la variable de acción.

Para un MAS, con energía

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad \Longrightarrow \quad 1 = \frac{q^2}{2E/m\omega^2} + \frac{p^2}{2mE} \tag{8.5.81}$$

donde la expresión de la derecha corresponde a la trayectoria elíptica en el espacio de fases de semiejes $a = \sqrt{2E/m\omega^2}$ y $b = \sqrt{2mE}$ respectivamente, la acción tiene la expresión genérica

$$I = \oint pdq = \pi ab = \pi\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sqrt{2mE} = 2\pi\frac{E}{\omega} \tag{8.5.82}$$

y la aproximación adiabática establece que bajo una variación suficientemente lenta de los parámetros,

$$I \approx \text{cte} \quad \Longrightarrow \quad \frac{E}{\omega} \approx \text{cte} \tag{8.5.83}$$

Como parámetros podríamos considerar para este péndulo doble las masas, las longitudes y la gravedad.

• Por tanto, para resolver el problema debemos determinar primero la energía del sistema y su frecuencia, en función de los parámetros, para posteriormente fijar el parámetro que varía lentamente de forma externa, y obtener, aplicando la aproximación adiabática, la variación resultante del otro parámetro de interés.

Determinación de la energía Para una amplitud angular θ_0, el valor de la energía está dado por

$$E\left(= \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2\right) \equiv \frac{1}{2}I_O\omega^2\theta_0^2 \tag{8.5.84}$$

siendo I_O el momento de inercia del sistema respecto al punto de suspensión, dado por

$$I_O = mr^2 + MR^2 \tag{8.5.85}$$

Determinación de ω La forma más sencilla de obtener la frecuencia es aplicar la fórmula general (el denominado método funcional)

$$\omega^2 \equiv \frac{|F(x)|}{mx} = \frac{|M(\theta)|}{m\theta} \tag{8.5.86}$$

donde el primer término corresponde a un movimiento lineal, siendo $F(x)$ la fuerza ejercida cuando el sistema se desplaza una distancia x respecto de su punto de equilibrio, y el segundo término

corresponde a un movimiento angular, siendo $M(\theta)$ el momento de fuerzas ejercido cuando el sistema se desplaza una distancia angular θ.
Para aplicar esta expresión, definimos en primer lugar el punto de equilibrio estable. Como sugiere la representación de la figura del enunciado (ejercicio 5.7.9), corresponde a $\theta = 0$, con la masa M en el punto más inferior y la masa m en el punto superior. En este caso, desplazando el sistema un ángulo θ el momento de fuerzas ejercido por la gravedad es

$$M(\theta) = -MgR\,\mathrm{sen}\,\theta + mgr\,\mathrm{sen}\,\theta \approx -\left(MR - mr\right)g\theta \quad \Longrightarrow \quad |M(\theta)| = \left(MR - mr\right)g\theta \tag{8.5.87}$$

Con esto, la frecuencia del sistema está dada por

$$\omega^2 = \frac{\left(MR - mr\right)g\theta}{I_O\theta} = g\frac{MR - mr}{MR^2 + mr^2} \tag{8.5.88}$$

Invariante adiabático Utilizando los resultados obtenidos, el invariante adiabático está dado por

$$I = 2\pi\frac{E}{\omega} = \pi I_O\omega\theta_0^2 = \pi\sqrt{g\left(MR - mr\right)\left(MR^2 + mr^2\right)}\theta_0^2 \approx \text{cte} \tag{8.5.89}$$

Variación de la amplitud angular Si R', θ_0' son los valores de la distancia radial y de la amplitud angular tras la variación lenta del parámetro R, de la invariancia anterior se deduce que se satisface

$$\pi\sqrt{g\left(MR - mr\right)\left(MR^2 + mr^2\right)}\theta_0^2 = \pi\sqrt{g\left(MR' - mr\right)\left(MR'^2 + mr^2\right)}\theta_0'^2 \tag{8.5.90}$$

En particular si $R' = 2R$, el valor de la nueva amplitud angular, tras ese lapso de tiempo, será

$$\theta_0' = \left(\frac{MR - mr}{2MR - mr}\cdot\frac{MR^2 + mr^2}{4MR^2 + mr^2}\right)^{1/4}\theta_0 < \theta_0 \tag{8.5.91}$$

Esto es, a medida que va bajando la masa M decrece la amplitud angular del movimiento oscilatorio.

8.5.6. Partícula entre paredes impenetrables bajo acción externa

Una partícula puntual de masa m se mueve en una dimensión con velocidad v en el interior de dos paredes impenetrables, separadas una distancia L, sobre las que colisiona elásticamente. En una de las paredes se coloca un pistón que, mediante una acción externa, mueve dicha pared durante el movimiento de la partícula. Determine el cambio que se produce en el volumen del espacio de fases de la partícula cuando

(a) El pistón se mueve de forma continua, y con lentitud suficiente.

(b) El pistón se mueve a saltos, de forma rápida y discontinua, entre dos colisiones sucesivas de la partícula.

¿Cómo podrían distinguirse experimentalmente estos dos casos si no pudiera determinarse con precisión la velocidad de movimiento del pistón?

• Para el movimiento periódico de la partícula entre las dos paredes impenetrables, la variable de acción está dada por

$$I = \oint p\,dx = 2mvL \tag{8.5.92}$$

siendo v la velocidad de la partícula, y L la distancia entre las paredes. La variable de acción es un invariante y coindice con el volumen acotado por la trayectoria de la partícula en el espacio de fases. Por tanto, el estudio del cambio de volumen equivale al estudio de la constancia de la

variable de accion.

(a) En el primer caso, si el pistón se mueve de forma continua y con velocidad suficientemente lenta, nos encontramos en el régimen adiabático, donde la variable de accion es aproximadamente constante durante el movimiento, y por tanto no hay cambio de volumen en el espacio de fases. Matemáticamente

$$\Delta(I) = 0 \quad , \quad \Delta(vL) = 0 \quad \Longrightarrow \quad vL = \text{cte} \tag{8.5.93}$$

Introduciendo el intervalo temporal Δt en un periodo del movimiento, definido por

$$\Delta t = \frac{2L}{v} \tag{8.5.94}$$

la condición anterior equivale a

$$v^2 \Delta t = \text{cte} \tag{8.5.95}$$

(b) En el segundo caso, cuando el pistón se mueve de forma discontinua, entre dos colisiones sucesivas de la partícula con esta pared, la variable de acción no se conserva durante el movimiento. Pueden establecerse distintos modelos para representar físicamente la situación. Por ejemplo, podemos considerar que la partícula colisiona con el pistón cuando éste está en movimiento, o todo lo contrario, que la partícula siempre colisiona cuando el pistón ha dejado de moverse, o un modelo intermedio de colisiones con pistón movil y fijo de forma alternada. Cualquiera de ellos es igualmente válido, ya que el enunciado es general y no proporciona ningún detalle.
De cualquier modo, la modificacion de la acción resulta ser

$$\frac{1}{I}\frac{dI}{dt} \equiv \frac{1}{I}\frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{\dot{L}}{L}\Delta\left(\Delta t\right) \tag{8.5.96}$$

siendo $\dot{L}$ la velocidad del pistón y

$$\Delta\left(\Delta t\right) \equiv \Delta t - \Delta t_p \tag{8.5.97}$$

la diferencia entre el intervalo de tiempo necesario para que la partícula realice un periodo completo de movimiento y el intervalo de tiempo característico de oscilación del propio pistón, Δt_p. Fisicamente expresa el hecho de que la velocidad de la partícula se mantiene aproximadamente constante, y el volumen del espacio de fases cambia sólo debido a la modificación (discontinua) de la distancia entre las paredes en el tiempo efectivo $\Delta\left(\Delta t\right)$.

• Dado que la ecuación anterior se puede escribir, teniendo en cuenta la expresión para I,

$$\frac{\Delta\left(v^2\Delta t\right)}{\Delta t \cdot v^2 \Delta t} = -\frac{\dot{L}}{L}\Delta\left(\Delta t\right) \tag{8.5.98}$$

se deduce que los dos casos (movimiento continuo o movimiento discontinuo) podrian distinguirse experimentalmente siguiendo la evolución en el tiempo de la cantidad $v^2\Delta t$, constante en el primer caso, variable en segundo caso y con una variación proporcional a la velocidad (desconocida) $\dot{L}$ del pistón.

Análisis detallado En el caso de una colisión cuando el pistón está en movimiento, si definimos el periodo del movimiento como el tiempo entre dos colisiones sucesivas de la partícula con el pistón móvil, tenemos

$$\begin{aligned} I_i &= 2mvL \\ I_f &= 2m\left(v_f L_f\right) \end{aligned} \tag{8.5.99}$$

siendo v, L la velocidad y distancia entre las paredes para un primer periodo, y

$$\begin{aligned} v_f &= v - 2\dot{L} \\ L_f &= L + \dot{L}\Delta t_p \end{aligned} \tag{8.5.100}$$

para un segundo período, siendo v_f la velocidad de la partícula tras la colisión con el pistón movil, situado a la distancia L_f de la pared fija. La variación del acción (y por tanto, la variación del volumen en el espacio de fases) al cabo de un periodo completo es

$$\Delta I \equiv I_f - I_i = 2m\left(v_f L_f - vL\right) \approx \left(v\Delta t_p - 2L\right)\dot{L} \tag{8.5.101}$$

y de aquí obtenemos el resultado adelantado anteriormente

$$\frac{\Delta I}{I} = -\frac{\dot{L}}{L}\left(\Delta t - \Delta t_p\right) \tag{8.5.102}$$

Podemos ver además que si el pistón realiza un movimiento continuo, su tiempo característico Δt_p estará acoplado al propio movimiento de la partícula, $\Delta t_p = \Delta t = \frac{2L}{v}$, en cuyo caso se satisface el régimen adiabático, con el resultado

$$\Delta I = 0 \quad \Longrightarrow \quad I = \text{cte} \tag{8.5.103}$$

8.5.7. Partícula cargada en campo magnético uniforme

Una partícula de masa m sometida a un campo magnético uniforme $B = (0, 0, B)$ describe órbitas circulares de radio R, en función del valor de la energía, a la frecuencia de Larmor $\omega = eB/mc$.

(a) Determine el valor de la energía del sistema.

(b) Si se permite una variación lenta del módulo del campo magnético, determine la modificación en la órbita de la partícula.

(c) Demuestre que si la partícula tiene movimiento en la dirección del eje z, y el campo magnético fuera constante en el plano de la órbita, pero creciente en dirección perpendicular al plano de la órbita en ambos sentidos, el movimiento de la partícula sería un movimiento periódico. Para ello, obtenga en primer lugar el Hamiltoniano modificado, y analice si existen en el eje z puntos de retorno del movimiento de la partícula. Interprete físicamente el resultado.

(a) La energía en el plano de la órbita se corresponde con un movimiento circular de radio constante R, y frecuencia de Larmor, y tiene la expresión

$$H = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 = \frac{e^2 B^2 R^2}{2mc^2} \tag{8.5.104}$$

(b) Dado que el movimiento es periódico, y la variación del campo es suficientemente lenta, la evolución del sistema queda descrita por el invariante adiabático

$$I = \oint p dq \tag{8.5.105}$$

siendo p el momento lineal en la órbita, y $q = R\theta$ la longitud de arco sobre la órbita, siendo θ el ángulo recorrido. Encontramos

$$I = 2\pi R p = \frac{2\pi e}{c} B R^2 \tag{8.5.106}$$

y de la constancia de I deducimos la constancia del producto BR^2. Pero hemos visto que H B^2R^2 también es constante del movimiento, por lo que necesariamente tanto B como R deben ser constantes del movimiento por separado. Esto quiere decir que la partícula sólo puede modificar su órbita, pero con el mismo radio, si ésta se mantiene perpendicular a las líneas de campo constante. De esta forma no cambia ni el radio de giro ni el campo magnético.

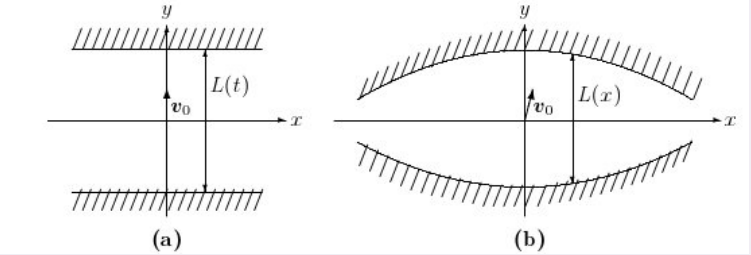
(c) Si la partícula tiene movimiento en la dirección z, perpendicular al plano (x, y) de la órbita, el Hamiltoniano se escribe

$$H = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{e^2 B^2 R^2}{2mc^2} = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{eB}{4\pi mc} I \tag{8.5.107}$$

Dado que $H, I > 0$, y el campo B es creciente, existirá un punto de retorno del movimiento en el eje z, cuando $p_z = 0$. Extendiendo este efecto a ambos lados de la órbita circular, con un campo magnético creciente desde ambos lados del plano de la órbita, la partícula realizará un movimiento periódico en el eje z, de forma que se genere una trampa magnética para la misma.

8.5.8. Partícula en el interior de cavidades especulares

Desarrolle el análisis completo de la dinámica de una partícula libre en el interior de la cavidad bidimensional estática representada en la figura **(b)**, sobre la cual la partícula colisiona elásticamente.



Por comparación se presenta en la figura **(a)** el caso ya analizado en el ejercicio 8.5.1, para el movimiento de una partícula que colisiona elásticamente con dos paredes dispuestas en paralelo y en movimiento relativo. En ambos casos no existe gravedad, y el análisis se realiza de forma adiabática. En particular:

(a) Sea $L(x)$ la distancia de separación de las mismas en función de la coordenada horizontal x. Inicialmente se lanza la partícula desde el origen con una velocidad $\boldsymbol{v}_0$, formando un ángulo arbitrario con el eje x, cercano a $\pi/2$, de forma que la componente en el eje x resulta ser mucho menor que la componente en el eje y

$$v_{0x} \ll v_{0y} \tag{8.5.108}$$

Determine cómo cambia la velocidad de la partícula cuando completa un ciclo de su movimiento, esto es, tras una colisión sucesiva con la pared superior y la pared inferior.

(b) Utilice el resultado obtenido para determinar el invariante adiabático del movimiento. Dado que la forma $L(x)$ de las paredes es arbitraria, deberá expresar el resultado en forma de cuadratura.

(c) ¿Cuál es el otro invariante del movimiento? Haciendo uso de los dos, describa cualitativamente el movimiento. ¿Qué cambio cualitativo supone que la función $L(x)$ sea creciente o decreciente en x?

Introducción En la colisión elástica de la partícula con la pared rígida, la componente de la velocidad en la dirección tangente no cambia, y la componente en la dirección normal cambia de signo. De otra forma, el ángulo incidente medido sobre la normal es igual al ángulo saliente en la colisión. En notación vectorial, en cada colisión elástica se satisface

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - 2\,(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n} \tag{8.5.109}$$

siendo $\boldsymbol{n}$ el vector unitario normal a la pared rígida. Aquí, componente a componente, obtenemos el resultado

$$v_t' \equiv \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{t} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t} \equiv v_t \tag{8.5.110}$$

en la dirección tangente con vector unitario $\boldsymbol{t}$, perpendicular al vector normal, $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{t} = 0$. Y para la componente normal tenemos

$$v'_n \equiv \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{v} - 2\,(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \equiv -v_n \tag{8.5.111}$$

como esperábamos. Tomando ahora las coordenadas cartesianas de referencia, la velocidad que adquiere la partícula en cada colisión satisface

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x - 2\,(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\,n_x \\ v'_y &= v_y - 2\,(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\,n_y \end{aligned} \tag{8.5.112}$$

siendo

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = v_x n_x + v_t n_y \tag{8.5.113}$$

Disposición geométrica Como indica el enunciado, y por simplicidad, tomamos una disposición simétrica de las paredes, de forma que la pared superior queda descrita por la curva $y_s(x) \equiv L(x)/2$, y la pared inferior por la curva $y_i(x) \equiv -L(x)/2$. Sobre la pared superior, los vectores tangente y normal están dados por la expresión vectorial en componentes cartesianas[1]

$$\boldsymbol{t} = \frac{(1, y'_s(x))}{\sqrt{1 + {y'_s}^2(x)}} \quad , \quad \boldsymbol{n} = \frac{(y'_s(x), -1)}{\sqrt{1 + {y'_s}^2(x)}} \tag{8.5.114}$$

y deben ser evaluados en el punto de colisión de coordenadas $(x, y(x))$. De forma análoga en la pared inferior tenemos

$$\boldsymbol{t} = \frac{(1, y'_i(x))}{\sqrt{1 + {y'_i}^2(x)}} \quad , \quad \boldsymbol{n} = \frac{(-y'_i(x), 1)}{\sqrt{1 + {y'_i}^2(x)}} \tag{8.5.115}$$

Dinámica de la colisión Tomando entonces las componentes cartesianas de la velocidad, obtenemos el resultado para la velocidad que adquiere la partícula en cada colisión, en la forma general[2]

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x - 2\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + {y'}^2(x)}}\left(y'(x)v_x - v_y\right) \\ v'_y &= v_y + 2\frac{1}{\sqrt{1 + {y'}^2(x)}}\left(y'(x)v_x - v_y\right) \end{aligned} \tag{8.5.116}$$

De este resultado general, debe obtenerse el resultado que corresponde a la aproximación del movimiento inicial de la partícula.

Resolución (a) Al ser la velocidad en el eje x mucho menor que la velocidad en el eje y, dado que inicialmente tenemos $v_{0x} \ll v_{0y}$, se satisface en todo momento

$$v_x y' - v_y \approx -v_y \tag{8.5.117}$$

y además, debemos aplicar la consideración puramente geométrica

$$y' \ll 1 \tag{8.5.118}$$

ya que por definición estamos limitando el movimiento en la dirección x a la vecindad del eje y, cercana al punto máximo de la curva $y = L(x)$.
Aplicamos entonces estas dos aproximaciones a un ciclo completo del movimiento, que consta de una colisión en la pared superior y una colisión en la pared inferior, y que puede considerarse

[1] El signo $-$ relativo en las componentes del vector normal $\boldsymbol{n}$ está asignado de forma que el vector $\boldsymbol{n}$ esté dirigido efectivamente hacia el interior de la cavidad. Lo mismo es aplicable al elegir la expresión del vector normal sobre la pared inferior.

[2] Podemos comprobar aquí que tenemos el resultado esperado en el caso particular de una pared plana, $y' \equiv 0$, para la cual $v'_x = v_x$ y $v'_y = -v_y$.

también por extensión un ciclo de movimiento en un instante arbitrario. Sea entonces (v_x, v_y) la velocidad inicial de la partícula libre en el inicio de un ciclo (esto es, comienza desde el eje $y = 0$). Tras la colisión en la pared superior, la partícula adquiere la velocidad[1]

$$\begin{aligned} v'_x &\simeq v_x \\ v'_y &\simeq v_y \left(1 - 2\frac{1}{1 + y'^2_s(x)}\right) \simeq v_y \left(-1 + 2y'^2_s(x)\right) \end{aligned} \tag{8.5.119}$$

y tras la colisión posterior en la pared inferior, adquiere la velocidad final

$$\begin{aligned} v''_x &\simeq v'_x \\ v''_y &\simeq v'_y \left(1 - 2\frac{1}{1 + y'^2_i(x)}\right) \simeq v'_y \left(-1 + 2y'^2_i(x)\right) \end{aligned} \tag{8.5.120}$$

y ésta es la velocidad con la que completa el ciclo, y comienza el siguiente ciclo desde el eje $y = 0$. Tomando en consideración las dos colisiones consecutivas, la relación entre la velocidad final, de componentes (v''_x, v''_y), y la velocidad inicial, de componentes (v_x, v_y), es, en el mismo grado de aproximación

$$\begin{aligned} v''_x &\simeq v_x \\ v''_y &\simeq v_y \left(-1 + 2y'^2_s(x)\right)\left(-1 + 2y'^2_i(x)\right) \simeq v_y \left(1 - 2y'^2_s(x) - 2y'^2_i(x)\right) \end{aligned} \tag{8.5.121}$$

Dado que la coordenada x varía muy lentamente en cada ciclo, por ser la velocidad v_x muy pequeña comparada con la velocidad efectiva de oscilación v_y sobre las dos paredes rígidas, podemos aproximar los valores de la derivada en cada pared, en la forma

$$y'^2_s(x) \simeq y'^2_i(x) \simeq y'^2(x) \tag{8.5.122}$$

siendo x el punto arbitrario de la coordenada x que define la posición promedio de la oscilación vertical del ciclo dado. Teniendo en cuenta la expresión para la coordenada y en la pared superior e inferior

$$y(x) = \pm\frac{L(x)}{2} \tag{8.5.123}$$

obtenemos

$$y'^2(x) = \frac{1}{4}L'^2(x) \tag{8.5.124}$$

y finalmente de aquí obtenemos el cambio de velocidad en un ciclo arbitrario en la forma

$$\begin{aligned} \Delta v_x &\equiv v''_x - v_x = 0 \\ \Delta v_y &\equiv v''_y - v_y = -4y'^2(x)v_y = -L'^2(x)v_y \end{aligned} \tag{8.5.125}$$

(b) En analogía con el ejemplo de las paredes móviles (ejercicio 8.5.1), la ecuación de variación para la velocidad de oscilación[2] v_y, teniendo en cuenta el valor de su incremento Δv_y en cada ciclo, se define en la forma

$$\frac{dv_y}{d\tau} \equiv \frac{\Delta v_y}{\tau} = -\frac{L'^2 v_y}{\tau} \tag{8.5.126}$$

siendo τ es el periodo del movimiento vertical, movimiento que se realiza sobre una distancia total de idea y vuelta $2 \cdot L(x)$, con la velocidad v_y. Por tanto,

$$\tau = \frac{2L}{v_y} \tag{8.5.127}$$

[1] Considerando que la componente de la velocidad v_x es una cantidad infinitesimal frente a v_y, la expresión para v'_x no contiene términos proporcionales a y', ya que resultan ser de segundo orden infinitesimales, e irrelevantes en este caso.

[2] En este punto ya podemos anticipar que la velocidad efectiva de oscilación v_y será función de la coordenada x, de forma que v_y debe definirse como la velocidad promedio del movimiento vertical en la posición x, posición que a su vez, por la aproximación aplicada, varía lentamente en el tiempo.

con lo que la ecuación diferencial para v_y se escribe

$$\frac{dv_y}{d\tau} = -\frac{1}{2}\frac{L'^2 v_y^2}{L} \tag{8.5.128}$$

• Para resolver esta ecuación, y obtener la constante correspondiente que será el invariante adiabático del movimiento, necesitamos relacionar el perfil $L(x)$ con la variable temporal τ. Dicha relación es precisamente la ecuación de movimiento en la dirección x, con velocidad constante v_x. Esto es, la variación de la longitud $L(x)$ de un ciclo al siguiente, es decir durante el tiempo τ, está generada por el propio movimiento de la partícula en esta dirección x:

$$\frac{\Delta L}{\tau} \equiv \frac{dL}{d\tau} \equiv \frac{dL}{dx}\frac{dx}{d\tau} \equiv L'(x)v_x(x) \tag{8.5.129}$$

siendo $v_x(x)$ la velocidad horizontal de la partícula durante el ciclo caracterizado por el valor de la coordenada x. Dicho valor no es un valor independiente, ya que se debe satisfacer la conservación de la energía de la partícula libre, dado que las colisiones son elásticas. Particularizando esta conservación de la energía para un ciclo de movimiento, tenemos

$$E = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) = \text{cte} \equiv \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_0^2 \quad \Longrightarrow \quad v_x^2(x) = \boldsymbol{v}_0^2 - v_y^2(x) \tag{8.5.130}$$

siendo E el valor de la energía, en función de los datos iniciales, y siendo $v_y(x)$ la velocidad efectiva de oscilación en la dirección y durante el ciclo de movimiento caracterizado por el valor de la coordenada x.
• Reuniendo los resultados anteriores, obtenemos la ecuación diferencial para v_y en función de $L(x)$, lo que determina su dependencia funcional $v_y = v_y(x)$, y en analogía con el ejercicio de las paredes móviles:

$$\frac{dv_y}{dL} \equiv \frac{dv_y/d\tau}{dL/d\tau} = -\frac{1}{2}\frac{v_y^2}{\sqrt{\boldsymbol{v}_0^2 - v_y^2}}\frac{L'(x)}{L(x)} \tag{8.5.131}$$

que queda resuelta por cuadraturas en la forma, al ser $dL \equiv L'(x)dx$,

$$\int \frac{\sqrt{\boldsymbol{v}_0^2 - v_y^2}}{v_y^2}dv_y + \frac{1}{2}\int \frac{L'^2(x)}{L(x)}dx = \text{cte} \equiv I \tag{8.5.132}$$

y que es, en función de esta constante, la expresión matemática del invariante adiabático I del movimiento.

(c) Como ya hemos visto previamente, el otro invariante es la energía (cinética) de la partícula libre, que se conserva al producirse únicamente colisiones elásticas con las paredes rígidas curvadas. Los dos invariantes serían entonces

$$E \equiv \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) \quad , \quad I \equiv I\left(x, v_y\right) \tag{8.5.133}$$

La descripción del movimiento sería la siguiente. El invariante adiabático I determina la relación entre la velocidad promedio de oscilación vertical $v_y(x)$ de la partícula y la coordenada promedio x en la que describe el ciclo, y nos permite por ejemplo, determinar el periodo de oscilación vertical de la partícula en cada ciclo

$$\tau(x) \equiv \frac{2L(x)}{v_y(x)} \tag{8.5.134}$$

La otra cantidad invariante, la energía E, gobierna el movimiento de la partícula en la dirección del eje x. En particular, de la ecuación de conservación de la energía

$$E = \frac{1}{2}m\left(v_x(x)^2 + v_y(x)^2\right) = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_0^2 = \text{cte} \quad , \quad v_x(x) \equiv \frac{dx}{d\tau} \tag{8.5.135}$$

obtenemos por derivación (respecto al tiempo τ, no al tiempo t que deja de tener sentido), y como es habitual, la ecuación de movimiento en la dirección del eje x

$$\frac{dE}{d\tau} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(v_y^2(x)\right) \tag{8.5.136}$$

• Por último, teniendo en cuenta la expresión desarrollada de las dos relaciones obtenidas anteriormente

$$\begin{aligned} \frac{dv_y}{dx} &= -\frac{1}{2}\frac{v_y^2}{\sqrt{\boldsymbol{v}_0^2 - v_y^2}}\frac{L'^2(x)}{L(x)} \\ \frac{d^2x}{d\tau^2} &= \frac{1}{2}\frac{v_y^3}{\sqrt{\boldsymbol{v}_0^2 - v_y^2}}\frac{L'^2(x)}{L(x)} \end{aligned} \tag{8.5.137}$$

comprobamos que sea la función $L(x)$ creciente o decreciente, tenemos $L'^2(x) > 0$, y al ser la dirección del movimiento $dx > 0$ por ser $v_{0x} > 0$ arbitrariamente, tenemos $dv_y < 0$, y por tanto la velocidad de oscilación va decreciendo, y con ello la energía de la oscilación vertical, y va aumentando la energía del movimiento horizontal. Como consecuencia, la partícula se ve acelerada en la dirección x, al ser $d^2x/d\tau^2 > 0$. Esta pérdida de velocidad de oscilación vertical está directamente generada con la pérdida de velocidad en la dirección vertical en cada colisión, ya que el vector normal siempre tiene una componente horizontal, salvo cuando $L' = 0$, en cuyo caso, $\Delta v_y \equiv 0$.

8.5.9. Movimiento adiabático en cavidad especular

En relación al ejercicio 8.5.8, desarrolle el análisis completo de la dinámica de una partícula libre en el interior de la cavidad bidimensional estática generada por la curva

$$L(x) = L_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \tag{8.5.138}$$

En particular:

(a) Determine la expresión y el valor del invariante adiabático, considerando las condiciones iniciales del movimiento $v_y \simeq v_0$ para $x = 0$.

(b) Obtenga la velocidad de oscilación vertical $v_y(x)$, y determine la ley de movimiento en la dirección x dentro del régimen adiabático, $v_x \ll v_y$.

(c) Finalmente obtenga la frecuencia de repetición del movimiento en función del tiempo.

(a) De las definiciones dadas

$$I \equiv \int \frac{\sqrt{\boldsymbol{v}_0^2 - v_y^2}}{v_y^2} dv_y + \frac{1}{2}\int \frac{L'^2(x)}{L(x)} dx \quad , \quad L(x) \equiv L_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \tag{8.5.139}$$

obtenemos la integración de la cuadratura de forma directa, con el uso de tablas integrales,

$$I = -\frac{1}{Y} - \tan^{-1} Y + \frac{2L_0}{a}\left(\tanh^{-1} X - X\right) \tag{8.5.140}$$

siendo

$$X \equiv \frac{x}{a} \quad , \quad Y \equiv \frac{v_y}{\sqrt{\boldsymbol{v}_0^2 - v_y^2}} \tag{8.5.141}$$

y aplicando las condiciones iniciales del movimiento, en la forma

$$x = 0 \quad , \quad v_y \simeq v_0 \quad \Longrightarrow \quad X = 0 \quad , \quad Y \to \infty \tag{8.5.142}$$

obtenemos el valor del invariante adiabático:

$$I = -\tan^{-1}\infty = -\frac{\pi}{2} \tag{8.5.143}$$

(b) Partimos para ello de la expresión general de la ecuación del movimiento en la dirección x

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\frac{v_y^3}{\sqrt{\boldsymbol{v}_0^2 - v_y^2}}\frac{L'^2(x)}{L(x)} \tag{8.5.144}$$

que, en función de las variables (X, Y) definidas anteriormente, se escribe

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} = \frac{2L_0v_0^2}{a^2}\frac{X^2Y^2}{(1-X^2)\,(1+Y^2)} \tag{8.5.145}$$

que puede resolverse (al menos numéricamente) aplicando la relación $Y = Y(X)$ que se deduce (también numéricamente) del invariante adiabático I.
Resolución aproximada Aplicamos para ello la aproximación infinitesimal $x \ll a$ para la coordenada x, correspondiente al régimen adiabático $v_x \ll v_y$, y que da lugar a los límites $X \to 0$ y $Y \to \infty$, y las aproximaciones adicionales

$$\tanh^{-1} X \simeq X + \frac{X^3}{3} \quad \Longrightarrow \quad \tanh^{-1} X - X \simeq \frac{X^3}{3} \tag{8.5.146}$$

y

$$\tan^{-1} Y \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{Y} + \frac{Y^3}{3} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{Y} - \tan^{-1} Y \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{Y^3}{3} \tag{8.5.147}$$

Introduciendo estos desarrollos en la expresión del invariante adiabático del movimiento, obtenemos la relación funcional para $Y(X)$

$$\frac{Y^3}{3} = \frac{2L_0}{a}\frac{X^3}{3} \tag{8.5.148}$$

con el resultado consiguiente para $v_y(x)$

$$v_y(x) = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \beta^2\frac{x^2}{a^2}}} \tag{8.5.149}$$

siendo $\beta \equiv (2L_0/a)^{1/3}$.

(c) En esta aproximación la ecuación de movimiento tiene la expresión

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} \equiv \frac{1}{2}\frac{d\dot{x}^2}{dx} \simeq \frac{v_0^2\beta^2}{a^2}x \tag{8.5.150}$$

Aplicando entonces las condiciones iniciales para el movimiento en la dirección x

$$\tau = 0 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad \dot{x} = v_{0x} \tag{8.5.151}$$

obtenemos por integracion directa, en la misma aproximación

$$x(\tau) \simeq v_{0x}\tau\left(1 + \frac{1}{6}\frac{v_0^2\beta^2}{a^2}\tau^2\right) \tag{8.5.152}$$

representando el segundo término el movimiento acelerado de la partícula en la dirección x.
Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\tau(x) \equiv \frac{2L(x)}{v_y(x)} \tag{8.5.153}$$

es el periodo de oscilación vertical cuando la partícula se sitúa en un entorno de la coordenada horizontal x, la frecuencia de oscilación vertical tiene la expresión, en esta aproximación

$$\nu(x) \equiv \frac{1}{\tau(x)} \simeq \frac{v_0}{2L_0}\left(1 - \left(\frac{\beta^2}{2} - 1\right)\frac{x^2}{a^2}\right) \tag{8.5.154}$$

y por tanto es dependiente del tiempo τ, en este orden de aproximación, en la forma

$$\nu(x) \equiv \frac{1}{\tau(x)} \simeq \frac{v_0}{2L_0}\left(1 - \left(\frac{\beta^2}{2} - 1\right)\frac{v_{0x}^2\tau^2}{a^2}\right) \tag{8.5.155}$$

8.6. Ejercicios resueltos adicionales-pendiente

8.6.1. Partícula perturbada en colisión con paredes fijas. Masa variable

Una partícula de masa $m(t)$ variable se mueve en el eje x entre dos paredes impenetrables situadas en $x = \pm\frac{L}{2}$, sobre las que colisiona elásticamente, realizando un movimiento periódico. El Hamiltoniano está dada por la expresión equivalente al movimiento libre con masa variable

$$H = \frac{p^2}{2m(t)} \tag{8.6.1}$$

Considere que la variación de la masa $m(t)$ es debido a una acción externa, y que es independiente del movimiento de la partícula. Considere además que dicho movimiento se mantiene periódico en todo momento, esto es, la partícula de masa variable colisiona de forma elástica con las dos paredes impenetrables.

(a) Determine el invariante adiabático del sistema para una variación suficientemente lenta de la masa $m(t)$.

(b) Analice, utilizando el invariante adiabático, cómo cambia en el tiempo la energía de la partícula.

(c) Analice finalmente qué trabajo se realiza, y de qué forma, que justifique el cambio en la energía obtenida en el apartado anterior.

8.6.2. Partícula perturbada en colisión con paredes fijas. Efecto cinético

Una partícula de masa unitaria se mueve en el eje x entre dos paredes impenetrables situadas en $x = \pm\frac{L}{2}$, sobre las que colisiona elásticamente, realizando un movimiento periódico. El Hamiltoniano está dado por la expresión modificada respecto al valor libre

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \lambda(t)p^4 \tag{8.6.2}$$

siendo λ una función arbitraria del tiempo, debido a una acción externa, y que es independiente del movimiento de la partícula. Considere que el movimiento se mantiene periódico en todo momento, esto es, la partícula colisiona de forma elástica con las dos paredes impenetrables.

(a) Determine el invariante adiabático del sistema para una variación suficientemente lenta de la acción externa $\lambda(t)$.

(b) Analice, utilizando el invariante adiabático, cómo cambia en el tiempo la energía de la partícula.

(c) Analice finalmente qué trabajo se realiza, y de qué forma, que justifique el cambio en la energía obtenida en el apartado anterior.

8.6.3. Partícula perturbada en colisión con paredes fijas. Efecto potencial

Una partícula de masa unitaria se mueve en el eje x entre dos paredes impenetrables situadas en $x = \pm\frac{L}{2}$, sobre las que colisiona elásticamente, realizando un movimiento periódico. El Hamiltoniano está dado por la expresión modificada respecto al valor libre

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \lambda(t)x^2 \tag{8.6.3}$$

siendo λ una función arbitraria del tiempo, debido a una acción externa, y que es independiente del movimiento de la partícula. Considere que inicialmente el movimiento se mantiene periódico, esto es, la partícula colisiona de forma elástica con las dos paredes impenetrables, pero que a medida que avanza el tiempo el efecto del potencial va a limitar la amplitud del movimiento...seguir aqui..

(a) Determine el invariante adiabático del sistema para una variación suficientemente lenta de la acción externa $\lambda(t)$.

(b) Analice, utilizando el invariante adiabático, cómo cambia en el tiempo la energía de la partícula.

(c) Analice finalmente qué trabajo se realiza, y de qué forma, que justifique el cambio en la energía obtenida en el apartado anterior.

8.6.4. Partícula en el interior de un pozo de potencial unidimensional perturbado

Una partícula de masa unitaria se mueve en el interior de un pozo de potencial unidimensional, dependiente del tiempo, dado por la expresión

$$V(x,t) = \frac{x^2}{2} + a(t)e^{-\alpha x^2/2} \tag{8.6.4}$$

donde $a(t)$ es el parámetro dependiente del tiempo que determina la intensidad de la perturbación del pozo, definida por el término $e^{-\alpha x^2/2}$. Considere que en todo caso la partícula en su movimiento, colisiona elásticamente con las paredes del pozo, realizando ciclos periódico. El Hamiltoniano está dado por la expresión correspondiente

$$H = \frac{1}{2}p^2 + V(x,t) \tag{8.6.5}$$

Considere que inicialmente el movimiento comienza con el perfil no perturbado, correspondiente al valor $a(0) = 0$, y que la función $a(t)$ varía con el tiempo de forma suficientemente lenta, desde este valor inicial, y es creciente en t en todo momento.

• Utilizando el concepto de invariante adiabático determine el valor de la energía de la partícula en función del tiempo, en los tres casos siguientes:

(a) En los tiempos iniciales, cuando el propio valor de $a(t)$ es suficientemente pequeño.

(b) En los tiempos intermedios, cuando la perturbación empieza a ser significativa, pero no tanto como para generar un cambio en los puntos de retorno del movimiento periódico.

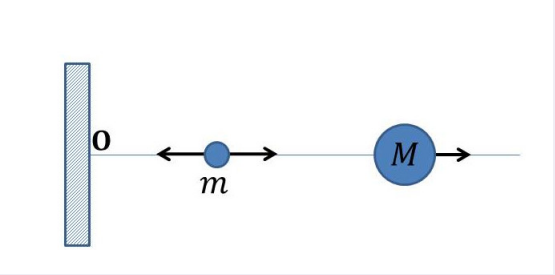
(c) En los tiempos finales, cuando la perturbación es tan relevante como para generar un cambio en la localización de uno de los puntos de retorno del movimiento periódico.

8.7. Autoevaluación

Ejercicios

8.7.1. Invariante adiabático para la colisión elástica de dos masas (R)

Dos partículas de masas m y M, con $m \ll M$ se mueven a lo largo de la línea recta de la figura



Las colisiones entre las dos masas y entre la pared (el punto O) y la masa m son elásticas. Asumiendo que la velocidad de la partícula ligera es mucho mayor que la velocidad de la partícula pesada, determinar el movimiento de ésta última promediado sobre un periodo del movimiento de la partícula ligera.
Nota: se necesitarán los resultados del ejercicio (8.5.1).

8.7.2. Péndulo simple con longitud de variación lenta (R)

Considere un péndulo en un plano vertical que realiza pequeñas oscilaciones respecto a su punto de equilibrio, y cuya longitud l se reduce de forma adiabática, tirando desde su punto de suspensión, y por tanto incrementando la tensión del hilo.

Determine en el régimen adiabático cuál es el promedio de la tensión en una oscilación, deduzca el trabajo realizado durante este proceso y verifique que dicho trabajo conlleva una variación de la energía del péndulo, de forma que se mantiene constante un invariante adiabático, por determinar. Verifique que este invariante está en correspondencia con el resultado general para un oscilador armónico con una frecuencia variable en el tiempo.

8.7.3. Partícula con variación lenta de masa (R)

Una partícula de masa m realiza un movimiento vertical bajo el efecto de la gravedad, rebotando de forma elástica con el suelo horizontal fijo. Describa de forma cualitativa cómo se modifica su movimiento vertical, aplicando la aproximación adiabática, cuando la masa de la partícula varía de forma suficientemente lenta (por ejemplo por la adherencia o pérdida de material en cada colisión).

8.7.4. Partícula en campo magnético (R)

• Sea una partícula libre que por acción de un campo magnético constante adquiere un movimiento circular con velocidad constante. Para este problema tenemos la conservación de la energía

$$H = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_0^2}{2m} \equiv E \tag{8.7.1}$$

y el radio de la órbita satisface

$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{p}{m\omega} \tag{8.7.2}$$

siendo ω la frecuencia ciclotrón

$$\omega_B = \frac{eB}{mc} \tag{8.7.3}$$

Analice la dinámica del sistema cuando el campo magnético varía en el tiempo de forma suficientemente lenta.

En este caso el campo no aparece en la definición del Hamiltoniano aunque sí influye de forma indirecta en la energía del sistema, como vemos a continuación. La aproximación adiabática consiste en asumir que la variación del campo será lo suficientemente lenta para que la trayectoria se mantenga aproximadamente circular, con un radio variable $R(t)$, que estará dado por la condición de equilibrio en la dirección radial. Dicha condición nos lleva a $R(t) = \frac{p}{m\omega(t)}$, siendo $\omega(t) = \frac{eB(t)}{mc}$. Aquí ya no podremos aplicar que el momento p sea constante, ya que la propia modificación de la trayectoria, aunque se mantenga circular exige que el momento haya cambiado. Aplicamos entonces la invariancia de la acción, definida en la forma

$$I = \oint p ds \tag{8.7.4}$$

siendo s la coordenada a lo largo de la circunferencia. Dado que $p = mv = mds/dt$ tenemos también

$$I = \oint p\frac{p}{m}dt = \oint \frac{p^2}{m}dt = 2E\oint dt = 2ET \tag{8.7.5}$$

siendo $T = 2\pi/\omega$ el periodo de rotación. Obtenemos por tanto el invariante adiabático

$$\frac{E(t)}{\omega(t)} \approx \text{cte} \tag{8.7.6}$$

Introduciendo el valor de la energía en función del momento, obtenemos la relación adiabática entre el radio de la órbita y el campo aplicado

$$R^2\omega \approx \text{cte} \tag{8.7.7}$$

relación que se corresponde también con el momento angular (aproximadamente constante) en la dirección del campo

$$L = mvR \approx \text{cte} \tag{8.7.8}$$

Cuestionarios en línea

8.7.5. Invariantes adiabáticos

- Enlace al cuestionario

8.8. Apéndice A. Integración numérica en cavidad especular

Una cavidad especular puede considerarse un tipo de billar bidimensional (véase el apéndice 6.11) que puede estar dotado de un orificio de entrada y/o de salida. Describimos en este apéndice cómo puede realizarse la descripción Hamiltoniana continua de un billar bidimensional genérico, que no es trivial, dado que idealmente sus paredes son impenetrables y el Hamiltoniano sólo queda definido en las trayectorias rectilineas entre colisiones. La alternativa a esta descripción continua es centrar el estudio del billar únicamente en las sucesivas colisiones discretas sobre la frontera, asumiendo que en el interior las trayectorias de la partícula, entre una y otra colisión, son rectílineas. La preferencia por una vía u otra, continua o discreta, dependerá de lo sencillo que sea interpretar en términos geométricos la transición de una colisión a la siguiente. Esto es, de forma resumida, si la geometría de la frontera del billar es matemáticamente sencilla o no.

Construcción del potencial continuo $V(x,y)$ Desde un punto de vista Hamiltoniano se introduce un potencial continuo, digamos $V(x,y)$, en el interior y la frontera del billar, y cuyas lineas de isopotencial correspondan a la frontera geométrica que limita el billar. Tomando como ejemplo la cavidad simétrica del ejercicio 8.5.8, el potencial V debe ser dependiente de la variable

$$Q(x,y) \equiv L(x)^2 - y^2 \quad , \quad V \equiv V(Q) \tag{8.8.1}$$

de forma que las paredes de la cavidad, localizadas en $y(x) = \pm L(x)$, tengan el valor constante $Q = 0$ de la coordenada Q, y por tanto tengan un potencial constante $V(0)$. Además, ya que las fronteras son impenetrables, el potencial debe ser formalmente infinito en el límite $Q \to 0$. Matemáticamente para ello puede elegirse cualquier función de Q que tenga este límite, por ejemplo,

$$V(Q) = \frac{A}{Q} \tag{8.8.2}$$

siendo A una constante.
Una vez localizadas dinámicamente, y de forma suave, las fronteras del billar, el potencial debe ser despreciablemente pequeño en el interior de la frontera, ya que la partícula es libre, lo que se consigue añadiendo un parámetro infinitesimal $\epsilon \to 0$, de forma que el potencial efectivo esté definido en la forma

$$V_{ef}(x,y) = \epsilon V(x,y) = \epsilon \frac{A}{Q(x,y)} \quad , \quad Q(x,y) \equiv L(x)^2 - y^2 + \delta(\epsilon) \tag{8.8.3}$$

Aquí, para evitar singularidades es conveniente definir e introducir el espesor de la capa adyacente a las paredes, definido por $\delta(\epsilon) \neq 0$, ajustando la relación entre δ y ϵ para una buena convergencia de trayectoria numérica.

Ecuaciones del movimiento Sólo nos queda entonces definir el Hamiltoniano en el interior y la frontera del billar en la forma

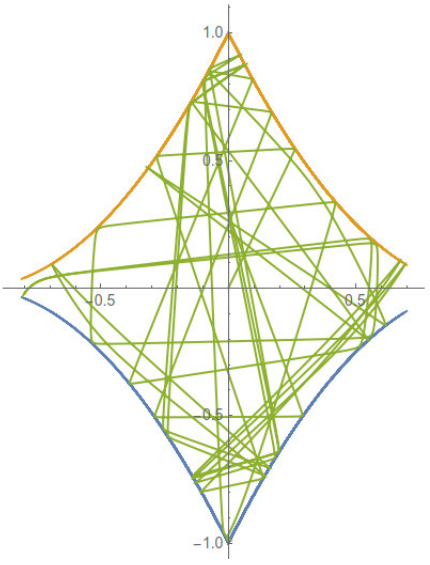
$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \epsilon V(x,y) \tag{8.8.4}$$

y resolver la dinámica de la partícula confinada con las ecuaciones de movimiento (que se deducen de las ecuaciones de Hamilton del sistema). En particular, las ecuaciones de movimiento para las coordenadas (x,y) de la partícula en el interior del billar están dadas por

$$\ddot{x} = 2\epsilon A \frac{L'(x)L(x)}{Q(x,y)^2} \quad , \quad \ddot{y} = -2\epsilon A \frac{y}{Q(x,y)^2} \tag{8.8.5}$$

que pueden resolverse numéricamente de forma sencilla con cualquiera de los métodos estándar.

Ejemplo numérico En la figura adjunta pueden ver la resolución numérica de la trayectoria de una partícula en la cavidad con perfil $L(x) = (1-x)^2$ (resaltado en la figura), para los valores $A = 1$, $\epsilon = 0{,}001$ y $\delta(\epsilon) = \epsilon$, y las condiciones iniciales de posición $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, y velocidad unitaria, con componentes $\dot{x}(0) = \sqrt{0{,}19}$, $\dot{y}(0) = 0{,}9$. Como se puede observar, las trayectorias cerca de las fronteras no son exactamente rectilíneas, por efecto de $\epsilon \neq 0$, mientras que se mantienen rectas en la región interior.



8.9. Apéndice B. Integración numérica en el regimen adiabático

En relación al análisis adiabático de un movimiento, desde el punto de vista de la resolución numérica de las ecuaciones, es interesante evaluar dos aspectos relevantes:

Número de parámetros externos con variación lenta Pueden ver en el ejercicio 8.5.2 cómo que puede aplicar la expresión funcional

$$q(t) = A(t)e^{iS(t)} \tag{8.9.1}$$

siendo S una fase y A una amplitud, para resolver la ecuación del MAS $\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0$, para una frecuencia ω variable, de variación lenta. Como resultado vemos que se conserva la cantidad dinámica

$$A^2\dot{S} = \text{cte} \tag{8.9.2}$$

y a su vez la fase S satisface en el orden de aproximación de una variación lenta

$$\dot{S} = \omega \quad \Longrightarrow \quad S(t) = \int_0^t \omega(\tau)d\tau \tag{8.9.3}$$

Según se explica en ese ejercicio 8.5.2, estas dos condiciones son equivalentes a la aproximación adiabática, dado que, en este caso, el cociente entre energía y frecuencia (esto es, la acción) es precisamente una constante

$$2\pi\frac{E}{\omega} = 2\pi\frac{\frac{1}{2}m\omega^2(t)A^2(t)}{\omega(t)} = \pi m\omega(t)A^2(t) = \text{cte} \tag{8.9.4}$$

Visto este problema modelo, parecería entonces que este método es de aplicación general para cualquier movimiento armónico simple, por ejemplo como el péndulo doble del ejercicio 5.7.9. Pero esto no es cierto.

Resolución matemática La cuestión clave de la diferencia reside en el número de parámetros que sufren la variación. En el problema del péndulo doble, al varíar la distancia R, varían tanto el momento de inercia I_O como la frecuencia de oscilación ω. Y en el ejemplo anterior, varia sólo la frecuencia $\omega(t)$ pero no varía la masa del sistema.
Desde el punto de vista matemático, cuando existen más de un parámetro variable independiente, la condición de variación lenta de la frecuencia no es equivalente a la condición adiabática, dado que la expresión de la energía (y por tanto el Hamiltoniano, del que se deduce la ley adiabática)

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 A^2 \tag{8.9.5}$$

siendo A la amplitud angular, depende de cantidades adicionales, en este caso $I(t)$, cuya variación no está incluida en la variación de la frecuencia. En particular, la ecuación de movimiento para el péndulo físico con parámetros variables resulta ser

$$H = \frac{p^2}{2I} + \frac{1}{2} I\omega^2\theta^2 \quad \Longrightarrow \quad \dot\theta = \frac{p}{I} \quad , \quad \dot p = -I\omega^2\theta \tag{8.9.6}$$

y de aquí

$$\ddot\theta = -\omega^2\theta - \frac{\dot I}{I}\dot\theta \tag{8.9.7}$$

Si ahora adoptamos la solución en amplitud y fase, $\theta(t) = A(t)e^{iS(t)}$, la ecuación de movimiento se desdobla en dos (parte real y parte imaginaria), en la forma

$$\ddot A + \left(\omega^2 - \dot S^2\right) A + \frac{\dot I}{I} A = 0 \quad , \quad 2\dot A\dot S + \ddot S + \frac{\dot I}{I}\dot S A = 0 \tag{8.9.8}$$

En la primera ecuación podemos deducir, de forma análoga al ejercicio citado, que $\dot S \approx \omega$, condición que aplicada a la segunda ecuación nos lleva a la ley de conservación

$$2\dot A\omega + \dot\omega A + \frac{\dot I}{I}\omega A = 0 \quad \Longrightarrow \quad I\omega A^2 = \text{cte} \tag{8.9.9}$$

que corresponde a la invariancia adiabática del oscilador armónico

$$2\pi\frac{E}{\omega} = 2\pi\frac{\frac{1}{2}I\omega^2A^2}{\omega} = \pi I\omega A^2 = \text{cte} \tag{8.9.10}$$

Métodos de integración numérica Aunque la mayoría de los ejercicios propuestos y resueltos tienen una resolución analítica directa, no obstante, hay situaciones en las que tener un buen esquema numérico favorece una comprensión más rápida del problema abordado, generalmente complejo. Uno de estos ejemplos es el análisis adiabático, y por extensión problemas en los que tengamos dos escalas de tiempo bien diferenciadas, una escala lenta y una escala rápida.

- El movimiento oscilatorio es sencillo de interpretar pero numéricamente complicado para integrar, dado que debe asegurarse que se mantiene una amplitud constante. Es obligatorio utilizar una integración numérica con un paso adaptativo, que controle la precisión numérica localmente. Para ello podemos utilizar dos esquemas Runge-Kutta de orden 4 en cada paso, corrigiendo el paso de integración en función del error relativo entre ellos. Con esto podemos integrar fácilmente el movimiento oscilatorio de frecuencia constante.

- El siguiente proceso es el seguimiento del invariante adiabático, que requiere de la simulación del sistema durante muchos periodos, aunque no tantos como para que la frecuencia cambie de forma apreciable. Una vez elegido este intervalo de tiempo de promedio adiabático, podremos confirmar su conservación dejando evolucionar al sistema.

- El siguiente proceso contiene la aplicación del método adaptativo para el pendulo fisico, integrando el sistema Hamiltoniano de dos ecuaciones, analizando el valor de la acción, el valor de la energía y el valor de la frecuencia a lo largo del tiempo. También se puede analizar hasta qué punto los resultados son independientes de la variación temporal elegida para frecuencia y momento de inercia, es decir, si se obtienen los mismos valores finales independientemente de cómo se llegue funcionalmente a ellos desde el mismo estado inicial.

8.10. Videoclases

Tipo	Duración	Contenidos	Enlace
Teoría	60 mn	Secciones 8.1, 8.2, 8.3	S.8.1–8.3
Problemas	60 mn	Problemas secciones 8.4, 8.5	S.8.4, S.8.5
Autoevaluación	15 mn	Problemas 8.7	S.8.7
Otros	45 mn	Apéndices **??**, **??**, **??**	–

Medios continuos y Teoría clásica de campos

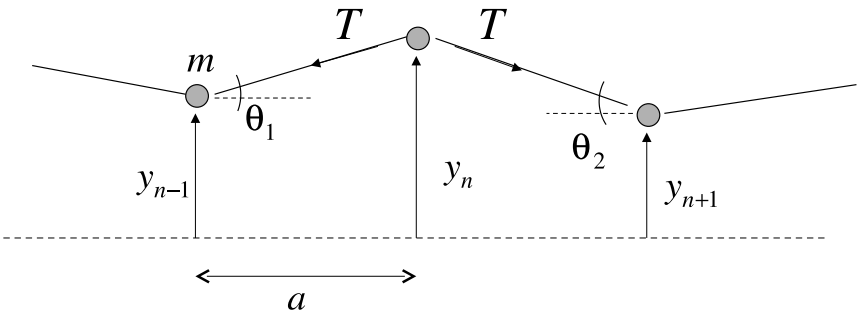
Capítulo 9

Formulación Lagrangiana de los medios continuos

9.1. Límite al continuo

9.1.1. Sistema de masas puntuales

Configuración del sistema Consideremos el ejemplo característico de la figura, una cuerda ligera sin masa que soporta un conjunto de N masas puntuales de masa m e igualmente espaciadas entre sí una distancia a a lo largo de su longitud. Los dos extremos de la cuerda están fijos, su longitud total es $\ell = (N+1)\,a$ y está sometida a una tensión T aproximadamente constante en todos sus puntos.



Ecuación del movimiento Dejando que el sistema evolucione libremente, las masas ejecutan oscilaciones armónicas en la dirección y, la dirección perpendicular a la posición de la cuerda en equilibrio. Determinamos entonces su ecuación de movimiento en el caso discreto de masas puntuales.
Para ello aplicamos la segunda ley de Newton, con ayuda del diagrama de fuerzas de la figura, y obtenemos la ecuación de movimiento en la dirección y para la masa m situada en la posición $n-$ésima, a la distancia na de uno de los extremos, en la forma

$$m\frac{d^2y_n}{dt^2} = -T\,(\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2) = -T\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{a} + \frac{y_n - y_{n+1}}{a}\right) \tag{9.1.1}$$

que despejamos en la forma

$$\frac{d^2y_n}{dt^2} = -\omega_0^2\,(2y_n - y_{n-1} - y_{n+1}) \tag{9.1.2}$$

siendo $\omega_0^2 \equiv T/ma$ una frecuencia de oscilación libre característica del sistema.

Límite al continuo Pasamos ahora a determinar en qué se transforman estas oscilaciones acopladas en el límite continuo, esto es, cuando la distancia a entre las masas se hace muy pequeña, así como la propia magnitud m de cada masa, pero manteniendo la densidad de masa $\rho \equiv m/a$ con un valor constante. Tomando este límite construimos una cuerda continua con masa a partir de un conjunto discreto de masas puntuales.

Como coordenada del sistema debemos tomar la distancia horizontal de un punto de la cuerda al extremo izquierdo, $x = na$, de forma que el elemento de longitud es $dx = a$, y el elemento de masa $m = \rho a = \rho dx$. Asimismo la posición de la masa discreta m en el instante t dada por la función $y_n(t)$, se transforma en el límite continuo en la posición $y(x,t)$ del elemento de masa ρdx.

En el límite continuo, la ecuación de movimiento del sistema se transforma en

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T\left(\frac{y(x,t) - y(x-dx,t)}{dx} + \frac{y(x,t) - y(x+dx,t)}{dx}\right) \tag{9.1.3}$$

Ecuación de ondas Utilizando el concepto de derivada la expresión anterior entre paréntesis resulta ser, a su vez

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} = -\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_x dx \tag{9.1.4}$$

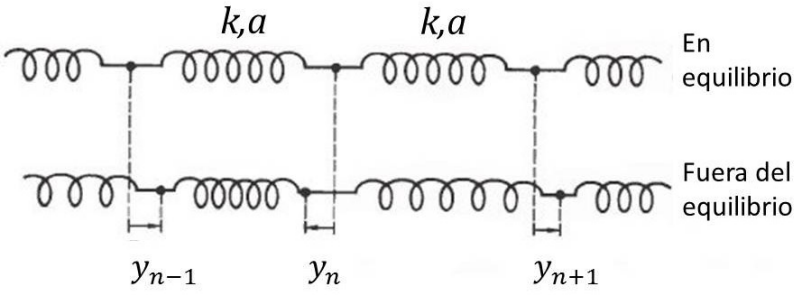
y la ecuación discreta de movimiento se transforma en la ecuación continua de ondas

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{9.1.5}$$

con la velocidad de propagación de la onda $v = \sqrt{T/\rho}$ en la dirección del eje x. En cada punto x, la oscilación transversal según el eje y se realiza de forma armónica, y es la forma de la oscilación la que se propaga en la dirección del eje x.

9.1.2. Oscilaciones longitudinales

Configuración del sistema Analizamos ahora el caso similar de un sistema elástico discreto undimensional de masas puntuales que interaccionan entre sí mediante muelles de constante elástica k, con una dinámica idéntica a la cuerda con masa.



Ecuación del movimiento Según la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento en la dirección horizontal x para la masa m situada en la posición $n-$ésima, a la distancia na de uno de los extremos, es

$$m\frac{d^2 y_n}{dt^2} = -k\left(y_n - y_{n-1}\right) - k\left(y_n - y_{n-1}\right) \tag{9.1.6}$$

siendo y_n el desplazamiento horizontal de la masa $n-$ésima respecto a su posición de equilibrio, que escribimos en la forma

$$\frac{d^2y_n}{dt^2} = -\omega_0^2\left(2y_n - y_{n-1} - y_{n+1}\right) \tag{9.1.7}$$

y donde ahora $\omega_0^2 = k/m$ es una frecuencia de oscilación libre característica del sistema.

Límite al continuo Pasamos ahora a determinar en qué se transforman estas oscilaciones acopladas en el límite continuo, cuando la distancia a entre las masas se hace muy pequeña, así como la propia magnitud m de cada masa, pero manteniendo la densidad de masa, $\rho \equiv m/a$, constante. Esto es, a partir de un conjunto de masas puntuales construimos una cuerpo elástico con masa. Como coordenada del sistema debemos tomamos la distancia horizontal de un punto del cuerpo al extremo izquierdo, $x = na$, de forma que el elemento de longitud es $dx = a$, y el elemento de masa $m = \rho a = \rho dx$. Asimismo la posición de la masa m en el instante t dada por la función $y_n(t)$, se transforma en el límite continuo en la posición $y(x,t)$ del elemento de masa ρdx.

En el límite continuo, la ecuación de movimiento se transforma en

$$\rho dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -k\left(y(x,t) - y(x-dx,t) + y(x,t) - y(x+dx,t)\right) \tag{9.1.8}$$

Ecuación de ondas Y utilizando el concepto de derivada la expresión entre paréntesis resulta

$$\left(\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx}\right)dx = -\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_x (dx)^2 \tag{9.1.9}$$

y con ello la ecuación discreta se transforma en la ecuación continua de ondas

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{9.1.10}$$

donde hemos introducido la fuerza elástica T, que se considera finita, en la forma

$$T \equiv k \cdot dx \tag{9.1.11}$$

En cada punto x, la oscilación longitudinal de cada elemento de masa se realiza de forma armónica, y es la forma de la oscilación la que se propaga en la dirección del eje x, con la velocidad de propagación de la onda $v = \sqrt{T/\rho}$. Debemos notar que este cuerpo elástico queda mal definido en una dimensión, por tener una fuerza dependiente del valor arbitrario de dx. En su versión trimensional, el cuerpo tiene una cierta sección S, y las ecuaciones de movimiento dependen de cantidades definidas correctamente.

9.2. Densidad Lagrangiana

9.2.1. El Lagrangiano de un medio continuo

Formalismo Lagrangiano Analizamos el problema de la cuerda con masas desde el punto de vista Lagrangiano. Para el sistema de partículas puntuales, el Lagrangiano de cada una de ellas será de la forma

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{dy_n}{dt}\right)^2 - U\left(y_n, y_{n-1}, y_{n+1}\right) \tag{9.2.1}$$

donde como hemos visto, la energía potencial de cada masa puntual será función de su posición y de la posición de las dos masas vecinas. Las N ecuaciones de movimiento, correspondientes a las N masas puntuales, se obtienen de las N ecuaciones de Euler−Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_n}\right) = \frac{\partial L}{\partial y_n} \tag{9.2.2}$$

y la única dificultad es la determinación de U. En general, para una cuerda elástica sometida a una tensión constante T

$$U = T \cdot \Delta l \tag{9.2.3}$$

siendo Δl el incremento de longitud respecto a la posición de equilibrio, y sería función de las posiciones y_n, y_{n-1}, y_{n+1}.

Medio continuo. Densidad Lagrangiana Para un medio continuo, el Lagrangiano L se define a partir de la denominada *densidad Lagrangiana*, denotada por $\mathcal{L}$[1] en la forma

$$L \equiv \int \mathcal{L} dx \tag{9.2.4}$$

siendo dx el elemento de longitud, en este caso, del elemento de masa del sistema. La justificación es directa, ya que $L = T - U$, y tanto T como U son magnitudes extensivas, suma de las contribuciones de cada elemento. La densidad Lagrangiana será función de $y(x,t)$ y de sus derivadas, como vemos a continuación.

Energía cinética Para la energía cinética, en el límite continuo tenemos la contribución elemental

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{dy_n}{dt}\right)^2 \to \frac{1}{2} \rho dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \tag{9.2.5}$$

Energía potencial Para la energía potencial, como hemos visto, tenemos la definición $U = T \cdot \Delta l = T(ds - dx)$, donde ds es el elemento de arco de la función $y(x,t)$ que determina el desplazamiento de la cuerda

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \tag{9.2.6}$$

El caso que estamos analizando corresponde a un desplazamiento pequeño de la cuerda desde su posición horizontal de equilibrio. En el sistema discreto, esta aproximación corresponde a una disposición recta, no curvada, de la cuerda entre masas vecinas. Y en el límite continuo, debemos exigir $\partial y/\partial x \ll 1$, y por tanto tenemos el elemento de arco

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \simeq dx \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right) \tag{9.2.7}$$

Con esto, la energía potencial del elemento de masa es

$$U = T(ds - dx) = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \tag{9.2.8}$$

Expresión explícita de $\mathcal{L}$ La contribución neta de la energía cinética y potencial del sistema se obtiene con la integración en x sobre todos los elementos de masa, con lo que el Lagrangiano tiene la expresión

$$L = T - U = \int \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx - \int \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \tag{9.2.9}$$

y la densidad Lagrangiana queda definida como

[1] Es constumbre en física nombrar las densidades por letras caligráficas, y las cantidades absolutas, tras la integración en x, por letras romanas.

$$\mathcal{L}\left(y, y_x, y_t, x, t\right) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \tag{9.2.10}$$

y en general es función de $y(x,t)$ y sus derivadas espacial y_x, y temporal y_t, y del tiempo.

Cuerpo elástico Por la equivalencia con la cuerda con masa, el cuerpo elástico unidimensional tendría la misma densidad Lagrangiana, aunque la expresión de la energía potencial sería distinta. En este caso debemos valorar el límite continuo de la energía potencial elástica de los dos muelles para cada elemento de masa, en la forma

$$U = \frac{1}{2}k\left(y_n - y_{n-1}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(y_n - y_{n+1}\right)^2 \tag{9.2.11}$$

En el límite continuo, estas dos contribuciones dan el mismo valor, por lo que se satisface

$$dU = T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \tag{9.2.12}$$

Al analizar los dos muelles por cada elemento de masa, y posteriormente integrar sobre todos los elementos de masa, estamos considerando dos veces el efecto de cada muelle individual. Por tanto, la energía potencial debe tener un factor $1/2$, y llegamos al resultado análogo a la cuerda con masa

$$U = \frac{1}{2}T\int\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \tag{9.2.13}$$

9.2.2. Ecuaciones de Euler−Lagrange de un medio continuo

Acción estacionaria Determinamos ahora cuál es la ecuación de movimiento para la función $y(x,t)$, que se deduce del principio variacional de acción estacionaria, para la acción definida en la forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \mathcal{L}\left(y, y_x, y_t, t\right) dx dt \tag{9.2.14}$$

para el movimiento del sistema entre los instantes t_1 y t_2. La diferencia fundamental con el caso discreto es que ahora tenemos dos parámetros independientes, la coordenada espacial x y el tiempo t, sobre los que realizar la variación de la función $y(x,t)$, que define la trayectoria de cada elemento de masa del sistema.

Variación de la acción Estudiamos entonces la variación de la acción S, correspondiente a una variación arbitraria de $y(x,t)$. Ya que el tiempo t y la coordenada x no son variables independientes para cada trayectoria, la variación de la acción es directamente

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \delta\mathcal{L}\left(y, y_x, y_t, x, t\right) dx dt \tag{9.2.15}$$

donde

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\delta y_x + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\delta y_t \tag{9.2.16}$$

Además, como x y t no actúan como variables independiente, la derivada temporal y espacial y la variación son operadores intercambiables, y tenemos por tanto

$$\delta y_x = \delta\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\delta y \tag{9.2.17}$$

$$\delta y_t = \delta\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\delta y \tag{9.2.18}$$

y con ello podemos escribir la variación de la acción en la forma

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \frac{\partial}{\partial x} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \frac{\partial}{\partial t} \delta y \right) dxdt \tag{9.2.19}$$

• Integrando por partes el segundo y tercer término, llegamos a

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \right) \right) \delta y dxdt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta y \left(l, t \right) - \delta y \left(0, t \right) \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} dt \\ & + \int_0^l \left(\delta y \left(x, t_2 \right) - \delta y \left(x, t_1 \right) \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} dx \end{aligned} \tag{9.2.20}$$

y teniendo en cuenta que en los límites de integración la variación de la trayectoria debe ser nula, $\delta y = 0$, esto es,

$$\delta y \left(l, t \right) = \delta y \left(0, t \right) = \delta y \left(x, t_2 \right) = \delta y \left(x, t_1 \right) \equiv 0 \tag{9.2.21}$$

para todo t y todo x, obtenemos la variación de la acción en la forma final

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \right) \right) \delta y dxdt \tag{9.2.22}$$

Ecuación de Euler−Lagrange El principio de acción estacionaria establece que dicha variación es cero para la trayectoria real, elegida entre todas las trayectorias compatibles con las condiciones frontera dadas en la forma más general

$$y \left(l, t \right) = f \left(t \right) \quad , \quad y \left(0, t \right) = g \left(t \right) \quad , \quad y \left(x, t_1 \right) = F \left(x \right) \quad , \quad y \left(x, t_2 \right) = G(x) \tag{9.2.23}$$

Dado que se exige $\delta S = 0$, para todo δy arbitrario y compatible, la única solución es que se anule idénticamente el integrando, de forma que la trayectoria real descrita por el sistema satisface la ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \tag{9.2.24}$$

Esta ecuación se reduce a la ecuación de Euler−Lagrange en el caso discreto cuando la coordenada espacial x no es una coordenada independiente del sistema, y el tiempo es la única coordenada independiente que actúa como parámetro del movimiento

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \tag{9.2.25}$$

obteniendo una ecuación de movimiento para cada posición discreta x donde se sitúe un cuerpo puntual con masa del sistema.

Ejemplo. Cuerda con masa Para la densidad Lagrangiana de la cuerda con densidad de masa ρ y tensión T, obtenida anteriormente

$$\mathcal{L} \left(y, y_x, y_t, x, t \right) = \frac{1}{2} \rho y_t^2 - \frac{1}{2} T y_x^2 \tag{9.2.26}$$

comprobamos de nuevo que la ecuación de movimiento es la ecuación de ondas

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad v \equiv \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{9.2.27}$$

9.2.3. El Hamiltoniano de un medio continuo

Densidad de momento La transición al formalismo Hamiltoniano se realiza introduciendo el momento canónico conjugado a la variable dependiente del sistema. En el caso de la cuerda con masa, tenemos

$$\Pi_y(x,t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} = \rho y_t \tag{9.2.28}$$

y al obtenerse a partir de una densidad Lagrangiana, en realidad, es una densidad de momento, momento por unidad de longitud, como puede comprobarse dimensionalmente, de ahí la notación con la letra mayúscula Π.

Densidad Hamiltoniana La densidad Hamiltoniana se define de forma análoga al caso discreto, y obtenemos para la cuerda con masa la expresión

$$\mathcal{H}(\Pi_y, y) \equiv y_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2\rho}\Pi_y^2 + \frac{1}{2}T y_x^2 \tag{9.2.29}$$

Y el Hamiltoniano del sistema sería la integral de esta densidad, y coincidente con la energía total para el sistema anterior,

$$H = \int \mathcal{H} dx = \int \left(\frac{1}{2\rho}\Pi_y^2 + \frac{1}{2}T y_x^2 \right) dx = E \tag{9.2.30}$$

Otras cantidades Sin querer profundizar más en este método Hamiltoniano, destacamos que todos los resultados obtenidos para la Mecánica de partículas puntuales tienen su analogía directa en la Mecánica de los medios continuos, con la substitución del Lagrangiano o Hamiltoniano por su densidad respectiva. Lo mismo sucede con los momentos canónicos, aplicando la integración en la variable espacial x para obtener cantidades absolutas. Como ejemplo más importante de otras cantidades relevantes, analizamos por último los corchetes de Poisson. Dadas dos funciones g, h definidas por la integración en el espacio de dos densidades g, H, su corchete de Poisson en el instante t se define como

$$[g,h] \equiv \int \left(\frac{\delta g}{\delta y}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi_y} - \frac{\delta g}{\delta \Pi_y}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta y} \right) dx \tag{9.2.31}$$

donde las derivadas han sido sustituidas por derivadas funcionales[1]. Con esta definición, las ecuaciones de Hamilton del movimiento son totalmente análogas al caso discreto

$$\frac{\partial y}{\partial t} = [y, \mathcal{H}] \quad , \quad \frac{\partial \Pi_y}{\partial t} = [\Pi_y, \mathcal{H}] \tag{9.2.32}$$

9.3. Teorema de Noether. Cantidades conservadas

9.3.1. El teorema de Noether (sistema discreto, recordatorio)

Véase también la sección 2.2, dedicada al teorema de Noether en su versión discreta (esto es, referida a la dinámica de la partícula puntual), que por completitud resumimos aquí en detalle.

Transformación de simetría Este teorema relaciona las cantidades conservadas del movimiento (energía, momento, momento angular) con el tipo de simetría que se conserva en el sistema. Dada la transformación del tiempo y de la trayectoria de la partícula, definida en la forma

$$t \to t' = t + \delta t \quad , \quad x(t) \to x'(t') \tag{9.3.1}$$

que deja invariante al Lagrangiano, analizamos que consecuencias podemos extraer de esta simetría.

[1] Véase la definición de derivada funcional en la sección 3.4.4.

Variación de la acción La variación de la acción debido a esta transformación es, dado que el Lagrangiano es invariante,

$$\delta S = \int L\left(x', \dot{x}', t'\right) dt' - \int L\left(x, \dot{x}, t\right) dt \tag{9.3.2}$$

• Calculamos la variación del tiempo y la coordenada x por separado. Respecto a la variable de tiempo, tenemos la relación

$$dt' = |\frac{dt'}{dt}|dt = \left(1 + \frac{d\left(\delta t\right)}{dt}\right) dt \tag{9.3.3}$$

Para la variable de configuración $x(t)$, su variación es doble, primero por variar la propia coordenada y segundo por variar su dependencia en el tiempo. Obtenemos entonces

$$\delta x \equiv x'\left(t'\right) - x\left(t\right) = x'\left(t\right) - x\left(t\right) + \frac{dx}{dt}\delta t \equiv \overline{\delta x} + \frac{dx}{dt}\delta t \tag{9.3.4}$$

siendo $\overline{\delta x} = x'\left(t\right) - x\left(t\right)$ la variación de la coordenada x manteniendo fijo el tiempo.

• De forma análoga, la variación del Lagrangiano se compone también de dos partes

$$\delta L = \overline{\delta L} + \frac{dL}{dt}\delta t = \frac{\partial L}{\partial x}\overline{\delta x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta \dot{x}} + \frac{dL}{dt}\delta t \tag{9.3.5}$$

Con todo esto, la variación de la acción tiene el desarrollo

$$\delta S = \int L\frac{d\left(\delta t\right)}{dt}dt + \int \delta L dt = \int L\frac{d\left(\delta t\right)}{dt}dt + \delta t\int \frac{dL}{dt}dt + \int \overline{\delta L}dt \tag{9.3.6}$$

Y de aquí,

$$\delta S = \int \frac{d\left(L\delta t\right)}{dt}dt + \int \left(\frac{\partial L}{\partial x}\overline{\delta x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta \dot{x}}\right) dt \tag{9.3.7}$$

Teorema de Noether De la misma forma que en el principio de acción estacionaria, el operador de derivada temporal puede intercambiarse con el operador de variación a tiempo constante, denotado por $\overline{\delta x}$, por lo que

$$\overline{\delta \dot{x}} = \frac{d}{dt}\overline{\delta x} \tag{9.3.8}$$

con lo cual, podemos escribir el último término en el integrando en la forma, tras una integración por partes,

$$\int \left(\frac{\partial L}{\partial x}\overline{\delta x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta \dot{x}}\right) dt = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta x}\right) dt + \int \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right)\overline{\delta x}dt \tag{9.3.9}$$

y así, la variación de la acción tiene la expresión final

$$\delta S = \int \frac{d\left(L\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta x}\right)}{dt}dt + \int \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right)\overline{\delta x}dt \tag{9.3.10}$$

• Con la condición de que la variación de la acción sea nula y que el movimiento recorra la trayectoria real, esto es, que se satisfagan las ecuaciones de Lagrange, obtenemos el denominado *teorema de Noether*:

Si el Lagrangiano L es invariante bajo la transformación de las coordenadas y el tiempo

$$t \to t' = t + \delta t \quad , \quad x(t) \to x'(t') \tag{9.3.11}$$

entonces del principio de Acción estacionaria

$$\delta S = \int \frac{d\left(L\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta x}\right)}{dt} dt = 0 \tag{9.3.12}$$

y, dado que ahora no exigimos que δt ó δx se anulen en los puntos inicial y final del movimiento, el integrando debe ser idénticamente nulo, con lo cual

$$L\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{\delta x} = \text{cte} \tag{9.3.13}$$

es una constante del movimiento.

Constante del movimiento Por último, al tener

$$\delta x = \overline{\delta x} + \frac{dx}{dt}\delta t \tag{9.3.14}$$

dicha constante del movimiento se escribe en la forma

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x = \text{cte} \tag{9.3.15}$$

Por tanto, el teorema de Noether nos permite encontrar las cantidades conservadas del movimiento a partir de las transformaciones de simetría del Lagrangiano.

9.3.2. Ejemplos

Ejemplo. Simetría frente a traslación temporal La transformación temporal es en este caso

$$\delta t = a \quad , \quad \delta x = 0 \tag{9.3.16}$$

y en consecuencia, según el teorema de Noether, existe una cantidad conservada en el movimiento en la forma

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L = \text{cte} \tag{9.3.17}$$

y coincide con el Hamiltoniano del sistema. Por tanto, cuando la evolución de un sistema no dependa de una traslación en el tiempo, su energía total se conserva.

Ejemplo. Simetría frente a traslación espacial La transformación espacial es en este caso

$$\delta t = 0 \quad , \quad \delta x = a \tag{9.3.18}$$

y en consecuencia, según el teorema de Noether, existe una cantidad conservada en el movimiento en la forma

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{cte} \tag{9.3.19}$$

que no es sino el momento conjugado p. Si la coordenada x mide una longitud, se conserva el momento lineal en la dirección del eje que mantiene invariante al sistema. Si la coordenada x es un ángulo, se conserva el momento angular de giro respecto al eje que mantiene invariante al sistema.

9.3.3. Teorema de Noether para el medio continuo

Transformación de simetría para el medio continuo Supongamos que la transformación de las coordenadas y el tiempo

$$t \to t' = t + \delta t \quad , \quad x \to x' = x + \delta x \tag{9.3.20}$$

junto con la transformación de la trayectoria

$$y\left(x,t\right) \to y'\left(x',t'\right) \tag{9.3.21}$$

deja invariante la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema continuo. Veamos que consecuencias podemos extraer de esta simetría.

Variación de la acción Por claridad, tomamos una densidad Lagrangiana en cualquiera de las formas analizadas anteriormente, con una dependencia funcional genérica en las variables y en las derivadas de primer orden $\mathcal{L}\left(y,y_x,y_t,x,t\right)$. La variación de la acción debido a esta transformación está dada por

$$\delta S = \int\int \mathcal{L}\left(y',y'_{x'},y'_{t'},x',t'\right)dx'dt' - \int\int \mathcal{L}\left(y,y_x,y_t,x,t\right)dxdt \tag{9.3.22}$$

• Calculamos la variación de las variables independientes (x,t) y la trayectoria $y(x,t)$ por separado. Respecto a las primeras, tenemos las relaciones

$$dt' = \left|\frac{dt'}{dt}\right|dt = \left(1+\frac{d\left(\delta t\right)}{dt}\right)dt \quad , \quad dx' = \left|\frac{dx'}{dx}\right|dx = \left(1+\frac{d\left(\delta x\right)}{dx}\right)dx \tag{9.3.23}$$

por lo que en primer orden de aproximación,

$$dx'dt' = \left(1+\frac{d\left(\delta t\right)}{dt}\right)\left(1+\frac{d\left(\delta x\right)}{dx}\right)dxdt \simeq \left(1+\frac{d\left(\delta t\right)}{dt}+\frac{d\left(\delta x\right)}{dx}\right)dxdt \tag{9.3.24}$$

La variación de la trayectoria $y(x,t)$ de la partícula es la suma de la variación por el cambio de la función y, $\overline{\delta y}$, tomando (x,t) constantes, y la variación de y debida a la variación de la coordenada y el tiempo. Esto es,

$$\delta y \equiv y'\left(x',t'\right) - y\left(x,t\right) = \overline{\delta y} + y_t\delta t + y_x\delta x \tag{9.3.25}$$

• Para la densidad Lagrangiana, obtenemos igualmente

$$\delta\mathcal{L} = \overline{\delta\mathcal{L}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t \tag{9.3.26}$$

donde la variación $\overline{\delta\mathcal{L}}$ a (x,t) constantes está dada por

$$\overline{\delta\mathcal{L}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\overline{\delta y} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\overline{\delta y_x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\overline{\delta y_t} \tag{9.3.27}$$

Con todo ello, de forma análoga a lo realizado en el caso discreto, la variación de la acción se escribe

$$\begin{aligned}\delta S &= \int\int\left(\frac{d\left(\mathcal{L}\delta t\right)}{dt}+\frac{d\left(\mathcal{L}\delta x\right)}{dx}+\overline{\delta\mathcal{L}}\right)dxdt \\ &= \int dt\mathcal{L}\delta x\Big|_{x_1}^{x_2} + \int dx\mathcal{L}\delta t\Big|_{t_1}^{t_2} + \int\int\overline{\delta\mathcal{L}}dxdt\end{aligned} \tag{9.3.28}$$

Teorema de Noether De la misma forma que en el principio de acción estacionaria, el operador de derivada temporal puede intercambiarse con el operador de variación a tiempo constante, denotado por un símbolo $\overline{\delta y}$, por lo que

$$\overline{\delta y_x} = \frac{\partial}{\partial x}\overline{\delta y} \quad , \quad \overline{\delta y_t} = \frac{\partial}{\partial t}\overline{\delta y} \tag{9.3.29}$$

con lo cual, podemos escribir el último término en el integrando en la forma, tras una integración por partes,

$$\begin{aligned}\int\int \overline{\delta\mathcal{L}}dxdt = \int\int dxdt \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\right)\right)\overline{\delta y} \\ + \int dt \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\overline{\delta y}\Big|_{x_1}^{x_2} + \int dx \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\overline{\delta y}\Big|_{t_1}^{t_2}\end{aligned} \tag{9.3.30}$$

y así, la variación de la acción tiene la expresión final

$$\begin{aligned}\delta S = \int dt \left(\mathcal{L}\delta x + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\overline{\delta y}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} + \int dx \left(\mathcal{L}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\overline{\delta y}\right)\Big|_{t_1}^{t_2} \\ + \int\int dxdt \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\right)\right)\overline{\delta y}\end{aligned} \tag{9.3.31}$$

• Con la condición de que la variación de la acción sea nula y que el movimiento recorra la trayectoria real, esto es, que se satisfagan las ecuaciones de Euler−Lagrange,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} \tag{9.3.32}$$

obtenemos el denominado *teorema de Noether* para el medio continuo:

Si $\mathcal{L}$ es invariante bajo la transformación de las coordenadas y el tiempo

$$t \to t' = t + \delta t \quad , \quad x \to x' = x + \delta x \tag{9.3.33}$$

junto con la transformación de la trayectoria

$$y(x,t) \to y'\left(x',t'\right) \tag{9.3.34}$$

entonces tenemos la *ley de conservación*

$$\frac{d}{dt}\int \left(\mathcal{L}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\overline{\delta y}\right)dx + \left(\mathcal{L}\delta x + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\overline{\delta y}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{9.3.35}$$

Por tanto, a diferencia del caso discreto, en el caso continuo el teorema de Noether no nos permite en general, encontrar las cantidades conservadas del movimiento, sino ecuaciones como la anterior que expresar leyes de conservación a partir de las transformaciones de simetría de la densidad Lagrangiana. La diferencia fundamental con el caso discreto es que ahora, al ser el cuerpo continuo, las leyes de conservación están sujetas a lo que sucede en su frontera, y por tanto, la existencia de cantidades conservadas depende crucialmente del comportamiento de la trayectoria en los puntos frontera.

Comprobación Una vez obtenida la expresión final de la condición de acción estacionaria

$$\delta S = \int dt \left(\mathcal{L}\delta x + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\overline{\delta y}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} + \int dx \left(\mathcal{L}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\overline{\delta y}\right)\Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{9.3.36}$$

retomamos la segunda integral como un integral doble en (x,t), escrita en la forma

$$\int dx \left(\mathcal{L}\delta t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \overline{\delta y} \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = \int dt \frac{d}{dt} \int \left(\mathcal{L}\delta t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \overline{\delta y} \right) dx \tag{9.3.37}$$

con lo cual, la condición para la variación nula de la acción se escribe

$$\delta S = \int dt \left[\left(\mathcal{L}\delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \overline{\delta y} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{d}{dt} \int \left(\mathcal{L}\delta t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \overline{\delta y} \right) dx \right] = 0 \tag{9.3.38}$$

donde debemos notar que $\overline{\delta y} = \delta y - y_t \delta t - y_x \delta x$. Dado que la variación tanto de la función como de las variables (x, t) son arbitrarias, el teorema de Noether exige, como hemos indicado, que se cumpla la ley de conservación

$$\frac{d}{dt} \int \left(\mathcal{L}\delta t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \overline{\delta y} \right) dx + \left(\mathcal{L}\delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \overline{\delta y} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{9.3.39}$$

Reducción al modelo discreto Por último , destacar que en el caso de un medio discreto, el segundo término de la ley de conservación es idénticamente nulo, y en el primero podemos aplicar la redefinición $\int \mathcal{L} dx = L$, llegamos en todo caso a la cantidad conservada ya conocida para el medio discreto $L\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \overline{\delta y} = \text{cte}$.

9.3.4. Ejemplo. Cuerda con masa

Consideramos la densidad Lagrangiana para la cuerda con masa

$$\mathcal{L}\left(y, y_x, y_t, x, t\right) = \frac{1}{2}\rho y_t^2 - \frac{1}{2} T y_x^2 \tag{9.3.40}$$

y analizamos las leyes de conservación en función de sus simetrías.

Simetría frente a traslación espacial La transformación espacial es en este caso

$$\delta t = 0 \quad , \quad \delta x = a \quad , \quad \delta y = 0 \tag{9.3.41}$$

y en consecuencia, $\overline{\delta y} = -a \cdot y_x$. Según el teorema de Noether, existe una ley de conservación en la forma

$$\frac{d}{dt} \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} y_x dx = \left(\mathcal{L} - y_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \tag{9.3.42}$$

que se escribe finalmente

$$\frac{d}{dt} \int \rho y_t y_x dx = \left(\frac{1}{2}\rho y_t^2 + \frac{1}{2} T y_x^2 \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = \mathcal{H}\left(x_2\right) - \mathcal{H}\left(x_1\right) \tag{9.3.43}$$

siendo $\mathcal{H}$ la densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H} \equiv y_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho y_t^2 + \frac{1}{2} T y_x^2 \tag{9.3.44}$$

tal que $E = \int \mathcal{H} dx$ es la energía total del sistema.

Simetría frente a traslación temporal La transformación temporal se define por

$$\delta t = a \quad , \quad \delta x = 0 \quad , \quad \delta y = 0 \tag{9.3.45}$$

y en consecuencia, $\overline{\delta y} = -a \cdot y_t$. Según el teorema de Noether, existe una ley de conservación en la forma

$$\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}y_t-\mathcal{L}\right)dx=\left(-y_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{9.3.46}$$

que se escribe finalmente

$$\frac{dE}{dt}\equiv\frac{d}{dt}\int\left(\frac{1}{2}\rho y_t^2+\frac{1}{2}Ty_x^2\right)dx=T\left(y_ty_x\right)\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{9.3.47}$$

Cantidad conservada Combinando los dos resultados previos, podemos concluir que cuando se establezca $\left(y_ty_x\right)\Big|_{x_1}^{x_2}=0$, y $H\left(x_2\right)=H\left(x_1\right)$, por ejemplo en una cuerda con dos extremos fijos, $y\left(x_1,t\right)=y\left(x_2,t\right)=0$, existen dos cantidades conservadas, la energía total E y el momento lineal $p_x\equiv\int\rho y_ty_xdx=$ cte en la dirección de propagación, que es la dirección x. Dado que la onda producida entre dos extremos fijos es estacionaria, el momento p_x resulta ser idénticamente nulo, como puede comprobarse con la integración directa a partir de $y\left(x,t\right)=A\,\mathrm{sen}\,kx\cos\omega t$.

9.4. Ejercicios resueltos

9.4.1. Cuerda elástica masiva con tensión

Considere la densidad Lagrangiana para una cuerda en tensión

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \tag{9.4.1}$$

donde $y(x,t)$ es la perturbación de la cuerda desde su estado de equilibrio, ρ es su densidad de masa, y T la tensión a la que se ve sometida.

(a) Determine la ecuación de movimiento para una densidad de masa y una tensión constantes, y verifique que se trata de la ecuación de ondas, determinando la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

(b) Obtenga la densidad Hamiltoniana, y a partir de ésta exprese matemáticamente el principio de conservación de la energía para este sistema.

(c) Interprete físicamente el resultado del apartado **(b)**.

(a) La trayectoria real descrita por el sistema satisface la ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} \tag{9.4.2}$$

que da lugar a la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2y}{\partial t^2}-\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=0 \tag{9.4.3}$$

que introduce una velocidad de propagación, o velocidad de ondas, con la definición

$$\frac{\partial^2y}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=0 \tag{9.4.4}$$

y el valor en este caso

$$v=\sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{9.4.5}$$

(b) Por definición, el momento canónico (aunque es más preciso hablar de una densidad de momento canónico) está dado por

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} = \rho y_t \tag{9.4.6}$$

Y dada la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$, determinamos la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}$ en la forma usual

$$\mathcal{H}(y, \Pi) \equiv \Pi y_t - \mathcal{L} \tag{9.4.7}$$

lo que nos permitirá obtener la energía del movimiento en la forma

$$E = \int \mathcal{H} dx \tag{9.4.8}$$

El resultado es

$$\mathcal{H}(y, \Pi) \equiv \Pi \frac{\Pi}{\rho} - \frac{1}{2}\rho \left(\left(\frac{\Pi}{\rho} \right)^2 - v^2 y_x^2 \right) = \frac{\Pi^2}{2\rho} + \frac{1}{2}\rho v^2 y_x^2 \tag{9.4.9}$$

• Para deducir ahora su ley de conservación asociada, aplicamos el teorema de Noether

$$\frac{d}{dt} \int \left(\mathcal{L}\delta t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \overline{\delta y} \right) dx + \left(\mathcal{L}\delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \overline{\delta y} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{9.4.10}$$

siendo $\overline{\delta y} = \delta y - y_t \delta t - y_x \delta x$ la variación de la función y.

En el caso de la invariancia frente a la traslación temporal, definida por

$$\delta y = 0, \delta t = a, \delta x = 0 \rightarrow \overline{\delta y} = -a y_t \tag{9.4.11}$$

el teorema de Noether da lugar a la ley de conservación

$$\frac{d}{dt} \int \left(\mathcal{L} - y_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \right) dx - \left(y_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{9.4.12}$$

ó, en función de la densidad Hamiltoniana,

$$\frac{d}{dt} \int \mathcal{H} dx = \rho v^2 (y_t y_x) \Big|_{x_1}^{x_2} \tag{9.4.13}$$

• Como hemos visto, la integral del lado izquierdo es la energía del sistema

$$E = \int \mathcal{H} dx \tag{9.4.14}$$

por lo que la ley de invariancia frente a la traslación temporal se escribe

$$\frac{dE}{dt} = \rho v^2 (y_t y_x) \Big|_{x_1}^{x_2} \tag{9.4.15}$$

Podemos concluir que cuando se establezca en las fronteras del sistema $(y_t y_x) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$, la energía total E será una constante del movimiento.

(c) Éste es un resultado general. La mejor vía para entenderlo físicamente es partir del teorema de Noether, que establece para este sistema que

$$\frac{dE}{dt} = T y_x y_t \Big|_1^2 \tag{9.4.16}$$

En el lado derecho, Ty_x es la fuerza en la dirección del movimiento, y y_t la velocidad de oscilación, luego el producto Ty_xy_t tendrá dimensiones de fuerza por velocidad, esto es, será la potencia transmitida por el movimiento. Así, la ecuación anterior refleja que la variación de la energía con el tiempo es igual a la potencia neta que ejerce en su movimiento sobre las fronteras.

Al ser $\rho v^2 = T$, el medio es elástico y la potencia suministrada por la fuerza coincide con la potencia suministrada por el cambio de momento (al satisfacerse $F = dp/dt$). Es decir, que también tenemos la interpretación correcta de la expresión equivalente

$$\frac{dE}{dt} = \rho v^2 y_x y_t\Big|_1^2 \tag{9.4.17}$$

siendo $\rho v^2 y_x$ la fuerza generada en la dirección del movimiento por el cambio del momento del medio.

9.4.2. Conservación del momento lineal para el medio continuo

Para la densidad Lagrangiana de una perturbación $y(x,t)$ sobre un medio elástico con densidad de masa ρ

$$\mathcal{L}\left(y_x, y_t\right) = \frac{1}{2}\rho y_t^2 - \frac{1}{2}T y_x^2 \tag{9.4.18}$$

la simetría de la acción frente a la traslación espacial, da lugar a la conservación del momento lineal

$$P \equiv \int \rho y_t y_x dx = \text{cte} \tag{9.4.19}$$

(a) Además, dado que cada elemento de masa del sistema tiene una velocidad de oscilación y_t, el momento del sistema debería ser definido simplemente por

$$P_y = \int \rho y_t dx \tag{9.4.20}$$

Determine bajo qué condiciones este momento P_y, así definido, será también una cantidad conservada.

(b) Demuestre que la variación de energía del campo está directamente relacionado con uno de ellos.

(c) Concluya entonces cuál es el significado de cada uno de los momentos definidos. Debe tener en cuenta que en la descripción del medio continuo siempre existen dos sistemas de coordenadas que surgen de forma natural: el sistema de los ejes fijos en el espacio y el sistema de referencia propio del medio.

(a) Analizamos primero la evolución temporal del momento P_y. A partir de su definición, obtenemos directamente el valor

$$\frac{dP_y}{dt} = \frac{d}{dt}\int \rho y_t dx = \int \frac{\partial}{\partial t}\rho y_t dx = \int \rho y_{tt} dx \tag{9.4.21}$$

que podemos escribir también, con ayuda de la ecuación de movimiento, esto es, de la ecuación de ondas,

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{9.4.22}$$

en la forma

$$\frac{dP_y}{dt} = \int T y_{xx} dx \tag{9.4.23}$$

Y realizando la integral directa en x, ya que la tensión es uniforme,

$$\frac{dP_y}{dt} = Ty_x\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{9.4.24}$$

siendo x_1, x_2 los puntos extremos de la región que delimita al medio elástico.

• Por tanto, el momento P_y será constante del movimiento siempre que

$$y_x\left(x_1, t\right) = y_x(x_2, t) \tag{9.4.25}$$

para todo tiempo, como por ejemplo para una onda estacionaria en una cuerda con sus dos extremos fijos. No sería constante por ejemplo si uno de los extremos fuera libre, ya que en este caso aparece una interacción en dicho extremo libre, que da lugar por ejemplo a la reflexión de un pulso de onda.

(b) Analizamos ahora la variación en el tiempo de la densidad Hamiltoniana, ó densidad de energía

$$\mathcal{H} = y_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho y_t^2 + \frac{1}{2}Ty_x^2 \tag{9.4.26}$$

Y encontramos directamente, con ayuda de la ecuación de movimiento,

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(y_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t} - \mathcal{L}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(y_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(Ty_ty_x\right) \tag{9.4.27}$$

que escribimos, introduciendo la velocidad de onda v,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = v^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho y_ty_x\right) \tag{9.4.28}$$

En consecuencia, el transporte de energía en el medio (esto es, la derivada temporal de la energía) está inducido por el flujo (esto es, por la derivada espacial) de la densidad de momento ρy_ty_x de P.

(c) Con la identificación del apartado anterior, queda claro que P debe definirse como el momento lineal macroscópico de la perturbación, ya que está relacionado con su energía, mientras que P_y sería entonces el momento microscópico en el interior del medio material donde se mueve la perturbación. Así, el primero, P, se conserva siempre que exista una simetría respecto a la traslación espacial en el espacio que contiene al medio material, mientras que el segundo, P_y , se conserva cuanto existe simetría respecto a la traslación espacial en el interior del medio material, y está directamente relacionado con la homogeneidad del mismo.

9.4.3. Perturbación del medio elástico en forma de onda viajera

La densidad Lagrangiana para un medio continuo viene dada por

$$\mathcal{L}\left(\varphi, \varphi_t, \varphi_x\right) = \frac{1}{2}\rho\left(\varphi_t^2 - c_s^2\varphi_x^2 - \omega^2\varphi^2\right) \tag{9.4.29}$$

siendo ρ la densidad de masa, c_s una velocidad de onda, y ω la frecuencia.

(a) Determine la ecuación de movimiento para la solución particular del campo de tipo onda viajera

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(\Omega t - kx)} \tag{9.4.30}$$

¿Cuál es relación de dispersión del medio, definida por la función $\Omega \equiv \Omega\left(k\right)$?

(b) Determine la relación que existe entre la energía E y el momento lineal P para este tipo de solución particular. Interprete físicamente.

(c) Determine la velocidad de propagación de la solución planteada en los límites $k \to 0$, $k \to \infty$, e interprete físicamente.

(a) La ecuación de movimiento del campo es la correspondiente ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_x}\right)=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \tag{9.4.31}$$

que da lugar a la ecuación de ondas con un término lineal

$$\rho\varphi_{tt}-\rho c_s^2\varphi_{xx}+\rho\omega^2\varphi=0 \tag{9.4.32}$$

• Aplicando entonces la solución planteada en el enunciado, obtenemos

$$-\rho\Omega^2\varphi_0 e^{i(\Omega t-kx)}+\rho c_s^2\varphi_0 k^2 e^{i(\Omega t-kx)}+\rho\omega^2\varphi_0 e^{i(\Omega t-kx)}=0 \tag{9.4.33}$$

y simplificando los factores comunes, podemos obtener la relación de dispersión del medio, esto es, la relación entre la frecuencia Ω del movimiento y el vector de onda k

$$-\rho\Omega^2+\rho c_s^2k^2+\rho\omega^2=0\rightarrow\Omega^2=\omega^2+c_s^2k^2 \tag{9.4.34}$$

(b) Para analizar ahora el valor de la energía, debemos obtener primero la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}$, dada la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$, en la forma usual

$$\mathcal{H}\left(\varphi,\Pi_\varphi\right)\equiv\Pi_\varphi\varphi_t-\mathcal{L} \tag{9.4.35}$$

que nos permitirá obtener la energía del movimiento en la forma

$$E=\int\mathcal{H}dx \tag{9.4.36}$$

Por definición, el momento canónico está dado por

$$\Pi_\varphi=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_t}=\rho\varphi_t \tag{9.4.37}$$

y por tanto

$$H\left(\varphi,\Pi_\varphi\right)\equiv\Pi_\varphi\frac{\Pi_\varphi}{\rho}-\frac{1}{2}\rho\left(\left(\frac{\Pi_\varphi}{\rho}\right)^2-c_s^2\varphi_x^2-\omega^2\varphi^2\right)=\frac{\Pi_\varphi^2}{2\rho}+\frac{1}{2}\rho c_s^2\varphi_x^2+\frac{1}{2}\rho\omega^2\varphi^2 \tag{9.4.38}$$

La densidad Hamiltoniana es suma de cantidades positivas, de forma que la energía del sistema

$$E\equiv\int\left(\frac{\Pi_\varphi^2}{2\rho}+\frac{1}{2}\rho c_s^2\varphi_x^2+\frac{1}{2}\rho\omega^2\varphi^2\right)dx \tag{9.4.39}$$

también será positiva.

• Asimismo, la otra cantidad a valorar, el momento P, por definición está dado por

$$P=\int\rho\varphi_t\varphi_x dx \tag{9.4.40}$$

• Para la solución dada, tenemos las magnitudes derivadas

$$\varphi_t=i\Omega\varphi_0 e^{i(\Omega t-kx)}\quad,\quad\varphi_x=-ik\varphi_0 e^{i(\Omega t-kx)} \tag{9.4.41}$$

Por tanto, la densidad de momento tiene el valor

$$\Pi_\varphi=i\Omega\rho\varphi_0 e^{i(\Omega t-kx)} \tag{9.4.42}$$

y

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\rho\left(\omega^2 - \Omega^2 - c_s^2 k^2\right)\varphi_0^2 e^{2i(\Omega t - kx)} \tag{9.4.43}$$

Aplicando la relación de dispersión, que se deriva de la ecuación de movimiento, la densidad Hamiltoniana se reduce a

$$\mathcal{H} = -\rho c_s^2 k^2 \varphi_0^2 e^{2i(\Omega t - kx)} \tag{9.4.44}$$

• Por otro lado tenemos la densidad del momento P en la forma

$$\rho\varphi_t\varphi_x = \rho k\Omega\varphi_0^2 e^{2i(\Omega t - kx)} \tag{9.4.45}$$

Con esto, la energía y momento del medio continuo están dados, respetivamente, por

$$E = -\rho c_s^2 k^2 \varphi_0^2 \int e^{2i(\Omega t - kx)} dx \tag{9.4.46}$$

y

$$P = \rho k\Omega\varphi_0^2 \int e^{2i(\omega t - kx)} dx \tag{9.4.47}$$

• Sin necesidad de evaluar cada una de las integrales en x, se concluye que existe una relación entre la energía y el momento en la forma

$$E = -\rho c_s^2 k^2 \frac{P}{\rho k\Omega} = -\frac{k c_s^2}{\Omega} P = -\frac{k c_s^2}{\sqrt{\omega^2 + c_s^2 k^2}} P \tag{9.4.48}$$

El signo menos es relevante ya que indica que la propagación para energía positiva $E > 0$, sólo se produce para un momento negativo, $P < 0$, es decir la onda se propaga en la dirección del eje $-x$.

(c) Dada la frecuencia del movimiento, definida por la relación de dispersión, $\Omega = \Omega(k)$, es habitual definir dos velocidades características de propagación, la velocidad de fase de oscilación en el medio, dada por el cociente

$$v = \frac{\Omega}{k} = \frac{\sqrt{\omega^2 + c_s^2 k^2}}{k} \tag{9.4.49}$$

y la velocidad de grupo, de propagación de la energía, definida por la derivada

$$v_g = \frac{d\Omega}{dk} = \frac{c_s^2 k}{\sqrt{\omega^2 + c_s^2 k^2}} \tag{9.4.50}$$

• En el límite $k \to 0$, tenemos en ambos casos

$$v \to \frac{\Omega}{k} \tag{9.4.51}$$

y

$$v_g = 0 \tag{9.4.52}$$

que implica que en este límite no existe propagación de ondas, en el medio sólo se producen ondas estacionarias.

En el límite $k \to \infty$, la velocidad resultante no depende de k, esto es, no depende de la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$ (el medio es no dispersivo):

$$v = v_g = c_s \tag{9.4.53}$$

y la propagación de la energía se produce con la misma velocidad que el movimiento de las ondas individuales.

9.4.4. Medio elástico con tensión y densidad dependientes de la coordenada

Sea una cuerda con masa para la que tanto su densidad de masa, como la tensión a la que se ve sometida, dependen de la coordenada x,

(a) Determine la densidad Lagrangiana y las ecuaciones de Euler−Lagrange para la vibración transversal de la misma.

(b) Obtenga la densidad Hamiltoniana y las leyes de conservación del sistema en función de la invariancia frente a la traslación espacial y temporal de la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$ obtenida en el apartado anterior.

(a) Para la energía cinética, en el límite continuo tenemos la contribución elemental de un elemento de masa

$$T = \frac{1}{2} m_n \left(\frac{dy_n}{dt}\right)^2 \to \frac{1}{2}\rho(x)dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \tag{9.4.54}$$

y para la energía potencial, como hemos visto, será para un tensión dependiente de x,

$$U = T(x) \cdot \Delta l = T(x)\,(dS - dx) \tag{9.4.55}$$

donde dS es el elemento de arco de la función $y(x,t)$, que determina el desplazamiento de la cuerda

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \tag{9.4.56}$$

• El caso que se analiza corresponde a un desplazamiento pequeño de la cuerda desde su posición horizontal de equilibrio. En el sistema discreto, esta aproximación corresponde a una disposición recta, no curvada, de la cuerda entre masas vecinas. Y en el límite continuo, debemos exigir $\partial y/\partial x \ll 1$, y por tanto un elemento de arco

$$dS = dx\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \simeq dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right) \tag{9.4.57}$$

Con esto, la energía potencial del elemento de masa es

$$U = T(x)\,(dS - dx) = \frac{1}{2}T(x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \tag{9.4.58}$$

• La contribución neta para la energía cinética y la energía potencial del sistema se obtiene con la integración en x sobre todos los elementos de masa, con lo que el Lagrangiano tiene la expresión final

$$L = T - U = \int \frac{1}{2}\rho(x)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx - \int \frac{1}{2}T(x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \tag{9.4.59}$$

y entonces, la densidad Lagrangiana queda definida como

$$\mathcal{L}\,(y, y_x, y_t, x, t) \equiv \frac{1}{2}\rho(x)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}T(x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \tag{9.4.60}$$

y en general es función de x y de las derivadas espacial y_x, y temporal y_t de la función $y(x,t)$.

Finalmente, la trayectoria real descrita por la cuerda satisface la ecuación de movimiento que se deduce de la ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x}\right)=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \tag{9.4.61}$$

Esto es,

$$\rho\left(x\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{dT(x)}{dx}\frac{\partial y}{\partial x}+T(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{9.4.62}$$

(b) El teorema de Noether exige

$$\frac{d}{dt}\int\left(\mathcal{L}\delta t+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t}\overline{\delta y}\right)dx+\left(\mathcal{L}\delta x+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x}\overline{\delta y}\right)\Big|_{x_1}^{x_2}=0 \tag{9.4.63}$$

y no nos permite en general, encontrar las cantidades conservadas del movimiento, sino ecuaciones que expresan leyes de conservación a partir de las transformaciones de simetría de la densidad Lagrangiana.

- Simetría frente a traslación espacial. Puesto que la densidad y la tensión aplicada dependen de la coordenada x, no hay simetría frente a traslación espacial, ni cantidad conservada asociada.
- Simetría frente a traslación temporal. La transformación temporal está dada por las relaciones

  $$\delta t=a \quad , \quad \delta x=0 \quad , \quad \delta y=0 \tag{9.4.64}$$

  y en consecuencia, $\overline{\delta y}=-a\cdot y_t$. Según el teorema de Noether, existe una ley de conservación en la forma

  $$\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t}y_t-\mathcal{L}\right)dx=\left(-y_t\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{9.4.65}$$

  que se escribe en nuestro caso finalmente como

  $$\frac{dE}{dt}\equiv\frac{d}{dt}\int\left(\frac{1}{2}\rho\left(x\right)y_t^2+\frac{1}{2}T\left(x\right)y_x^2\right)dx=\left(T(x)y_t y_x\right)\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{9.4.66}$$

  Podemos concluir entonces que cuando las condiciones frontera sean tales que $\left(T(x)y_t y_x\right)\Big|_{x_1}^{x_2}=0$, por ejemplo en una cuerda sometida a una tensión homogénea con dos extremos fijos, $y\left(x_1,t\right)=y\left(x_2,t\right)=0$, la energía total E es una cantidad conservada.

9.4.5. Cuerda vertical pesada

Particularice el análisis del ejercicio 9.4.4, en el caso de una cuerda pesada que cuelga verticalmente de un punto fijo. En particular,

(a) Obtenga la ecuación del movimiento.

(b) Analice la ley de conservación de la energía.

(c) Analice en detalle la existencia de ondas estacionarias, y la ley de propagación de un pulso.

(a) Para una cuerda en posición vertical sometida a la fuerza de la gravedad, la tensión T es función de la distancia x, medida desde el punto de suspensión. Si $y(x,t)$ es el desplazamiento lateral del

elemento de la cuerda situado a la distancia x, y de masa $dm = \rho dx$, la densidad Lagrangiana, a partir de su definición, está dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho y_t^2 - \frac{1}{2}T(x)y_x^2 \tag{9.4.67}$$

La ecuación de movimiento de la perturbación $y(x,t)$ se obtiene a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \tag{9.4.68}$$

con el resultado

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho y_t\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)y_x\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho y_{tt} - T'(x)y_x - T(x)y_{xx} = 0 \tag{9.4.69}$$

Sólo queda incorporar el valor de la tensión dependiente de la distancia.

• En el equilibrio, cada elemento de la cuerda está soportando el peso del tramo de cuerda situado por debajo de su posición, de forma que la tensión satisface

$$T(x) = \rho g(L - x) \tag{9.4.70}$$

siendo L la longitud total de la cuerda. Comprobamos que en $x = L$ la tensión es nula, y para $x = 0$ la tensión es máxima e igual al peso total de la cuerda. Incorporando la expresión de la tensión en la ecuación de movimiento, obtenemos

$$y_{tt} - g(L - x)y_{xx} + gy_x = 0 \tag{9.4.71}$$

(b) La forma más directa para establecer la ley de conservación de la energía es, partiendo de su definición

$$E = \int \mathcal{H} dx \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}\rho y_t^2 + \frac{1}{2}T(x)y_x^2 \tag{9.4.72}$$

derivar respecto al tiempo

$$\frac{dE}{dt} = \int \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dx = \int \left(\rho y_t y_{tt} + T(x)y_x y_{xt}\right) dx \tag{9.4.73}$$

incorporar la ecuación de movimiento, expresada en la forma

$$\rho y_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)y_x\right) \tag{9.4.74}$$

y agrupar los términos resultantes

$$\frac{dE}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)y_x y_t\right) dx = T(x)y_x y_t\Big|_1^2 \tag{9.4.75}$$

Dado que el punto superior es fijo, $y(0,t) \equiv 0$, y en el punto inferior, $T \equiv 0$, obtenemos

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad E = \text{cte} \tag{9.4.76}$$

(c) Como aspectos adicionales interesantes se analizan las perturbaciones en la cuerda colgante en forma de onda estacionaria y de pulso.

Ondas estacionarias Podemos analizar las ondas estacionarias, asumiendo una perturbación en la forma $y(x,t) = X(x)W(t)$, cuya solución es de la forma (modos normales)

$$y(x,t) = X(x)W(t) = \sum_n \left(A_n \cos(\omega_0 \lambda_n t) + B_n \operatorname{sen}(\omega_0 \lambda_n t)\right) I_0\left(2i\sqrt{\frac{L-x}{L}}\lambda_n\right) \quad (9.4.77)$$

donde los autovalores λ_n están dados por la condición $y(0,t) \equiv 0$, esto es,

$$I_0(2i\lambda_n) = 0 \quad (9.4.78)$$

son lo ceros de la función I_0 de Bessel, siendo i la unidad imaginaria.

Propagación de un pulso Si perturbamos ahora la cuerda en el punto inferior de forma rápida (generación de un pulso), la perturbación viajará a lo largo de la cuerda con la velocidad de propagación dada por la ecuación de ondas

$$y_{tt} = g(L-x)y_{xx} \quad \Longrightarrow \quad v(x) = \sqrt{g(L-x)} \quad (9.4.79)$$

Este resultado se debe a que en la ecuación general del movimiento

$$y_{tt} - g(L-x)y_{xx} + gy_x = 0 \quad (9.4.80)$$

el término proporcional a y_x es mucho menor que el término proporcional a y_{xx} cuando la perturbación generada en el extremo de la cuerda tiene una extensión limitada (pulso). Físicamente, a medida que se propaga la perturbación por la cuerda se pierde información sobre la velocidad relativa en el interior del pulso (término y_x), y predomina la propagación del pulso como un todo (propagación de su centro de masas, término y_{xx}). Además, este perfil de velocidad $v(x) = \sqrt{g(L-x)}$ nos indica que la perturbación se verá acelerada (crece su velocidad) a medida que se dirije al punto de suspensión, como nos indica la experiencia cotidiana.

9.4.6. Medio elástico no lineal

En el análisis del medio continuo surgen en ocasiones modelos no lineales. Como ejemplo en un caso unidimensional, considere la ecuación de Euler−Lagrange para un campo $u(x,t)$ en la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2\left[1 + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (9.4.81)$$

donde α, λ son dos características materiales del medio.

(a) Determine la densidad Lagrangiana correspondiente que da lugar a esta ecuación del movimiento.

(b) Interprete físicamente el término no lineal. Para ello, obtenga el Lagrangiano para el modelo discreto, y la ecuación de movimiento que se deduce de éste, y analice cuál es el significado del término no lineal correspondiente. Detalle todos los pasos.

(c) Analice las condiciones que deben darse para la conservación de las cantidades

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} dx \quad (9.4.82)$$

y

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (9.4.83)$$

donde x_1, x_2 son las coordenadas de los puntos extremos del medio unidimensional.

(a) La densidad Lagrangiana será de la forma

$$\mathcal{L}\left(u, u_x, u_t, x, t\right) \tag{9.4.84}$$

que corresponde a una ecuación de movimiento del tipo

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \tag{9.4.85}$$

Para la obtención de $\mathcal{L}$, primero deducimos que, al satisfacerse

$$\left[1 + \lambda u_x^2\right] u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x + \frac{1}{3}\lambda u_x^3\right) \tag{9.4.86}$$

la ecuación del enunciado puede escribirse también

$$u_{tt} - \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x + \frac{1}{3}\lambda u_x^3\right) = 0 \tag{9.4.87}$$

• Ya que la ecuación del movimiento no depende de u, sino de sus derivadas, podemos concluir que necesariamente

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \tag{9.4.88}$$

y por tanto, podemos realizar la identificación

$$u_{tt} - \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x + \frac{1}{3}\lambda u_x^3\right) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x}\right) \tag{9.4.89}$$

Por comprobación directa, término a término, vemos que la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}u_t^2 + h\left(u_x\right) = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\left(u_x^2 + \frac{1}{6}\lambda u_x^4\right) \tag{9.4.90}$$

satisface la ecuación de movimiento.

(b) La coordenada x del campo en el modelo continuo corresponde a la posición de la masa $n-$ ésima del modelo discreto

$$x \to na \tag{9.4.91}$$

donde a es la separación espacial entre las masas en el eje x. Y la coordenada del movimiento a lo largo del medio continuo, $u\left(x,t\right)$, debe definirse como la coordenada del movimiento en la dirección del eje u de la masa puntual localizada en x, esto es, la masa $n-$ ésima:

$$u\left(x,t\right) \to u_n(t) \tag{9.4.92}$$

Tomando la derivada respecto al tiempo, tenemos la identificación

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(x,t\right) \to \frac{du_n}{dt}(t) \tag{9.4.93}$$

Y respecto a la derivada respecto a x, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(x,t\right) \to \frac{u_n(t) - u_{n-1}(t)}{a} \tag{9.4.94}$$

• Debemos aplicar ahora la definición

$$L = \int \mathcal{L} dx \tag{9.4.95}$$

con la identificación

$$\rho dx = m \tag{9.4.96}$$

Por tanto, definimos el Lagrangiano de la colección de partículas puntuales que sustituye al medio continuo como la versión discreta de

$$L = \sum_n \mathcal{L} dx = \sum_n \frac{1}{2} (\rho dx) \left(u_t^2 - \alpha^2 \left(u_x^2 + \frac{1}{6} \lambda u_x^4 \right) \right) \tag{9.4.97}$$

donde $\rho dx = m$ debe valer 1, ya que la masa de cada elemento puntual es unitaria por definición. Introduciendo las versiones discretas de la variable de campo, obtenemos finalmente el Lagrangiano discreto en la forma

$$L = \sum_n \frac{1}{2} \left(\left(\frac{du_n}{dt} \right)^2 - \alpha^2 \left(\frac{u_n - u_{n-1}}{a} \right)^2 - \frac{1}{6} \alpha^2 \lambda \left(\frac{u_n - u_{n-1}}{a} \right)^4 \right) \tag{9.4.98}$$

• La ecuación de movimiento para la partícula puntual de masa $m = 1$ localizada en la posición $x = na$, está dada por la ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_n} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_n} \tag{9.4.99}$$

que se desarrolla en la forma

$$\ddot{u}_n + \frac{\alpha^2}{a^2} (2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}) + \frac{1}{3} \frac{\alpha^2}{a^2} \frac{\lambda}{a^2} \left((u_n - u_{n-1})^3 + (u_n - u_{n+1})^3 \right) = 0 \tag{9.4.100}$$

Se comprueba así que el término no lineal, que es el proporcional a λ en la ecuación anterior, es una contribución cuadrática al potencial de interacción armónico. Dicha contribución suele aparecer en presencia de un potencial, cuando el desplazamiento respecto al punto de equilibrio (el mínimo de potencial) es grande, y debe tenerse en cuenta en el potencial de interacción términos de mayor orden que el segundo (que da lugar al movimiento armónico).

(c) Podemos hacer uso del teorema de Noether, pero también podemos analizar directamente la derivada respecto al tiempo de las cantidades dadas, y ver las condiciones de su conservación. Esta segunda vía es más directa, aprovechando que la ecuación de movimiento tiene la estructura

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_t) = \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x + \frac{1}{3} \lambda u_x^3 \right) \tag{9.4.101}$$

de utilidad a la hora de integrar en x.

Para establecer la conservación de la primera cantidad, tenemos la relación

$$\frac{dI_1}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u_t dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} u_t dx \tag{9.4.102}$$

y de aquí, al obtener una integral directa en la variable x, tenemos el resultado

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u_t dx = \alpha^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x + \frac{1}{3} \lambda u_x^3 \right) dx = \alpha^2 u_x \left(1 + \frac{1}{3} \lambda u_x^2 \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \tag{9.4.103}$$

Obtenemos por tanto, la ley de conservación

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u_t dx = \alpha^2 u_x \left(1 + \frac{1}{3} \lambda u_x^2 \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \tag{9.4.104}$$

y concluimos que por ejemplo, cuando $u_x = 0$ en la frontera, se conserva

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t dx = \text{cte} \tag{9.4.105}$$

• Aplicando el mismo método en el segundo caso, tenemos

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u_t u_x dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(u_t u_x\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(u_{tt} u_x + u_t u_{xt}\right) dx \tag{9.4.106}$$

En el primer miembro utilizamos de nuevo la ecuación de movimiento para obtener una expresión derivada respecto a x, en la forma

$$u_{tt} u_x = \alpha^2 u_x \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x + \frac{1}{3}\lambda u_x^3\right) = \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{4}\lambda u_x^4\right) \tag{9.4.107}$$

al ser

$$u_x \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x^3\right) = 3u_x^3 u_{xx} = \frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x^4\right) \tag{9.4.108}$$

mientras que para el segundo miembro tenemos directamente

$$u_t u_{xt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u_t^2\right) \tag{9.4.109}$$

Con esto, la derivada temporal de I_2 se escribe

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u_t u_x dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u_t^2\right) dx + \alpha^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{4}\lambda u_x^4\right) dx \tag{9.4.110}$$

y con la integral directa en x, llegamos a la ley de conservación en la forma

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u_t u_x dx = \frac{1}{2}\left(u_t^2 + \alpha^2\left(u_x^2 + \frac{1}{2}\lambda u_x^4\right)\right)\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{9.4.111}$$

Por tanto, si $F\left(x_1, t\right) = F\left(x_2, t\right)$, donde

$$F\left(x, t\right) \equiv \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\left(u_x^2 + \frac{1}{2}\lambda u_x^4\right) \tag{9.4.112}$$

se establece la ley de conservación adicional

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t u_x dx = \text{cte} \tag{9.4.113}$$

Es importante destacar que F no coincide con la densidad Hamiltoniana

$$H\left(x, t\right) \equiv T + V = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\left(u_x^2 + \frac{1}{6}\lambda u_x^4\right) \tag{9.4.114}$$

debido a la presencia de un término no cuadrático en la densidad de energía potencial.

9.4.7. Densidad Lagrangiana dependiente de derivadas superiores

Para una densidad Lagrangiana definida en la forma

$$\mathcal{L}\left(y, y_x, y_{xx}, y_t\right) \tag{9.4.115}$$

que depende también de la derivada segunda y_{xx} respecto a la coordenada espacial x,

(a) Determine cuál es la expresión completa de la ecuación de Euler−Lagrange que se deduce al exigir una variación nula de la acción, considerando ahora que debe asumirse una variación más general de la densidad Lagrangiana, en la forma

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\delta y_x + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_{xx}}\delta y_{xx} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\delta y_t \tag{9.4.116}$$

(b) Aplique el resultado obtenido en el apartado anterior a la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}\left(y, y_x, y_{xx}, y_t\right) = \frac{1}{2}y_t y_x - y_x^3 - \frac{1}{2}y_{xx}^2 \tag{9.4.117}$$

hallando la ecuación de movimiento correspondiente.

(c) Retomando al caso más general de una densidad Lagrangiana del tipo

$$\mathcal{L}\left(y, y_x, y_{xx}, y_t\right) \tag{9.4.118}$$

determine cuál es la expresión completa del teorema de Noether para este sistema. Detalle todos los pasos.

(d) Deduzca cuál es la cantidad conservada asociada a la simetría de la acción de este sistema general bajo la transformación $y \to y + \varepsilon$. Aplique el resultado al caso particular de la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}\left(y, y_x, y_{xx}, y_t\right) = \frac{1}{2}y_t y_x - y_x^3 - \frac{1}{2}y_{xx}^2 \tag{9.4.119}$$

¿Qué significado físico se puede asociar a esta cantidad conservada?

(a) Analizamos por tanto la variación de la acción S, correspondiente a una variación arbitraria de $y(x,t)$. Ya que el tiempo t y la coordenada x no son variables independientes para cada trayectoria, la variación de la acción es directamente

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \delta\mathcal{L}\left(y, y_x, y_{xx}, y_t\right) dxdt \tag{9.4.120}$$

donde, como indica el enunciado,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\delta y_x + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_{xx}}\delta y_{xx} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\delta y_t \tag{9.4.121}$$

• Como x y t no actúan como variables independientes, la derivada temporal o la derivada espacial y la variación son operadores intercambiables, por lo que

$$\delta y_x = \delta\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\delta y \tag{9.4.122}$$

$$\delta y_{xx} = \delta\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta y \tag{9.4.123}$$

$$\delta y_t = \delta\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\delta y \tag{9.4.124}$$

• Con todo esto podemos escribir la variación de la acción en la forma extendida

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \frac{\partial}{\partial x} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \frac{\partial}{\partial t} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{xx}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta y \right) dxdt \tag{9.4.125}$$

Integrando ahora por partes el segundo y tercer término,

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \right) \right) \delta y dxdt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \delta y \Big|_0^l dt + \int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \delta y \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{xx}} \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} dxdt \end{aligned} \tag{9.4.126}$$

y teniendo en cuenta que sobre los límites de integración la variación de la trayectoria debe ser nula, $\delta y = 0$, esto es, $\delta y\,(l,t) = \delta y\,(0,t) = \delta y\,(x,t_2) = \delta y\,(x,t_1) \equiv 0$, para todo t y todo x, obtenemos la variación de la acción en la forma

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \right) \right) \delta y dxdt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{xx}} \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} dxdt \tag{9.4.127}$$

• Aplicando ahora la integración por partes dos veces del último término en la expresión anterior, en la forma

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{xx}} \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} dxdt \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{xx}} \right) \frac{\partial \delta y}{\partial x} \Big|_0^l dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{xx}} \right) \frac{\partial \delta y}{\partial x} dxdt \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{xx}} \right) \frac{\partial \delta y}{\partial x} \Big|_0^l dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{xx}} \right) \delta y \Big|_0^l dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{xx}} \right) \delta y dxdt \end{aligned} \tag{9.4.128}$$

Teniendo en cuenta que sobre los límites de integración también la derivada espacial de la variación de la trayectoria debe ser nula, $\frac{\partial \delta y}{\partial x} = 0$, esto es, $\frac{\partial \delta y}{\partial x}\,(l,t) = \frac{\partial \delta y}{\partial x}\,(0,t) \equiv 0$, para todo t, obtenemos la variación de la acción en su forma final

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{xx}} \right) \right) \delta y dxdt \tag{9.4.129}$$

• El principio de acción estacionaria establece que dicha variación es cero para la trayectoria real, elegida entre todas las trayectorias compatibles con las condiciones frontera. Dado que se exige $\delta S = 0$, para todo δy arbitrario y compatible, la única solución es que se anule idénticamente el integrando, de forma que la trayectoria real descrita por el sistema satisface

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{xx}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \tag{9.4.130}$$

que constituye la ecuación de Euler−Lagrange del movimiento del sistema.

(b) Para la densidad Lagrangiana dada

$$\mathcal{L}\,(y, y_x, y_{xx}, y_t) = \frac{1}{2} y_t y_x - y_x^3 - \frac{1}{2} y_{xx}^2 \tag{9.4.131}$$

la ecuación de movimiento correspondiente es

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}y_x\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}y_t-3y_x^2\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(y_{xx}\right)=0 \tag{9.4.132}$$

ecuación que tiene el desarrollo

$$y_{xxxx}-6y_xy_{xx}+y_{xt}=0 \tag{9.4.133}$$

(c) Supongamos que la transformación conjunta de la coordenada y el tiempo

$$t\to t'=t+\delta t\quad,\quad x\to x'=x+\delta x \tag{9.4.134}$$

junto con la transformación de la trayectoria

$$y\left(x,t\right)\to y'\left(x',t'\right) \tag{9.4.135}$$

deja invariante la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema continuo. Para una densidad Lagrangiana en la forma descrita, con la dependencia funcional $\mathcal{L}\left(y,y_x,y_{xx},y_t,x,t\right)$, la variación de la acción debido a esta transformación es

$$\delta S=\int\int\mathcal{L}\left(y',y'_{x'},y'_{x'x'},y'_{t'},x',t'\right)dx'dt'-\int\int\mathcal{L}\left(y,y_x,y_{xx},,y_t,x,t\right)dxdt \tag{9.4.136}$$

• Veamos qué consecuencias podemos extraer de esta simetría. Calculamos en primer lugar la variación de las variables independientes (x,t) y la trayectoria $y(x,t)$ por separado. Respecto a las primeras, tenemos las relaciones

$$dt'=\left|\frac{dt'}{dt}\right|dt=\left(1+\frac{d\left(\delta t\right)}{dt}\right)dt\quad,\quad dx'=\left|\frac{dx'}{dx}\right|dx=\left(1+\frac{d\left(\delta x\right)}{dx}\right)dx \tag{9.4.137}$$

por lo que en primer orden de aproximación,

$$dx'dt'=\left(1+\frac{d\left(\delta t\right)}{dt}\right)\left(1+\frac{d\left(\delta x\right)}{dx}\right)dxdt\simeq\left(1+\frac{d\left(\delta t\right)}{dt}+\frac{d\left(\delta x\right)}{dx}\right)dxdt \tag{9.4.138}$$

Por otro lado, la variación de la trayectoria $y(x,t)$ de la partícula se define matemáticamente por

$$\delta y\equiv y'\left(x',t'\right)-y\left(x,t\right)=\overline{\delta y}+y_t\delta t+y_x\delta x \tag{9.4.139}$$

y es la suma de la variación de la función y, esto es, $\overline{\delta y}$, tomando (x,t) constantes, y la variación de y generada por la variación de la coordenada y el tiempo.

• Por otro lado, obtenemos para la densidad Lagrangiana su variación en la forma

$$\delta\mathcal{L}=\overline{\delta\mathcal{L}}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t \tag{9.4.140}$$

donde la variación $\overline{\delta\mathcal{L}}$ para (x,t) constantes tiene la expresión

$$\overline{\delta\mathcal{L}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\overline{\delta y}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\overline{\delta y_x}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_{xx}}\overline{\delta y_{xx}}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\overline{\delta y_t} \tag{9.4.141}$$

Con todo ello, de forma análoga a lo realizado en el caso discreto, la variación de la acción se escribe

$$\begin{aligned}\delta S&=\int\int\left(\frac{d\left(\mathcal{L}\delta t\right)}{dt}+\frac{d\left(\mathcal{L}\delta x\right)}{dx}+\overline{\delta\mathcal{L}}\right)dxdt\\&=\int dt\mathcal{L}\delta x\Big|_{x_1}^{x_2}+\int dx\mathcal{L}\delta t\Big|_{t_1}^{t_2}+\int\int\overline{\delta\mathcal{L}}dxdt\end{aligned} \tag{9.4.142}$$

Dado que el operador de derivada temporal puede intercambiarse con el operador de variación a tiempo constante, denotado por el símbolo barrado, tenemos

$$\overline{\delta y_x} = \frac{\partial}{\partial x}\overline{\delta y} \quad , \quad \overline{\delta y_{xx}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{\delta y} \quad , \quad \overline{\delta y_t} = \frac{\partial}{\partial t}\overline{\delta y} \tag{9.4.143}$$

con lo cual, podemos escribir el último término en δS, tras una integración por partes,

$$\begin{aligned}
&\int\int \overline{\delta\mathcal{L}} dxdt \\
&= \int\int dxdt \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_{xx}}\right)\right)\overline{\delta y} \\
&+ \int dt \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\overline{\delta y}\Big|_0^l + \int dx \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\overline{\delta y}\Big|_{t_1}^{t_2} \\
&+ \int dt \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_{xx}}\right)\frac{\partial\overline{\delta y}}{\partial x}\Big|_0^l - \int dt \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_{xx}}\right)\overline{\delta y}\Big|_0^l
\end{aligned} \tag{9.4.144}$$

• Finalmente, aplicando la condición de que la variación de la acción sea nula y que el movimiento recorra la trayectoria real, esto es, que se satisfagan además las ecuaciones de Euler−Lagrange, la variación de la acción tiene la expresión final

$$\begin{aligned}
\delta S = &\int dt \left(\mathcal{L}\delta x + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\overline{\delta y} + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_{xx}}\right)\frac{\partial\overline{\delta y}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_{xx}}\right)\overline{\delta y}\right)\Big|_0^l \\
&+ \int dx \left(\mathcal{L}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\overline{\delta y}\right)\Big|_{t_1}^{t_2}
\end{aligned} \tag{9.4.145}$$

Reescribimos la segunda integral como un integral doble en (x,t), escrita en la forma

$$\int dx \left(\mathcal{L}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\overline{\delta y}\right)\Big|_{t_1}^{t_2} = \int dt \frac{d}{dt}\int \left(\mathcal{L}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\overline{\delta y}\right) dx \tag{9.4.146}$$

De esta forma, la condición para la variación nula de la acción se escribe

$$\delta S = \int dt \left[\left(\mathcal{L}\delta x + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\overline{\delta y} + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_{xx}}\right)\frac{\partial\overline{\delta y}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_{xx}}\right)\overline{\delta y}\right)|_0^l + \frac{d}{dt}\int \left(\mathcal{L}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\overline{\delta y}\right) dx\right] = 0 \tag{9.4.147}$$

donde debemos notar que al ser $\overline{\delta y} = \delta y - y_t\delta t - y_x\delta x$, tenemos también

$$\frac{\partial\overline{\delta y}}{\partial x} = \delta\frac{\overline{\partial y}}{\partial x} = \delta\frac{\partial y}{\partial x} - y_{xt}\delta t - y_{xx}\delta x - y_x\frac{\partial\delta x}{\partial x} \tag{9.4.148}$$

• Hemos obtenido por tanto el *teorema de Noether* para este medio continuo: Dado que la variación tanto de la función como de las variables (x,t) son arbitrarias, el teorema de Noether exige que se satisfaga la ecuación

$$\left(\mathcal{L}\delta x + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\overline{\delta y} + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_{xx}}\right)\frac{\partial\overline{\delta y}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_{xx}}\right)\overline{\delta y}\right)\Big|_0^l + \frac{d}{dt}\int \left(\mathcal{L}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\overline{\delta y}\right) dx = 0 \tag{9.4.149}$$

bajo la transformación de simetría del sistema.

La diferencia fundamental con el caso discreto es, de nuevo, que, al ser el cuerpo continuo, las leyes de conservación están sujetas a lo que sucede en su frontera, y por tanto, la existencia de cantidades conservadas depende crucialmente del comportamiento de la trayectoria en los puntos

frontera.

(d) En el caso planteado, comprobamos efectivamente que la acción es invariante bajo la simetría $y \to y + \varepsilon$, dado que $\mathcal{L}$ no depende de la función y. Para esta simetría las variaciones planteadas son

$$\delta t = 0 \quad , \quad \delta x = 0 \quad , \quad \delta y = \varepsilon \tag{9.4.150}$$

y también

$$\overline{\delta y} = \delta y = \varepsilon \tag{9.4.151}$$

y al ser ε un valor constante, también

$$\frac{\partial \overline{\delta y}}{\partial x} = \delta \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \tag{9.4.152}$$

Con esto, el teorema de Noether se reduce a

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{xx}} \right) \right) \Big|_0^l + \frac{d}{dt} \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} dx = 0 \tag{9.4.153}$$

y concretamente para la densidad Lagrangiana dada

$$\mathcal{L}\left(y, y_x, y_{xx}, y_t, t\right) = \frac{1}{2} y_t y_x - y_x^3 - \frac{1}{2} y_{xx}^2 \tag{9.4.154}$$

obtenemos la ley de conservación

$$\left(\frac{1}{2} y_t - 3y_x^2 - y_{xxx} \right) \Big|_0^l + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int y_x dx = 0 \tag{9.4.155}$$

• Si definimos las condiciones frontera de tal forma que el primer término se anule idénticamente, por ejemplo si exigimos $y\left(x,t\right) \to 0$, cuando $x \to 0, l$, todas las derivadas de y se anulan también en dicho límite, y obtenemos la ley de conservación

$$\frac{d}{dt} \int y_x dx = 0 \to \int y_x dx = \text{cte} \tag{9.4.156}$$

Para identificar a que cantidad corresponde esta ley de conservación, vemos primero que existe una situación análoga en la definición del momento lineal del campo, que se escribe

$$P = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} y_x dx \tag{9.4.157}$$

De esta forma, comparando las dos expresiones, vemos que si asociamos a $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t}$ la velocidad del campo, $y_x dx$ deberá ser entonces el elemento de masa, y por tanto, su integral será la masa total.

• Deducimos entonces que la ley de conservación

$$\int y_x dx = \text{cte} \tag{9.4.158}$$

expresa la conservación de la masa del campo, siempre que no exista un flujo neto de masa en la frontera del medio continuo. Dicho flujo está definido por el término

$$\left(\frac{1}{2} y_t - 3y_x^2 - y_{xxx} \right) \Big|_0^l \tag{9.4.159}$$

dependiente de las derivadas espaciales y de la derivada temporal del campo en la frontera.

9.4.8. Perturbación del medio continuo en forma de campo escalar

Considere la siguiente densidad Lagrangiana para el *campo escalar* $\varphi(x,t)$, definida en la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}c^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - V(\varphi) \tag{9.4.160}$$

donde $V(\varphi) = a\varphi^4 + b\varphi^2$ es el potencial de auto-interacción del campo, con a, b constantes.

(a) Determine la densidad Hamiltoniana, y a partir de ésta expresar matemáticamente el principio de conservación de la energía.

(b) Una vez obtenida la expresión para la energía del sistema, verifique que el mínimo de energía para el campo φ se obtiene cuando asume un valor $\varphi =$ cte. Interprete físicamente.

(a) Por definición, la densidad del momento canónico está dado por, y tiene el valor

$$\Pi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_t} = \varphi_t \tag{9.4.161}$$

de forma que la densidad Hamiltoniana, definida en la forma

$$H(\varphi,\Pi) \equiv \Pi\varphi_t - \mathcal{L} \tag{9.4.162}$$

tiene la expresión

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}c^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + V(\varphi) \tag{9.4.163}$$

suma de tres contribuciones, las dos primeras claramente positivas, mientras que la tercera podrá tendrá diferente signo en función de los valores relativos de los coeficientes a, b del potencial del campo $V(\varphi)$.

• El principio de conservación para la energía del sistema, definida por

$$E = \int \mathcal{H}dx \tag{9.4.164}$$

se establece aplicando el teorema de Noether para la invariancia del sistema frente a traslación temporal

$$\delta\varphi = 0, \delta t = a, \delta x = 0 \rightarrow \overline{\delta\varphi} = -b\varphi_t \tag{9.4.165}$$

que da lugar a la ley de invariancia

$$\frac{d}{dt}\int\left(\mathcal{L} - \varphi_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_t}\right)dx - \left(\varphi_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_x}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{9.4.166}$$

ó

$$\frac{dE}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\int H dx = c^2\left(\varphi_t\varphi_x\right)\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{9.4.167}$$

Esto es, la energía del sistema se conservará siempre que se cumpla en la frontera

$$\left(\varphi_t\varphi_x\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{9.4.168}$$

(b) El valor de la energía

$$E = \int\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}c^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + V(\varphi)\right]dx \tag{9.4.169}$$

es suma de tres contribuciones, las dos primeras claramente positivas, mientras que la tercera dependiente del potencial tendrá diferente signo en función de los valores relativos de los coeficientes a, b del potencial.

En cualquier caso, una condición necesaria, aunque todavía no suficiente, para que la energía tenga un valor mínimo es que se anulen las dos primeras contribuciones, de forma que la función $\varphi(x,t)$ debe cumplir simultáneamente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{9.4.170}$$

que corresponde a la solución constante

$$\varphi\left(x,t\right) = \varphi_0 \tag{9.4.171}$$

siendo φ_0 un valor arbitrario.

• Una vez aplicada esta condición, entre todos los valores constantes posibles φ_0, soluciones de la ecuación del movimiento del campo, el valor que da lugar a una energía mínima será el que corresponda al valor mínimo absoluto del potencial $V(\varphi)$, esto es, que se cumpla además

$$V\left(\varphi\right) \geq V\left(\varphi_0\right) \tag{9.4.172}$$

con

$$V'\left(\varphi_0\right) = 0 \quad , \quad V''\left(\varphi_0\right) > 0 \tag{9.4.173}$$

Bajo estas condiciones la energía será mínima y tendrá el valor

$$E = \int V\left(\varphi_0\right) dx = V\left(\varphi_0\right) \int dx = V\left(\varphi_0\right) L \tag{9.4.174}$$

siendo L la dimensión espacial del sistema. En general, la dinámica de evolución de $\varphi\left(x,t\right)$ corresponderá a una oscilación entorno al valor constante φ_0 que corresponde al mínimo de energía.

9.4.9. Deflexión lateral de una viga unidimensional

Para el estudio de la deflexión lateral $u(x,t)$ de una viga unidimensional, considere la siguiente densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}\left(u, u_t, u_{xx}, x, t\right) = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_{xx}^2 + u \cdot f(x,t) \tag{9.4.175}$$

siendo $f(x,t)$ una función dada, e independiente de u. El medio continuo está limitado por las fronteras $x = 0$ y $x = L$. Por simplicidad en la notación, no se indica explícitamente la dependencia en x, t de la densidad Lagrangiana.

(a) Interprete físicamente cada uno de los términos de $\mathcal{L}$.

(b) Aplicando el principio de acción estacionaria, obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange para una densidad Lagrangiana general del tipo planteado, esto es, para $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(u, u_t, u_{xx}\right)$ arbitraria. Deberá realizar el análisis únicamente para las tres variables independientes (u, u_t, u_{xx}) de $\mathcal{L}$.

(c) Determine en particular la ecuación de movimiento para la función $u(x,t)$ para la densidad Lagrangiana del enunciado.

(d) En el caso de una función f independiente del tiempo, $f = f\left(x\right)$, puede obtenerse una solución a la ecuación del movimiento independiente del tiempo, $u(x)$. ¿Cuál es la interpretación física del principio de acción estacionaria en este caso? Obtenga la ecuación diferencial que satisface $u(x)$ en este caso.

(e) Considere finalmente el caso de una viga estacionaria con un extremo fijo en $x = 0$, de forma que $u(0) \equiv 0$, $u'(0) \equiv 0$, y que sufre una deflexión lateral por efecto de la gravedad. Determine la solución estacionaria $u(x)$, imponiendo la condición frontera necesaria en $x = L$.

(a) El primer término corresponde a la densidad de energía cinética

$$\mathcal{T}(u_t) = \frac{1}{2}\rho u_t^2 \tag{9.4.176}$$

siendo $\rho = 1$, la densidad unitaria de masa. Los otros dos términos corresponden a la densidad de energía potencial

$$\mathcal{V}(u, u_{xx}) = \frac{1}{2}Tu_{xx}^2 - u \cdot f(x,t) \tag{9.4.177}$$

siendo $T = 1$, la tensión unitaria en el medio elástico. Dado que u es el desplazamiento lateral de la viga respecto a su configuración $u \equiv 0$ en el equilibrio, es directo concluir que el segundo término tiene como origen la expresión del trabajo de una fuerza externa F, aplicada sobre cada elemento de masa del medio,

$$W = u \cdot F \tag{9.4.178}$$

de modo que podemos identificar el trabajo realizado por la fuerza externa con el decremento de la energía potencial de dicho elemento, al ser $F = -\nabla V$,

$$W = \int F dr = -\Delta V = -(V - 0) = -V \equiv -\mathcal{V} dx \tag{9.4.179}$$

De dicha equivalencia se concluye que

$$F = f dx \tag{9.4.180}$$

esto es, $f \equiv \mathcal{F}$ resulta ser la densidad de la fuerza externa (fuerza externa por unidad de longitud).

(b) Analizamos ahora la variación de la acción S, correspondiente a una variación arbitraria de $u(x,t)$. Dado que el tiempo t y la coordenada x son parámetros, espacial y temporal, comunes a todas las trayectorias, la variación de la acción es directamente

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta\mathcal{L}(u, u_{xx}, u_t, x, t)\, dxdt \tag{9.4.181}$$

donde

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\delta u_{xx} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u_t \tag{9.4.182}$$

Además, como x y t no actúan como variables independientes, la derivada temporal y espacial y la variación δ son operaciones matemáticas intercambiables, por lo que se satisface

$$\begin{aligned} \delta u_{xx} &= \delta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta u \\ \delta u_t &= \delta\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\delta u \end{aligned} \tag{9.4.183}$$

Con todo ello podemos escribir la variación de la acción en la forma extendida

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\frac{\partial}{\partial t}\delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta u \right) dxdt \tag{9.4.184}$$

expresión que, tras una primera integración por partes, en este caso del segundo término, da como resultado

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\right) \right) \delta u dxdt + \int_0^L \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\delta u \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2} dxdt \tag{9.4.185}$$

y teniendo en cuenta que sobre los límites de integración la variación de la trayectoria debe ser nula, $\delta u = 0$, esto es, $\delta u\,(L,t) = \delta u\,(0,t) \equiv 0$ para todo t y $\delta u\,(x,t_2) = \delta u\,(x,t_1) \equiv 0$ para todo x, obtenemos la variación de la acción en la forma

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right)\right)\delta u dx dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} dx dt \tag{9.4.186}$$

Finalmente, la integración por partes por dos veces del segundo término de esta expresión tiene el resultado

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} dx dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\right)\frac{\partial \delta u}{\partial x}\bigg|_0^L dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\right)\frac{\partial \delta u}{\partial x} dx dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\right)\frac{\partial \delta u}{\partial x}\bigg|_0^L dt - \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\right)\delta u\bigg|_0^L dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\right)\delta u dx dt
\end{aligned} \tag{9.4.187}$$

Teniendo en cuenta que sobre los límites de integración también la derivada espacial de la variación de la trayectoria debe ser nula, $\frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0$, esto es, $\frac{\partial \delta u}{\partial x}\,(L,t) = \frac{\partial \delta u}{\partial x}\,(0,t) \equiv 0$, para todo t, obtenemos la variación de la acción en su forma final

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\right)\right)\delta u dx dt \tag{9.4.188}$$

El principio de acción estacionaria establece que dicha variación es cero para la trayectoria real, elegida entre todas las trayectorias compatibles con las condiciones frontera. Dado que se exige $\delta S = 0$, para todo δu arbitrario y compatible, la única solución es que se anule idénticamente el integrando, de forma que la trayectoria real descrita por el sistema satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \tag{9.4.189}$$

que constituye la ecuación de Euler-Lagrange del movimiento.

(c) Para la densidad Lagrangiana dada en el enunciado

$$\mathcal{L}\,(u, u_t, u_{xx}) = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_{xx}^2 + u \cdot f(x,t) \tag{9.4.190}$$

la ecuación de Euler-Lagrange del movimiento resulta ser

$$u_{tt} + u_{xxxx} = f(x,t) \tag{9.4.191}$$

(d) Descartada la dependencia en la variable temporal, la ecuación de movimiento para $u(x)$ sería

$$u_{xxxx} = f(x) \tag{9.4.192}$$

y corresponde a la solución estacionaria de la viga que soporta la densidad de fuerza externa $f(x)$, constante en el tiempo. En general, y en este caso en particular, el principio de acción estacionaria se reduce, en el caso independiente del tiempo, al principio de energía potencial mínima

$$\delta V = \int_0^L \delta \mathcal{V}\,(u, u_{xx})\,dx = 0 \tag{9.4.193}$$

(e) Debemos identificar en primer lugar el valor de la función $f\,(x)$, siendo en este caso la densidad

de la fuerza de la gravedad. Tomando arbitrariamente el sentido positivo de la deflexión u en la dirección del eje vertical, la fuerza de la gravedad sobre cada elemento de masa es

$$-mg = -\rho g dx \tag{9.4.194}$$

y teniendo en cuenta que por definición para este medio, $\rho = 1$, deducimos el valor

$$-mg = F = f dx \quad \rightarrow \quad f = -g = \text{cte} \tag{9.4.195}$$

para la densidad de fuerza.

De esta forma, debemos resolver la ecuación estacionaria

$$u_{xxxx} = -g \tag{9.4.196}$$

y para ello debemos fijar cuatro condiciones frontera. Dos de ellas se dan en el enunciado

$$u(0) = 0 \quad , \quad u'(0) = 0 \tag{9.4.197}$$

y las otras dos deben fijarse en la frontera $x = L$, y quedarán descritas en la forma más general como

$$u(L) = u_L \quad , \quad u'(L) = v_L \tag{9.4.198}$$

En este caso, la solución teniendo en cuenta las dos primeras condiciones se puede escribir en la forma

$$u(x) = bx^2 + cx^3 - \frac{g}{24}x^4 \tag{9.4.199}$$

donde

$$bL^2 + cL^3 - \frac{g}{24}L^4 = u_L \tag{9.4.200}$$

y

$$2bL^2 + 3cL^3 - \frac{g}{6}L^4 = Lv_L \tag{9.4.201}$$

de donde podemos despejar las constantes b, c por determinar, en términos de los parámetros u_L, v_L

$$b = \frac{1}{L^2}\left(-\frac{g}{24}L^4 + 3u_L - Lv_L\right) \tag{9.4.202}$$

y

$$c = \frac{2}{L^3}\left(\frac{g}{12}L^4 + Lv_L - 2u_L\right) \tag{9.4.203}$$

9.4.10. Sistema mecánico cerrado

En el ejemplo 9.3.4 hemos visto que la energía mecánica E de una cuerda elástica con masa evoluciona en el tiempo de acuerdo con la ecuación

$$\frac{dE}{dt} = \rho v^2 \left(y_t y_x\right)\Big|_{x_1}^{x_2}$$

de forma que este medio continuo se comporta como un sistema mecánico abierto ya que intercambia energía con el sistema exterior que lo rodea.

(a) Analice bajo qué condiciones el sistema mecánico ampliado y definido por la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + y^2 V(x,t)$$

siendo $V(x,t)$ una perturbación arbitraria, sí puede definirse como un sistema mecánico cerrado. Interprete físicamente el resultado.

(b) En el caso de una perturbación dependiente únicamente del tiempo, $V = V(t)$, demuestre que las conclusiones obtenidas en el apartado **(a)** se corresponden con el resultado esperado para un sistema mecánico puntual. Interprete físicamente este resultado.

(a) Para la nueva densidad Lagrangiana la ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial y_t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial y_x}\right)=\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial y} \quad \Longrightarrow \quad \rho y_{tt}-Ty_{xx}=2yV(x,t) \tag{9.4.204}$$

y la densidad Hamiltoniana, aplicando su definición, es

$$\mathcal{H}\equiv y_t\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial y_t}-\mathcal{L}'=\frac{1}{2}\rho y_t^2+\frac{1}{2}Ty_x^2-y^2V(x,t) \tag{9.4.205}$$

y de esta forma, se satisface, utilizando la ecuación del movimiento,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(Ty_xy_t\right)-y^2\frac{\partial V}{\partial t} \tag{9.4.206}$$

expresión que nos lleva directamente a la ley de conservación de la energía, que debe leerse, siendo $T\equiv \rho v^2$

$$\frac{dE}{dt}\equiv\frac{d}{dt}\int \mathcal{H}dx=\int\frac{\partial H}{\partial t}dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{dE}{dt}=\rho v^2\left(y_ty_x\right)|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}y^2\frac{\partial V}{\partial t}dx \tag{9.4.207}$$

Por tanto, la energía del medio continuo se conservará $\frac{dE}{dt}\equiv 0$, si la perturbación arbitraria satisface

$$\frac{dE}{dt}=0 \quad \Longrightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2}y^2\frac{\partial V}{\partial t}dx=\rho v^2\left(y_ty_x\right)|_{x_1}^{x_2} \tag{9.4.208}$$

Esto es, la perturbación $V(x,t)$ debe ser capaz de absorber el flujo de energía que produce el medio continuo.

(b) Para una perturbación que sólo depende del tiempo, la condición anterior se reduce a la condición para $V'(t)$

$$V'\left(t\right)=\frac{\rho v^2\left(y_ty_x\right)|_{x_1}^{x_2}}{\int_{x_1}^{x_2}y^2dx} \tag{9.4.209}$$

Para poder compararlo con el resultado para un sistema puntual definimos el numerador

$$B\equiv\rho v^2\left(y_ty_x\right)|_{x_1}^{x_2} \tag{9.4.210}$$

como el flujo de energía entrante en el sistema (esto es, el trabajo realizado sobre la partícula puntual), y definimos el denominador como un cierto tipo de desplazamiento promedio (estrictamente positivo) sufrido por la misma, bajo la acción exterior

$$\ell\equiv\int_{x_1}^{x_2}y^2dx \tag{9.4.211}$$

Entonces, tenemos la relación

$$V'\left(t\right)=\frac{B}{\ell} \tag{9.4.212}$$

siendo entonces $V'\left(t\right)$ el análogo de la potencia suministrada por la perturbación exterior. Como ejemplo, cuando $B>0$, ó respectivamente $B<0$, la energía de la partícula aumenta (disminuye) en el tiempo, y esto sólo es posible en un sistema cerrado si la potencia suministrada por la perturbación es positiva (negativa), es decir, la perturbación exterior suministra energía a la

partícula puntual, ó respectivamente absorbe energía de la partícula puntual.

9.4.11. Soluciones de onda viajera

En un medio elástico de propiedades constantes, se propaga una perturbación de la forma

$$y(x,t) = f(x - Vt) \tag{9.4.213}$$

siendo v la velocidad de las ondas en el medio, y f una función arbitraria de su argumento.

(a) Demuestre que se satisface idénticamente la ley de conservación de la energía para este tipo de perturbación, es decir, que se obtiene la misma ley de conservación para cualquier tipo de función f. Demuestre que este hecho está directamente relacionado con una simetría particular de este tipo de soluciones. Interprete físicamente el resultado.

(b) En función del resultado obtenido en **(a)**, ¿qué sucede cuando sobre el medio elástico se propaga una perturbación conjunta del tipo

$$y(x,t) = f(x - Vt) + g(x + Vt) \tag{9.4.214}$$

siendo f, g funciones arbitrarias de su argumentos?

(a) Para la densidad Lagrangiana para un medio elástico sin interacción

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho y_t^2 - \frac{1}{2}T y_x^2 \tag{9.4.215}$$

una perturbación del tipo $y(x,t) = f(x - Vt)$ siendo V la velocidad de propagación en el medio, definida por la relación

$$V \equiv \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{9.4.216}$$

da lugar a las expresiones y al valor de $\mathcal{L}$ siguientes:

$$\begin{aligned} y_t &\equiv \frac{\partial f\,(x - Vt)}{\partial t} = -Vf'\,(x - Vt) \equiv -Vf' \\ y_x &\equiv \frac{\partial f\,(x - Vt)}{\partial x} = f'\,(x - Vt) \equiv f' \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\rho V^2 f'^{\,2} - \frac{1}{2}T f'^{\,2} = \frac{1}{2}\left(\rho V^2 - T\right) f'^{\,2} \equiv 0 \end{aligned} \tag{9.4.217}$$

Que la densidad Lagrangiana sea idénticamente nula conlleva que la ley de conservación de la energía

$$\frac{d}{dt}\int \left(y_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} - \mathcal{L}\right) dx = \left(-y_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x}\right)\Big|_2^1 \tag{9.4.218}$$

se satisfaga idénticamente para cualquier perturbación f, dado que ambos miembros son idénticamente nulos. Esto indica que la simetría bajo traslación temporal deja de ser la simetría relevante en este sistema.

• No obstante, puede deducirse a partir de la densidad Hamiltoniana general para el medio elástico (que por simplicidad no expresamos en función de la densidad del momento)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\rho y_t^2 + \frac{1}{2}T y_x^2 \tag{9.4.219}$$

la expresion para la densidad de energía para la perturbación dada

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\rho V^2 f'^{\,2} + \frac{1}{2}T f'^{\,2} = \frac{1}{2}\left(\rho V^2 + T\right) f'^{\,2} = \rho V^2 f'^{\,2} \tag{9.4.220}$$

de forma que la ley de conservación de energía debería leerse

$$\frac{d}{dt}\int \mathcal{H}dx = Ty_x y_t\Big|_1^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\int \rho V^2 f'^2 dx = -TVf'^2\Big|_1^2 \tag{9.4.221}$$

• La cuestión que se plantea en el problema es de dónde surge esta ley de conservación, que no puede expresarse en función de la traslación temporal, ya que la función $f(x-Vt)$ no satisface esta simetría.
La solución general de la ecuación de ondas en un medio elástico unifome permite la propagación de las perturbaciones en los dos sentidos de movimiento

$$y(x,t) = f(x-Vt) + g(x+Vt) \tag{9.4.222}$$

siendo f una perturbación que viaja con velocidad positiva, esto es, en la dirección $+x$:

$$f = \text{cte} \quad \Longrightarrow \quad x - Vt = \text{cte} \quad \Longrightarrow \quad dx - Vdt = 0 \quad \Longrightarrow \quad v \equiv \frac{dx}{dt} = V \tag{9.4.223}$$

y siendo g una perturbación que viaja con velocidad negativa, esto es, en la dirección $-x$:

$$g = \text{cte} \quad \Longrightarrow \quad x + Vt = \text{cte} \quad \Longrightarrow \quad dx + Vdt = 0 \quad \Longrightarrow \quad v \equiv \frac{dx}{dt} = -V \tag{9.4.224}$$

Si definimos como es usual las dos coordenadas indepedientes de los frentes de de onda

$$\xi \equiv x - Vt \quad , \quad u \equiv x + Vt \tag{9.4.225}$$

nuestro sistema con perturbación f depende de la coordenada ξ pero es independiente de la coordenada u. Ésta es la simetría que sustituye a la mera simetría temporal: el sistema no cambia bajo la transformación $u \to u + \delta u$, o de forma más explícita, ya que la densidad Lagrangiana es idénticamente nula,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \equiv 0 \tag{9.4.226}$$

ó, en su versión integral

$$\frac{d}{du}\int \mathcal{H}dx = \int \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}dx = 0 \tag{9.4.227}$$

Esta ecuación de conservación de la energía, bajo la simetría en u, es equivalente a la ley obtenida anteriormente, dado que:

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t} \tag{9.4.228}$$

y al ser $\mathcal{H} = \rho V^2 f'^2$ tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = \rho V \frac{\partial f'^2}{\partial t} + \rho V^2 \frac{\partial f'^2}{\partial x} \tag{9.4.229}$$

Integrando en x obtenemos término a término

$$\begin{aligned} \int \rho V \frac{\partial f'^2}{\partial t}dx &= \frac{d}{dt}\int \rho V f'^2 \\ \int \rho V^2 \frac{\partial f'^2}{\partial x}dx &= \rho V^2 f'^2\Big|_1^2 \end{aligned} \tag{9.4.230}$$

Multiplicando por V, de la suma nula de las dos contribuciones, teniendo en cuenta que $T = \rho V^2$, obtenemos el resultado anterior

$$\int \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}dx = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\int \rho V^2 f'^2 dx = -TVf'^2\Big|_1^2 \tag{9.4.231}$$

(b) Hemos visto en el apartado anterior que la solución general a la ecuación de ondas en un medio elástico uniforme y sin interacción es de la forma

$$y(x,t) = f(x - Vt) + g(x + Vt) \tag{9.4.232}$$

Sin entrar en el detalle matemático, que no resulta de interés en la comprension de este apartado, la solución anterior no corresponde a la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho y_t^2 - \frac{1}{2}T y_x^2 \tag{9.4.233}$$

ya que ésta no es lineal en la perturbacion, es decir

$$\mathcal{L}\left(f + g\right) \neq \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g) \tag{9.4.234}$$

Por este hecho la propagación de las ondas en general se define desde un principio como un problema de superposición lineal de soluciones de la ecuación de ondas, generadas de forma independiente entre si, sin utilizar una posible densidad $\mathcal{L}$.

• En cualquier caso, en lo que se refiere a este apartado, cuando existe una perturbación adicional (necesariamente independiente) la simetría en la variable u queda rota, y el sistema recupera su simetría respecto a la variable temporal t. Se satisface en este caso la ley de conservación de la energía y si se asume

$$\mathcal{L}\left(f + g\right) \neq \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g) \tag{9.4.235}$$

esto es, las ondas en su generación y su propagación son independientes entre sí, tendremos

$$\mathcal{H}(f + g) = \mathcal{H}(f) + \mathcal{H}(g) \tag{9.4.236}$$

y cada onda conservará su energía dependiendo de sus condiciones frontera.

9.4.12. Relaciones de dispersión para medios lineales

Obtenga la relación de dispersión, y las velocidades de fase y de grupo para las siguientes ecuaciones de movimiento:

(a) $u_t + u_x + \alpha u_{xxx} = 0$

(b) $u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = \beta^2 u_{xxtt}$

• Para analizar la propagación de ondas en el medio, debemos estudiar las soluciones de onda viajera de las ecuaciones del movimiento. Dichas soluciones están representadas por la función

$$u(x,t) = f(x - Vt) \tag{9.4.237}$$

siendo V la velocidad de propagación, o también

$$u(x,t) = f(kx - \omega t) \tag{9.4.238}$$

siendo k el vector de onda, ω la frecuencia de la onda, y en este caso

$$V \equiv \frac{\omega}{k} \tag{9.4.239}$$

la velocidad de fase de la onda, esto es, la velocidad con la que se propaga la onda. En general la frecuencia ω es función del vector de onda, de forma que la expresión correcta es

$$u(x,t) = f\left(kx - \omega(k)t\right) \quad , \quad V = \frac{\omega(k)}{k} \tag{9.4.240}$$

Existe además una segunda velocidad característica de la onda, la velocidad de grupo, definida por

$$V_g \equiv \frac{d\omega(k)}{dk} \tag{9.4.241}$$

que básicamente representa la velocidad con la que se propaga la energía de la onda, o del grupo de ondas, que difiere en general de la velocidad de propagación de la onda individual, o velocidad de fase. Para un medio no dispersivo, la frecuencia es proporcional al vector de onda, y con ello $V = V_g$, esto es, la propagación del grupo de ondas es equivalente a la propagación de cada onda individual. En un medio dispersivo, $V \neq V_g$, y la energía del grupo de ondas se ve dispersada en cada una de sus componentes individuales, como sucede típicamente en la dispersión de luz blanca por un prisma en sus distintas componentes individuales.

• En general, para un medio lineal la onda mantendrá la forma en su propagación y podremos realizar un análisis de Fourier de cada componente por separado. En este sentido, para analizar la dispersión en el medio será suficiente elegir la función f en la forma compleja

$$u(x,t) = e^{i(kx-\omega(k)t)} \tag{9.4.242}$$

en la ecuación de movimiento, y ajustar el valor de la frecuencia en función del vector de onda.

(a) Aplicando, por tanto, la solución $u(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$ a la ecuación del movimiento, se satisface

$$u_t + u_x + \alpha u_{xxx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -i\omega e^{i(kx-\omega t)} + ike^{i(kx-\omega t)} + (ik)^3 \alpha e^{i(kx-\omega t)} = 0 \tag{9.4.243}$$

Esto es, eliminando los factores comunes $ie^{i(kx-\omega t)}$, obtenemos la solución para la frecuencia

$$-\omega + k - k^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega(k) = k - \alpha k^3 \tag{9.4.244}$$

y de aquí directamente obtenemos la velocidad de fase

$$V \equiv \frac{\omega}{k} = 1 - \alpha k^2 \tag{9.4.245}$$

y la velocidad de grupo

$$V_g \equiv \frac{d\omega}{dk} = 1 - 3\alpha k^2 \tag{9.4.246}$$

de las perturbaciones en el medio lineal. Comprobamos, al ser $V_g \neq V$, que el medio es dispersivo.

(b) En este caso tenemos, para la solución dada $u(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$, la relación de dispersión

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = \beta^2 u_{xxtt} \quad \Longrightarrow \quad (-i\omega)^2 + \alpha^2 (ik)^2 = \beta^2 (-i\omega)^2 (ik)^2 \tag{9.4.247}$$

Esto es,

$$-\omega^2 + \alpha^2 k^2 = \beta^2 \omega^2 k^2 \quad \Longrightarrow \quad \omega(k) = \frac{\alpha k}{\sqrt{1+\beta^2 k^2}} \tag{9.4.248}$$

que da lugar a la velocidad de fase

$$V \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{\alpha}{(1+\beta^2 k^2)^{1/2}} \tag{9.4.249}$$

y a la velocidad de grupo

$$V_g \equiv \frac{d\omega}{dk} = \frac{\alpha}{(1+\beta^2 k^2)^{3/2}} \tag{9.4.250}$$

Tenemos de nuevo que $V_g \neq V$, y por tanto el medio es dispersivo.

9.5. Autoevaluación

Ejercicios

9.5.1. Teorema de Noether (R)

Para la densidad Lagrangiana para la cuerda con masa

$$\mathcal{L}\left(y_x, y_t\right) = \frac{1}{2}\rho y_t^2 - \frac{1}{2}T y_x^2 \tag{9.5.1}$$

aplicando el teorema de Noether, determine las leyes de conservación en función de su simetría frente a la traslación espacial y su simetría frente a la traslación temporal.

9.5.2. Modelo elástico con términos adicionales (R)

La densidad Lagrangiana para un medio continuo viene dada por

$$\mathcal{L}\left(y, y_t, y_x\right) = \frac{1}{2}\rho\left(y_t^2 - c_s^2 y_x^2 - \omega^2 y^2\right) \tag{9.5.2}$$

siendo ρ la densidad de masa, c_s una velocidad de onda, y ω la frecuencia.

(a) Determine cuál sería la versión discreta para el Lagrangiano L y la ecuación de movimiento para cada elemento discreto de masa del sistema.

(b) Determine la densidad Hamiltoniana y las leyes de conservación del sistema en función de la invariancia de $\mathcal{L}$ frente a la traslación espacial y temporal.

9.5.3. Coordenada cíclica para perturbación en cuerda uniforme (R)

Analizando la densidad Lagrangiana de una cuerda uniforme con densidad de masa ρ y tensión T,

$$\mathcal{L}\left(y_x, y_t\right) = \frac{1}{2}\rho y_t^2 - \frac{1}{2}T y_x^2 \tag{9.5.3}$$

se observa que la coordenada y es una coordenada cíclica, y esto implica la existencia de una ley de conservación.

(a) Utilizando el teorema de Noether determine la ley de conservación asociada a esta coordenada cíclica, e interprete físicamente.

(b) ¿Bajo qué condición se deduce que existe una cantidad conservada?

9.5.4. Medios lineales con disipación (R)

• Teniendo en cuenta el análisis realizado en el ejercicio 9.4.12, en el caso de que la frecuencia $\omega(k)$ de la onda tuviera una parte imaginaria, esto es, en la forma

$$\omega(k) = \Omega(k) + i\Gamma(k) \tag{9.5.4}$$

la solución tendría el comportamiento

$$u(x,t) = e^{i(\omega(k)t - kx)} = e^{i(\Omega(k)t - kx)} e^{-\Gamma(k)t} \tag{9.5.5}$$

El primer factor describe la propagación física de la onda, mientras que el segundo es una medida de la amplitud de onda en el tiempo. Para $\Gamma(k) > 0$ la amplitud decrece en el tiempo, y se producirá una *disipación* de la energía de la onda en su propagación.
• Discuta en particular para qué valores de n la ecuación

$$u_t + u_x + u_{xxx} + \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = 0 \tag{9.5.6}$$

representa una *disipación* física, esto es, la amplitud de las ondas planas decrece en el tiempo.

Cuestionarios en línea

9.5.5. Límite del continuo

- Enlace al cuestionario

9.5.6. Densidad Lagrangiana

- Enlace al cuestionario

9.5.7. Relaciones de dispersión

- Enlace al cuestionario

9.5.8. Densidad Hamiltoniana

- Enlace al cuestionario

9.5.9. Cantidades conservadas

- Enlace al cuestionario

9.6. Modelos no lineales. Solitones

9.6.1. Introducción

Definiciones iniciales Enunciado de forma breve, un *solitón* u *onda solitaria* es una solución a la ecuación de ondas del campo que se comporta como una partícula puntual, específicamente se encuentra localizada en una región acotada del espacio. Con esta simple definición, un simple pulso

de onda sobre una cuerda elástica podría identificarse con un solitón. Pero existe una diferencia fundamental:

- En la cuerda elástica se satisface el principio de superposición dado que su ecuación de ondas es lineal. Esto supone que la propagación de cada onda en el medio elástico es independiente, ya que no existe un mecanismo de interacción entre las distintas ondas. Y dado que el pulso de onda en el instante inicial, cuando se genera, está localizado, lo estará en cualquier instante posterior. Concluimos con este análisis que la localización espacial se debe más a las características del medio (con propiedades homogéneas) que a la propia solución del campo.
- Lo que nos interesa es que la localización en el espacio sea una propiedad exclusiva de un tipo de solución, el solitón, dentro del conjunto completo de soluciones posibles. Por tanto, es necesario que el medio sea no lineal, y permita la interacción entre las distintas ondas, o dicho de otra forma, que la ecuación de ondas sea no lineal.

Ecuación *KdV* Una de las ecuaciones de onda no lineales más sencillas, en dimensión uno, es la denominada ecuación *KdV*, acrónimo de Korteweg-de Vries, con la expresión

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{9.6.1}$$

siendo $u(x,t)$ la perturbación en el medio. De su estructura nos llama ya la atención que dependa únicamente de la derivada temporal de orden uno, y el factor númerico exacto 6 en el segundo sumando. En este sentido sus propiedades matemáticas son:

- Al depender únicamente de u_t, la solución $u(x,t)$ quedará fijada de forma unívoca conocido el valor de la perturbación en el instante inicial $u(x,0)$.
- Contiene un factor no lineal, proporcional a uu_x, que por su expresión da lugar a una posible singularidad cuando $u_x \to \infty$ (la curva $u(x,t)$ tiene pendiente vertical). Este efecto no lineal, por sí sólo, da lugar al crecimiento simultáneo de u y de u_x, esto es, la onda se *apila* (gana altura) en el tiempo, y eventualmente se rompe en un tiempo finito.
- El término adicional u_{xxx}, por sí sólo, es dispersivo, tiende a *suavizar* las irregularidades de la onda.
- Como conclusión, cuando se combinan el efecto no lineal y el efecto dispersivo, el efecto neto es el equivalente a una *onda viajera*: con un crecimiento en altura contrarrestado con la dispersión espacial, y viceversa, la onda resultante es capaz de desplazarse hacia adelante. Debemos recordar que el significado de *onda* para este tipo de ecuaciones es mucho más amplio, y abarca más contenido, que el significado más simple de onda, generalmente armónica (descritas por funciones seno y coseno), en un medio elástico homogéneo y lineal.

Desde un punto de vista más físico, sus propiedades esenciales son:

- El factor numérico 6 es el necesario para que exista una representación Lagrangiana de la perturbación, con una densidad Lagrangiana tal que las ecuaciones de Euler−Lagrange correspondientes del medio continuo den lugar a la ecuación KdV. Sin querer entrar en el detalle, innecesario en lo que sigue, se puede comprobar directamente que la densidad Lagrangiana para esta ecuación está representada por la expresión para la función auxiliar ϕ (siendo $u \equiv \phi_x$)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\phi_t\phi_x + \phi_x^3 - \frac{1}{2}\phi_{xx}^2 \equiv \mathcal{L}\left(\phi_t, \phi_x, \phi_{xx}\right) \tag{9.6.2}$$

  tal que las ecuaciones de Euler−Lagrange correspondientes del medio continuo[1]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_x}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{xx}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \tag{9.6.3}$$

  dan lugar efectivamente a la ecuación

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{9.6.4}$$

[1] Véase la analogía con las ecuaciones desarrolladas para el sistema dinámico discreto con Lagrangiano $L = L(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$ analizado en el Apéndice 2.10, y también el desarrollo completo en el continuo en el ejercicio 9.4.7.

- Uno de los ejemplos más significativos, también históricamente, y que tiene una representación KdV es la propagación de perturbaciones en la superficie de un fluido imcomprensible en aguas poco profundas (por ejemplo, un fluido en un canal). Es la incompresibilidad del fluido la que genera, por la cercanía del fondo del canal, la recirculación del mismo en el interior del canal, y es esta recirculación la que combina el efecto dispersivo, propio de la superficie fluido-aire, con el efecto no lineal que proviene de las propias ecuaciones de movimiento en el interior del fluido (ecuaciones de Navier-Stokes). Y como ejemplo, podemos ver sus dos límites: 1) cuando es despreciable el término no lineal (ecuación linealizada KdV) la dinámica es puramente dispersiva y cualquier perturbación en la superficie tiende a anularse, y 2) cuando es despreciable el efecto dispersivo (ecuación KdV no dispersiva) la dinámica es puramente no lineal, la perturbación crece en el tiempo, y *rompe* en un tiempo finito (equivalente al movimiento de ruptura de las olas en la costa, aunque en este caso el origen de la ruptura es distinto ya que la velocidad de propagación, cerca de la costa, es proporcional a la distancia h al fondo marino: la parte superior de la ola viaja a mayor velocidad que su parte inferior).

Descripción general y estabilidad del soliton Como primera conclusión, vemos que la posibilidad de tener ondas viajeras en la ecuación KdV proviene del efecto combinado de la dispersión con la no linealidad, y además el movimiento final dependerá exclusivamente de cuál sea la perturbación inicial $u(x,0)$. Lo que sucede en la práctica es que este perfil inicial contiene en su seno el germen de un conjunto de ondas solitarias (solitones), que mantendrán su forma a lo largo del tiempo, más una serie de ondas que serán dispersivas y que se anularán progresivamente a medida que transcurra el tiempo. Y en función de esta representación diremos que $u(x,0)$ genera una solución de $N = 0, 1, 2, ..$ solitones, dejando sin precisar la cuantía del régimen transitorio de las soluciones dispersivas. Desde el punto de vista energético, la energía inicial de $u(x,0)$ debe ser suficiente para crear los N solitones dados, de energías constantes, siendo la energía restante dispersada en el tiempo en el medio no lineal.
Y para finalizar la introducción lo relevante es entender qué parte de la dinámica posibilita la existencia y permanencia de soluciones localizadas:

- La cuestión clave reside en la *estabilidad* intrínseca del solitón: si añadimos una pequeña cantidad de ruido a la forma del solitón este *exceso* de forma respecto a lo que representa su solución matemática se verá dispersada hacia el exterior en forma de radiación, esto es, un paquete de ondas dispersivas que se anularán a medida que transcurra el tiempo. Y esta estabilidad reside en la representación de la solución del solitón, como combinación de un movimiento *modulado* ó colectivo (velocidad de grupo), a modo de estado ligado, y una parte dispersiva en constante creación y aniquilación.

9.6.2. Costrucción de $N = 1$ soliton. Ecuación KdV

Onda viajera Como hemos visto en el ejercicio 9.4.11, una *onda viajera* es la solución de la ecuación de movimiento que tiene la estructura, en un medio unidimensional,

$$u(x,t) = f(x - Vt) \tag{9.6.5}$$

donde f es una función arbitraria de su argumento $\xi \equiv x - Vt$. Para estas soluciones, la velocidad de propagación V de la perturbación puede ser

- Una constante dependiente de las propiedades del medio, como en el medio elástico homogéneo y lineal

$$V = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{9.6.6}$$

  siendo T la tensión elástica, y ρ la densidad de masa.

- Ó, un parámetro libre, independiente de las propiedades del medio, como sucede en la ecuación KdV.

El soliton KdV Queremos obtener la solución de onda viajera de la ecuación KdV

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{9.6.7}$$

sujeta a las condiciones frontera

$$u, u_x, u_{xx} \to 0 \quad , \quad x \to \pm\infty \tag{9.6.8}$$

para todo valor del tiempo t. Para ello, substituyendo la forma funcional $f(\xi)$, con $\xi = x - Vt$, en la ecuación KdV, aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{d}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \tag{9.6.9}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{d}{d\xi} = -V\frac{d}{d\xi} \tag{9.6.10}$$

obtenemos

$$-Vf' + 6ff' + f''' = 0 \tag{9.6.11}$$

De esta ecuación podemos obtener por integración directa una primera integral

$$-Vf + 3f^2 + f'' = A \tag{9.6.12}$$

siendo A una constante, y también una segunda integral, utilizando aquí el factor integrante f',

$$-\frac{V}{2}f^2 + f^3 + \frac{1}{2}\left(f'\right)^2 = Af + B \tag{9.6.13}$$

siendo B una segunda constante.
Para determinar las constantes A, B aplicamos las condiciones frontera, que respecto a la función f se escriben

$$f, f, f' \to 0 \quad , \quad \xi \to \pm\infty \tag{9.6.14}$$

con la solución

$$A = 0 \quad , \quad B = 0 \tag{9.6.15}$$

• Con este valor de las constantes, la función $f(\xi)$ tiene como solución la expresión por cuadraturas

$$\int \frac{df}{f\sqrt{V - 2f}} = \pm\xi \equiv \pm\left(x - Vt\right) \tag{9.6.16}$$

donde debe asegurarse que

$$V - 2f \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f \leq \frac{V}{2} \tag{9.6.17}$$

La solución explícita de esta cuadratura se obtiene fácilmente con el uso de tablas integrales, con el resultado

$$u(x,t) = f(x - Vt) = \frac{V}{2}\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{V}{2}}\left(x - Vt - x_0\right)\right) \tag{9.6.18}$$

siendo $x_0 = x(0)$. Esta solución de la ecuación KdV se denomina solución $1-$soliton. Sus propiedades básicas son:

- La función f no es negativa, y la velocidad de propagación necesariamente satisface

$$V \geq 0 \tag{9.6.19}$$

esto es, el $1-$soliton sólo puede propagarse en sentido creciente[1] de la coordenada x.

[1] Existe una solución adicional para la función f, que se propaga en sentido x decreciente, pero tiene comportamiento divergente, por lo que físicamente no es admisible.

- Para una velocidad V dada, la altura de la onda (magnitud de la función f) es proporcional a V, y su anchura tiene la relación funcional, para tiempo constante,

$$\sqrt{\frac{V}{2}}\Delta x = \text{cte} \quad \Longrightarrow \quad \Delta x \propto \frac{1}{\sqrt{V}} \tag{9.6.20}$$

- La posición central de la onda se localiza en

$$x - x_0 - Vt = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = x_0 + Vt \tag{9.6.21}$$

  esto es, se desplaza espacialmente con la velocidad constante V, desde su posición inicial x_0 en $t = 0$.

- Pueden aplicarse otras condiciones frontera a la ecuación de movimiento que dan lugar a otro tipo de modelos. Por ejemplo para la propagación de la perturbación a lo largo de una circunferencia utilizaríamos condiciones periódicas, en cuyo caso obtendríamos como resultado unas constantes $A, B \neq 0$. Sí obtendríamos de nuevo una velocidad de propagación única en el sentido creciente de la coordenada angular definida sobre la circunferencia.

9.6.3. Construcción de $N = 1$ soliton. Ecuación de seno-Gordon

Ecuación de seno−Gordon Una de las ecuaciones de campo más importantes de la Física teórica es la denominada *ecuación de Klein-Gordon*, descrita en la sección 10.3.3, dedicada a la teoría clásica de esta ecuación. Es la ecuación cuántica relativista por excelencia, definida por la expresión

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} + m^2 u = 0 \tag{9.6.22}$$

siendo c la velocidad de la luz y m la masa en reposo de la partícula del campo, y su importancia reside en que cada partícula relativista de masa m, independientemente de su estructura interna, satisface esta ecuación[1].

• Por su parecido con la ecuación relativista, tomando arbitrariamente $c \equiv 1$, $m \equiv 1$, la ecuación no relativista

$$u_{tt} - u_{xx} + \operatorname{sen} u = 0 \tag{9.6.23}$$

se denomina *ecuación de seno−Gordon*, donde ahora la perturbación $u(x,t)$ debe definirse como una variable angular (un *ángulo*) de periodo 2π, al ser

$$u \to u + 2\pi \quad \Longrightarrow \quad u_{tt} - u_{xx} + \operatorname{sen} u = 0 \to u_{tt} - u_{xx} + \operatorname{sen} u = 0 \tag{9.6.24}$$

Modelo mecánico para la ecuación de seno−Gordon Es fácil ver cuál es el modelo mecánico que subyace en la ecuación de seno−Gordon. Teniendo en cuenta que la variable dependiente u debe ser una variable angular, recordando la ecuación del movimiento de oscilación de un péndulo simple para ángulos arbitrarios (y frecuencia ω unitaria)

$$\ddot{u} + \operatorname{sen} u = 0 \tag{9.6.25}$$

y teniendo en cuenta la expresión de la fuerza de interacción entre las masas vecinas discretas en una cuerda sometida a una tensión unitaria (véase la sección 9.1.1)

$$F = u_{xx}dx \quad \Longrightarrow \quad f \equiv \frac{F}{dx} = u_{xx} \tag{9.6.26}$$

[1] Más exactamente cada componente de la función de onda que representa la partícula relativista satisface la ecuación de Klein-Gordon. Como ejemplo, el electrón, como partícula cuántica relativista, está representado por una función de onda Ψ espinorial, solución de la ecuación de Dirac, y dado que cada componente de la función Ψ define un estado único del electrón, cada componente está definiendo a su vez un campo escalar relativista, solución de la ecuación de Klein-Gordon.

concluimos que la ecuación

$$u_{tt} - u_{xx} + \operatorname{sen} u = 0 \tag{9.6.27}$$

representa el límite continuo de un conjunto indefinido undimensional de péndulos discretos sometidos tanto a la acción de la gravedad como a la interacción elástica producida por una cuerda de tensión constante que los liga entre sí. Esto es, substituimos en el modelo de la cuerda con masa cada masa elemental por la masa elemental de un péndulo simple de frecuencia unitaria.

Características básicas de la solución. Soluciones *kink* y *antikink* Utilizando este modelo mecánico para representar la solución de la ecuación de seno−Gordon, podemos adelantar alguna de sus características básicas:

- El estado de menor energía corresponde al conjunto de péndulos en reposo en su posición más baja, de forma que la cuerda que los une se sitúa en posición horizontal y la energía elástica es nula, como corresponde al estado de equilibrio de la cuerda con masa (sección 9.1.1). En el límite continuo este estado corresponde a la perturbación angular nula

  $$\theta(x,t) = 0 \tag{9.6.28}$$

  para todo valor de x y todo valor del tiempo t.

- Por definición una *onda* estará representada por cualquier solución de la ecuación de seno−Gordon que satisface las condiciones frontera $\theta(\pm\infty, t) \to 0$ para todo t, esto es, es una perturbación que se genera de forma continua a partir del estado de menor energía, que se propaga a lo largo del sistema y que se anula en el infinito[1].

Existirán también ondas que anulándose en el infinito correspondan al valor $\theta \to 0$, módulo 2π, esto es, $\theta \to 2\pi$ en el infinito. Estas soluciones representan una perturbación que se da vuelta sobre sí misma generando un *pliegue* ó *kink* en inglés. En particular un *kink* se definirá como una perturbación que satisface en el infinito

$$\theta(\infty, t) - \theta(-\infty, t) = 2\pi \tag{9.6.29}$$

y respectivamente un *antikink* será la perturbación que satisface en el infinito

$$\theta(\infty, t) - \theta(-\infty, t) = -2\pi \tag{9.6.30}$$

Las soluciones kink y antikink tienen una peculiaridad muy importante. Mientras que en general cualquier onda producida en el sistema está generada de forma continua respecto al estado de equilibrio (estado de menor energía), estas dos soluciones no pueden generarse de forma continua desde el equilibrio sino que corresponden a un *cambio topológico* generado en el sistema. Y como tal cambio topológico no representan un cambio admisible desde el punto de vista físico:

- el cambio en la disposición relativa de los péndulos en un valor 2π se consigue permitiendo que el péndulo gire un ángulo 2π manteniendo invariable la distribución geométrica de los mismos, y ésto sólo puede realizarse invirtiendo el sentido de las tensiones elásticas, lo que corresponde a una física *distinta*, esto es, define un cambio *topológico*. Y viceversa, cuando se produce una de estas soluciones en el sistema no alcanzaremos por disipación de la energía el estado de equilibrio del sistema, esto es, este tipo de soluciones serán topológicamente estables. Y por ello la cuestión clave será conocer qué tipo de condiciones frontera satisfacen las soluciones que estamos planteando en cada caso.

Análisis de ondas viajeras Queremos obtener por tanto las soluciones de onda viajera para la ecuación de seno−Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} + \operatorname{sen} u = 0 \tag{9.6.31}$$

con las condiciones frontera

$$u, u_x(x,t) \to 0 \quad , \quad x \to \pm\infty \tag{9.6.32}$$

[1] Esta condición es equivalente a definir el infinito como el punto sobre el eje x donde se extingue, esto es, se hace nula idénticamente, la perturbación $\theta(x,t)$ generada en el sistema.

para todo t, recordando que siendo u una variable angular u puede cambiar en múltiplos de 2π sin alterar la condición frontera, esto es, también es válido por ejemplo

$$u \to 2\pi \quad , \quad u_x(x,t) \to 0 \quad , \quad x \to \pm\infty \tag{9.6.33}$$

• Substituyendo la forma funcional $f(\xi)$, con $\xi = x - Vt$, en la ecuación, aplicando la regla de la cadena, de forma similar a lo realizado en la ecuación KdV, obtenemos

$$\left(1 - V^2\right) f'' = \operatorname{sen} f \quad \Longrightarrow \quad f'' = \gamma^2 \operatorname{sen} f \tag{9.6.34}$$

siendo

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \tag{9.6.35}$$

el denominado *factor de contracción*. Aplicando el factor de integración f', obtenemos una primera integral e la forma

$$\frac{1}{2}\left(f'\right)^2 = A - \gamma^2 \cos f \tag{9.6.36}$$

siendo A una constante cuyo valor resulta de la condición frontera

$$f \to 0 \quad , \quad f' \to 0 \quad \Longrightarrow \quad A = \gamma^2 \tag{9.6.37}$$

• Aplicando este valor de la constante A, obtenemos una segunda integral

$$f' = \pm 2\gamma \operatorname{sen} \frac{f}{2} \tag{9.6.38}$$

de la cual deducimos que la función f tiene la solución por cuadraturas

$$\int \frac{df}{2 \operatorname{sen} \frac{f}{2}} = \pm\gamma \left(x - x_0 - Vt\right) \tag{9.6.39}$$

siendo $x_0 = x(0)$. Utilizando tablas integrales, es directo obtener la solución analítica de esta cuadratura en la forma

$$u(x,t) = f(x - Vt) = 4 \arctan\left(e^{\pm\gamma(x - x_0 - Vt)}\right) \tag{9.6.40}$$

Para interpretar el significado de los dos posibles signos, analizamos la expresión resultante

$$e^{\pm\gamma(x - x_0 - Vt)} = \tan\frac{u}{4} \tag{9.6.41}$$

en los límites

$$x \to \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad \xi \equiv x - Vt \to \pm\infty \tag{9.6.42}$$

al ser t un parámetro positivo finito, con las siguientes conclusiones:

(a) La ecuación de seno−Gordon no admite soluciones de onda usuales, con las condiciones frontera $u \to 0$ en $x \to \pm\infty$. Matemáticamente no existe ningún valor de la velocidad V que dé lugar a este comportamiento de la función u en estos límites. Según el signo $\pm$ que elijamos podremos obtener $u \to 0$ en uno de los límites, pero no en los dos como exige la propagación de una onda viajera usual, esto es, generada desde el estado de equilibrio de forma continua.

(b) Este resultado nos deja únicamente con la posibilidad de tener propagación de kinks o antikinks dependiendo del signo elegido para el exponente de la exponencial. En particular, con el signo positivo

$$e^{\gamma(x - x_0 - Vt)} = \tan\frac{u}{4} \tag{9.6.43}$$

tenemos $u \to 0$ en $x \to -\infty$ al ser $\gamma > 0$, y el valor en $x \to +\infty$

$$\tan\frac{u_\infty}{4} = e^{\infty} = \infty \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_\infty}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad u_\infty = 2\pi \tag{9.6.44}$$

y por tanto tenemos la propagación de un kink.

(c) Así mismo, con el signo negativo

$$e^{-\gamma(x-x_0-Vt)} = \tan\frac{u}{4} \tag{9.6.45}$$

tenemos $u \to 0$ en $x \to \infty$ al ser $\gamma > 0$, y el valor en $x \to -\infty$

$$\tan\frac{u_{-\infty}}{4} = e^{\infty} = \infty \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_{-\infty}}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad u_{-\infty} = 2\pi \tag{9.6.46}$$

y por tanto tenemos la propagación de un antikink.

(d) En cualquiera de estos dos casos el resultado es independiente del signo de la velocidad, ya que sólo depende del valor de γ, siempre positivo. Tendremos por tanto una propagación de un kink/antikink en sentido creciente de la coordenada x cuando $V > 0$, y una propagación de un kink/antikink en sentido decreciente de la coordenada x cuando $V < 0$. El caso $V = 0$ corresponderá en ambos casos a una perturbación estática, esto es, se mantendrá el valor en los límites y no cambiará la forma de la perturbación en el tiempo.

(e) Finalmente la posición central de la onda viajera se localiza en

$$x - x_0 - Vt = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = x_0 + Vt \tag{9.6.47}$$

esto es, se desplaza espacialmente con la velocidad constante V, desde su posición inicial x_0 en $t = 0$, y su anchura, para una velocidad V dada, tiene la relación funcional, para tiempo constante,

$$\gamma\Delta x = \text{cte} \quad \Longrightarrow \quad \Delta x \propto \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - V^2} \tag{9.6.48}$$

lo que indica que cuánto más rápido se mueva la perturbación más estrecho será su perfil, en analogía con el efecto de contracción relativista de Lorentz, de ahí la definición del factor γ.

9.6.4. Cantidades conservadas. Ecuación KdV

En general, con el conocimiento de las cantidades conservadas de un sistema podremos obtener la características físicas propias de su dinámica. Aquí en particular nos interesa encontrar la relación existente entre las cantidades conservadas de la ecuación KdV y el comportamiento estable de sus soluciones, los solitones, frente a las interacciones.

Cantidad conservada Nuestro análisis en particular se centra en las cantidades genéricas

$$Q \equiv \int \rho\left(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, ..\right) dx \tag{9.6.49}$$

que serán constantes del movimiento, cantidades conservadas, si se satisface idénticamente

$$\frac{dQ}{dt} \equiv 0 \tag{9.6.50}$$

cuando u es solución de la ecuación de movimiento, en este caso, la ecuación KdV. La conclusión a la que llegaremos es que la ecuación KdV tiene infinitas cantidades conservadas, y por tanto, el sistema dinámico es totalmente integrable, y sus soluciones son estables, esto es, permanecen invariables en el tiempo.

Ecuación de continuidad Como primer paso, escribimos la ecuación KdV como una *ecuación de continuidad*, en la forma

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + u_{xx}\right) = 0 \tag{9.6.51}$$

de forma que si definimos la cantidad Q en la forma

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} u dx \tag{9.6.52}$$

deducimos que su variación temporal está dada por la expresión

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + u_{xx}\right) dx = -\left(3u^2 + u_{xx}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} \tag{9.6.53}$$

y aplicando entonces las condiciones para la función u y sus derivadas espaciales en la fronteras del sistema,

$$u, u_x, u_{xx} \to 0 \quad , \quad x \to \pm\infty \tag{9.6.54}$$

obtenemos

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u dx = \text{cte} \tag{9.6.55}$$

Dado que u es la perturbación *transversal* a la dirección longitudinal x, esta cantidad Q equivale al volumen del sistema bajo la perturbación, y su conservación representa la conservación del volumen espacial de la onda a lo largo de su propagación.

Momento y energía Podemos ver de forma directa que las integrales espaciales de las funciones u^2 y u^3 también están relacionadas con cantidades conservadas, en virtud de nuevo de la existencia de nuevas ecuaciones de continuidad. En particular tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}u^2 = 2uu_t = -2u\frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + u_{xx}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-4u^3 - 2uu_{xx} + u_x^2\right) \tag{9.6.56}$$

por lo que aplicando de nuevo las condiciones frontera en el infinito, tenemos directamente

$$Q \equiv \int u^2 dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q = \text{cte} \tag{9.6.57}$$

que podemos interpretar como la conservación del *momento* de la onda. De modo análogo podemos obtener la ley de conservación de la cantidad

$$Q \equiv \int \left(u^3 - \frac{1}{2}u_x^2\right) dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q = \text{cte} \tag{9.6.58}$$

que podemos interpretar como la conservación de la energía de la onda.

Teorema de Noether Sin entrar en el detalle de la demostración, podemos comprobar que los resultados anteriores son los correctos aplicando el teorema de Noether a la densidad Lagrangiana de la ecuación KdV, representada por la expresión para la función auxiliar ϕ (siendo $u \equiv \phi_x$, véase la sección 9.6.1)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\phi_t\phi_x + \phi_x^3 - \frac{1}{2}\phi_{xx}^2 \equiv \mathcal{L}\left(\phi_t, \phi_x, \phi_{xx}\right) \tag{9.6.59}$$

para cada una de las simetrías del sistema, frente a la traslación de la función auxiliar ϕ

$$u \to u + \varepsilon \tag{9.6.60}$$

que da lugar a la conservación del volumen, frente a la traslación espacial

$$x \to x + \varepsilon \tag{9.6.61}$$

que da lugar a la conservación del momento, y frente a la traslación temporal

$$t \to t + \varepsilon \tag{9.6.62}$$

que da lugar a la conservación de la energía.

Cantidades conservadas adicionales Sin entrar en la demostración, para la ecuación KdV existen infinitas cantidades conservadas, que tienen la estructura general

$$Q_n \equiv \int (u^n + ..)\, dx \tag{9.6.63}$$

donde los puntos suspensivos se refieren a los términos dependientes de la función u y sus derivadas que establecen las ecuaciones de continuidad necesarias para dar lugar a cada ley de conservación, análogas a las obtenidas anteriormente. Como ejemplo, tenemos la cantidad conservada adicional

$$Q_4 \equiv \int \left(u^4 - 2uu_x^2 + \frac{1}{5}u_{xx}^2 \right) dx \tag{9.6.64}$$

9.7. Ejercicios resueltos

9.7.1. Familia paramétrica de soluciones para ecuación KdV

(a) Demuestre que si $u(x,t) \equiv g(x,t)$ es solución de la ecuación KdV, también lo será la función $u(x,t) = Ag(Bx, Ct)$ probado que las constantes B, C están relacionadas con la constante A de una forma que deberá determinar.

(b) Aplique la propiedad de transformación del apartado **(a)** y construya una solución uniparamétrica de soluciones de $1-$soliton para la ecuación KdV.

(c) Para esta familia uniparamétrica, determine la relación velocidad$-$altura que satisfacen estas soluciones de $1-$soliton.

(a) La demostración es directa. Eligiendo las variables independientes en la forma

$$z \equiv Bx \quad , \quad \tau = Ct \tag{9.7.1}$$

la solución a la ecuación KdV tiene la representación funcional

$$u(x,t) = Ag(z,\tau) \tag{9.7.2}$$

y se debe satisfacer por tanto

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad g_\tau + 6\frac{AB}{C} g g_z + \frac{B^3}{C} g_{zzz} = 0 \tag{9.7.3}$$

Por otro lado, la propia función g es solución de la ecuación KdV, respecto a sus argumentos, esto es,

$$g_\tau + 6gg_z + g_{zzz} = 0 \tag{9.7.4}$$

Dado que estas dos ecuaciones no pueden ser independientes entre sí, ya que tendríamos entonces dos ecuaciones de movimiento distintas para una misma perturbación, se satisface la igualdad de los coeficientes

$$\frac{AB}{C} = 1 \quad , \quad \frac{B^3}{C} = 1 \tag{9.7.5}$$

con la solución, en términos de la constante A,

$$B = A^{1/2} \quad , \quad C = A^{3/2} \tag{9.7.6}$$

y vemos además que A necesariamente tiene un valor positivo, $A > 0$.

(b) Construimos la solución uniparamétrica de $1-$soliton a partir de la propia solución $0-$paramétrica de $1-$ soliton para la función $g(z,\tau)$ de la forma usual (véase la sección 9.6.2)

$$g(z,\tau) = f(z-\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{sech}^2 \frac{1}{\sqrt{2}}(z-\tau) \tag{9.7.7}$$

con el resultado

$$u(x,t) \equiv Af\left(A^{1/2}x - A^{3/2}t\right) = \frac{A}{2}\text{sech}^2\frac{A}{\sqrt{2}}\left(x - At\right) \tag{9.7.8}$$

que corresponde, como esperabamos, a la solución obtenida en la sección 9.6.2 con la identificación $A \equiv V$, siendo V la velocidad de propagación de la onda.

(c) Para esta solución $u(x,t)$ su altura h está dada por el propio parámetro A

$$h = \frac{A}{2} \tag{9.7.9}$$

y podemos obtener su velocidad aplicando la condición de fase constante en los frentes de onda

$$\frac{A}{\sqrt{2}}\left(x - At\right) = \text{cte} \quad \Longrightarrow \quad d(x - At) = 0 \quad \Longrightarrow \quad V \equiv \frac{dx}{dt} = A \tag{9.7.10}$$

siendo, por tanto, A la velocidad con la que se propagan los frentes de onda de la perturbación, como ya indicamos en el apartado anterior. De ambos resultados, obtenemos una relación lineal altura−velocidad para esta solución paramétrica

$$h \propto A \equiv V \tag{9.7.11}$$

Esto es, las ondas se propagan con una velocidad proporcional a su altura.

9.7.2. Soluciones tipo onda viajera para condiciones frontera seleccionadas

Obtenga, en el caso de que sea posible, las soluciones de onda viajera para las siguientes ecuaciones del movimiento, y las siguientes condiciones frontera:

(a) Ecuación modificada KdV (ecuación mKdV):

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad , \quad (u, u_x, u_{xx}) \to 0 \quad , \quad x \to \pm\infty \tag{9.7.12}$$

(b) Ecuación mKdV cambiada de signo:

$$u_t - 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad , \quad (u, u_x, u_{xx}) \to 0 \quad , \quad x \to \pm\infty \tag{9.7.13}$$

(c) Teoría de campo ϕ^4:

$$\begin{aligned} & u_{tt} - u_{xx} + 2u\left(u^2 - 1\right) = 0 \\ & u_t \to 0 \quad , \quad u_x \to 0 \quad , \quad u \to -1 \quad , \quad x \to -\infty \\ & u_t \to 0 \quad , \quad u_x \to 0 \quad , \quad u \to +1 \quad , \quad x \to +\infty \end{aligned} \tag{9.7.14}$$

(d) Teoría de campo ϕ^6:

$$\begin{aligned} & u_{tt} - u_{xx} + u\left(u^2 - 1\right)\left(3u^2 - 1\right) = 0 \\ & u_t \to 0 \quad , \quad u_x \to 0 \quad , \quad u \to 0 \quad , \quad x \to -\infty \\ & u_t \to 0 \quad , \quad u_x \to 0 \quad , \quad u \to +1 \quad , \quad x \to +\infty \end{aligned} \tag{9.7.15}$$

(e) Ecuación de Burgers:

$$\begin{aligned} & u_t + uu_x - u_{xx} = 0 \\ & u \to u_0 \quad , \quad u_x \to 0 \quad , \quad x \to -\infty \\ & u \to u_1 \quad , \quad u_x \to 0 \quad , \quad x \to +\infty \end{aligned} \tag{9.7.16}$$

siendo u_0, u_1 constantes, con $u_0 > u_1 > 0$.

(f) Ecuación KdV generalizada, para $n = 1, 2, 3, ..$:

$$\begin{aligned} & u_t + (n+1)(n+2)u^n u_x + u_{xxx} = 0 \\ & u \to 0 \quad , \quad u_x \to 0 \quad , \quad u_{xx} \to 0 \quad , \quad x \to \pm\infty \end{aligned} \tag{9.7.17}$$

(a) El procedimiento en todos los casos es similar al desarrollado en la sección 9.6.2. Con el cambio de variable independiente

$$\xi \equiv x - Vt \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} = -V\frac{d}{d\xi} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi} \tag{9.7.18}$$

la ecuación para la perturbación

$$u(x,t) = f(x - Vt) \equiv f(\xi) \tag{9.7.19}$$

en forma de onda viajera se reduce a

$$-Vf' + 6f^2 f' + f''' = 0 \tag{9.7.20}$$

Una primera integración directa en ξ da como resultado

$$-Vf + 2f^3 + f'' = C_1 \tag{9.7.21}$$

siendo C_1 una constante, cuyo valor determinamos aplicando las condiciones frontera para la perturbación, indicadas en el enunciado

$$(u, u_x, u_{xx}) \to 0 \quad , \quad x \to \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad \left(f, f', f''\right) \to 0 \tag{9.7.22}$$

con el resultado

$$C_1 \equiv -Vf + 2f^3 + f''\Big|_{x\to\infty} = 0 \tag{9.7.23}$$

Multiplicando la ecuación resultante por el factor integrante f', una segunda integración en ξ da como resultado

$$-\frac{V}{2}f^2 + \frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{2}f'^2 = C_2 \tag{9.7.24}$$

siendo de nuevo

$$C_2 \equiv -\frac{V}{2}f^2 + \frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{2}f'^2\Big|_{x\to\infty} = 0 \tag{9.7.25}$$

La ecuación resultante ya puede ser integrada en forma de cuadraturas para la función f, en la forma

$$f'^2 = Vf^2 - f^4 \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{df}{\sqrt{Vf^2 - f^4}} = \pm\xi \tag{9.7.26}$$

que tiene la resolución analítica

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\tanh^{-1}\sqrt{\frac{V-f^2}{V}} = \pm\xi \quad \Longrightarrow \quad f = \sqrt{V}\,\mathrm{sech}\left(\sqrt{V}\,(x - Vt)\right) \tag{9.7.27}$$

siendo necesario que $V > 0$. Esta condición impone un signo a la velocidad de propagación, por lo que en este caso las ondas sólo se podrán propagar en el sentido positivo del eje de coordenadas.

(b) Siguiendo los mismos pasos que en el apartado anterior, para este modelo la cuadratura para la función f resulta ser

$$f'^2 = Vf^2 + f^4 \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{df}{\sqrt{Vf^2 + f^4}} = \pm\xi \tag{9.7.28}$$

que tiene la resolución analítica

$$\frac{1}{V}\tanh^{-1}\sqrt{\frac{V+f^2}{V}} = \pm\xi \quad \Longrightarrow \quad f = |V|\,\mathrm{sech}\left(V\,(x - Vt)\right) \tag{9.7.29}$$

pero en este caso es necesario que

$$\frac{V+f^2}{V} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad f^2 \leq 0 \tag{9.7.30}$$

lo que no es admisible físicamente. Esto indica que este modelo no permite la propagación de ondas viajeras. Físicamente las ondas producidas en el medio se ven disipadas en el tiempo y no se propagan.

(c) Con el cambio de variable independiente

$$\xi \equiv x - Vt \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} = -V\frac{d}{d\xi} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi} \tag{9.7.31}$$

la ecuación para la perturbación

$$u(x,t) = f(x - Vt) \equiv f(\xi) \tag{9.7.32}$$

en forma de onda viajera se reduce a

$$V^2 f'' - f'' + 2f\left(f^2 - 1\right) = 0 \tag{9.7.33}$$

Utilizando la regla de la cadena tenemos por un lado

$$f'' \equiv \frac{1}{2}\frac{df'^2}{df} \tag{9.7.34}$$

y por tanto

$$\frac{1}{2}\left(V^2-1\right)\frac{df'^2}{df} + 2f\left(f^2-1\right) = 0 \tag{9.7.35}$$

que tiene una integración directa en forma de cuadratura

$$f'^2 = -\frac{4}{V^2-1}\int f\left(f^2-1\right)df = -\frac{4}{V^2-1}\left(\frac{1}{4}f^4 - \frac{1}{2}f^2\right) + C_1 \tag{9.7.36}$$

Aplicando las condiciones frontera

$$\begin{array}{llll} u_t \to 0 \quad , \quad u_x \to 0 \quad , \quad u \to -1 \quad , \quad x \to -\infty & \Longrightarrow & \left(f, f'\right) \to (-1, 0) \\ u_t \to 0 \quad , \quad u_x \to 0 \quad , \quad u \to +1 \quad , \quad x \to +\infty & \Longrightarrow & \left(f, f'\right) \to (+1, 0) \end{array} \tag{9.7.37}$$

que podemos reducir a la expresión única

$$x \to \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad \left(f^2, f'\right) \to (1, 0) \tag{9.7.38}$$

obtenemos el valor de la constante de integración C_1

$$C_1 \equiv f'^2 + \frac{4}{V^2-1}\left(\frac{1}{4}f^4 - \frac{1}{2}f^2\right)\Big|_{(f^2,f')\to(1,0)} = \frac{1}{1-V^2} \tag{9.7.39}$$

con lo cual obtenemos la expresión de la cuadratura anterior en la forma

$$f'^2 = \frac{1}{1-V^2}\left(f^4 - 2f^2 + 1\right) = \frac{1}{1-V^2}\left(f^2-1\right)^2 \tag{9.7.40}$$

Considerando arbitrariamente el intervalo de definición para la función f

$$0 < f^2 < 1 \tag{9.7.41}$$

de la expresión anterior podemos obtener la cuadratura final en la forma

$$\int \frac{df}{1-f^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\xi \tag{9.7.42}$$

con la resolución analítica

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+f}{1-f} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\xi + C_2 \tag{9.7.43}$$

siendo C_2 la constante de integración. Para elegir correctamente el signo en esta expresión, revisamos las condiciones frontera. Vemos que para $x \to +\infty$, $f \to +1$, resultado que corresponde al signo $+$ en la expresión anterior, con un valor irrelevante para C_2, y que podemos tomar por simplicidad $C_2 \equiv 0$. Esta solución obtenida también satisface la otra condición frontera $f \to -1$ en $x \to -\infty$. Por lo tanto, tenemos la solución completa

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+f}{1-f} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\xi \quad \Longrightarrow \quad f = \tanh\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\left(x - Vt\right)\right) \tag{9.7.44}$$

en la que necesariamente la velocidad de propagación tiene la limitación

$$V^2 < 1 \tag{9.7.45}$$

Esta cota no afecta al signo de V, por lo que las ondas se podrán propagar en el ambos sentidos del eje de coordenadas. Es una solución tipo kink, analizadas en la sección 9.6.3.

(d) El procedimiento es análogo al realizado en el apartado anterior. Obtenemos en este caso la solución por cuadratura

$$\frac{1}{2}\left(V^2-1\right)\frac{df'^2}{df}+f\left(f^2-1\right)\left(3f^2-1\right)=0 \tag{9.7.46}$$

que tiene una integración directa en forma de cuadratura

$$f'^2=\frac{2}{1-V^2}\int f\left(f^2-1\right)\left(3f^2-1\right)df=\frac{1}{1-V^2}f^2\left(f^2-1\right)^2+C_1 \tag{9.7.47}$$

Aplicando las condiciones frontera, que podemos reducir a la expresión única

$$x\to\pm\infty \quad\Longrightarrow\quad \left(f^2\left(f^2-1\right)^2,f'\right)\to(0,0) \tag{9.7.48}$$

obtenemos el valor de la constante de integración $C_1\equiv 0$, con lo cual obtenemos la expresión de la cuadratura anterior en la forma

$$f'^2=\frac{1}{1-V^2}f^2\left(f^2-1\right)^2 \tag{9.7.49}$$

Considerando arbitrariamente el intervalo de definición para la función f

$$0<f<1 \tag{9.7.50}$$

de la expresión anterior podemos obtener la cuadratura final en la forma

$$\int\frac{df}{f(1-f^2)}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\xi \tag{9.7.51}$$

con la resolución analítica

$$\ln\frac{f}{\sqrt{1-f^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\xi+C_2 \tag{9.7.52}$$

siendo C_2 la constante de integración. Para elegir correctamente el signo en esta expresión, revisamos a las condiciones frontera. Vemos que para $x\to+\infty$, $f\to+1$, resultado que corresponde al signo $+$ en la expresión anterior, con un valor irrelevante para C_2, y que podemos tomar por simplicidad $C_2\equiv 0$. Esta solución obtenida también satisface la otra condición frontera $f\to 0$ en $x\to-\infty$. Por lo tanto, tenemos la solución completa

$$\ln\frac{f}{\sqrt{1-f^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\xi \quad\Longrightarrow\quad f=\frac{e^{\Gamma}}{\sqrt{1+e^{2\Gamma}}} \quad,\quad \Gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\left(x-Vt\right) \tag{9.7.53}$$

en la que necesariamente la velocidad de propagación tiene la limitación

$$V^2<1 \tag{9.7.54}$$

Esta cota no afecta al signo de V, por lo que las ondas se podrán propagar en el ambos sentidos del eje de coordenadas. Es una solución del tipo kink, analizadas en la sección 9.6.3.

(e) Con el cambio de variable independiente

$$\xi\equiv x-Vt \quad,\quad \frac{\partial}{\partial t}=-V\frac{d}{d\xi} \quad,\quad \frac{\partial}{\partial x}=\frac{d}{d\xi} \tag{9.7.55}$$

la ecuación para la perturbación

$$u(x,t)=f(x-Vt)\equiv f(\xi) \tag{9.7.56}$$

en forma de onda viajera se reduce a

$$-Vf' + ff' - f'' = 0 \tag{9.7.57}$$

que tiene una primera integración directa con el resultado

$$-Vf + \frac{1}{2}f^2 - f' = C_1 \tag{9.7.58}$$

Para obtener el valor de la constante de integración, aplicamos por separado las dos condiciones frontera con el resultado

$$C_1 \equiv -Vf + \frac{1}{2}f^2 - f'\Big|_{f'\to 0,\, f\to u_0} = -Vu_0 + \frac{1}{2}u_0^2 \tag{9.7.59}$$

y también

$$C_1 \equiv -Vf + \frac{1}{2}f^2 - f'\Big|_{f'\to 0,\, f\to u_1} = -Vu_1 + \frac{1}{2}u_1^2 \tag{9.7.60}$$

Dado que según indica el enunciado tenemos $u_0 > u_1 > 0$, ambos resultados son incompatibles salvo que la velocidad de propagación esté limitada al valor único V^* tal que

$$-Vu_0 + \frac{1}{2}u_0^2 \equiv -Vu_1 + \frac{1}{2}u_1^2 \quad \Longrightarrow \quad V^* = \frac{u_0 + u_1}{2} \tag{9.7.61}$$

en cuyo caso el valor de C_1 es

$$C_1 = -V^*u_0 + \frac{1}{2}u_0^2 = -\frac{u_0 u_1}{2} \tag{9.7.62}$$

Una vez obtenido el valor de C_1, a partir de la ecuación anterior, podemos obtener la solución para f en la forma de cuadratura

$$f' = \frac{1}{2}f^2 - V^*f - C_1 \equiv \frac{1}{2}\left((f - V^*)^2 - U^2\right) \Longrightarrow \quad \int \frac{df}{(f - V^*)^2 - U^2} = \frac{1}{2}\xi \tag{9.7.63}$$

donde hemos definido

$$V^* = \frac{u_0 + u_1}{2} > 0 \quad , \quad U \equiv \frac{u_0 - u_1}{2} > 0 \tag{9.7.64}$$

con el resultado analítico

$$f = V^* + U\tanh\left(\frac{1}{2}U\left(x - V^*t\right)\right) \tag{9.7.65}$$

(f) Con el cambio de variable independiente

$$\xi \equiv x - Vt \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} = -V\frac{d}{d\xi} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi} \tag{9.7.66}$$

la ecuación para la perturbación

$$u(x,t) = f(x - Vt) \equiv f(\xi) \tag{9.7.67}$$

en forma de onda viajera se reduce a

$$-Vf' + (n+1)(n+2)f^n f' + f''' = 0 \tag{9.7.68}$$

Una primera integración directa en ξ da como resultado

$$-Vf + (n+2)f^{n+1} + f'' = C_1 \tag{9.7.69}$$

siendo C_1 una constante, cuyo valor determinamos aplicando las condiciones frontera para la perturbación, indicadas en el enunciado

$$(u, u_x, u_{xx}) \to 0 \quad , \quad x \to \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad \left(f, f', f''\right) \to 0 \tag{9.7.70}$$

con el resultado

$$C_1 \equiv -Vf + (n+2)f^{n+1} + f''\Big|_{x\to\infty} = 0 \tag{9.7.71}$$

Multiplicando la ecuación resultante por el factor integrante f', una segunda integración en ξ da como resultado

$$-\frac{V}{2}f^2 + f^{n+2} + \frac{1}{2}f'^2 = C_2 \tag{9.7.72}$$

siendo de nuevo

$$C_2 \equiv -\frac{V}{2}f^2 + f^{n+2} + \frac{1}{2}f'^2\Big|_{x\to\infty} = 0 \tag{9.7.73}$$

La ecuación resultante ya puede ser integrada en forma de cuadraturas para la función f, en la forma

$$f'^2 = Vf^2 - 2f^{n+2} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{df}{\sqrt{Vf^2 - 2f^{n+2}}} = \pm\xi \tag{9.7.74}$$

que tiene la resolución analítica

$$\frac{2}{n\sqrt{V}}\tanh^{-1}\sqrt{\frac{V-f^n}{V}} = \pm\xi \quad \Longrightarrow \quad f = V^{1/n}\mathrm{sech}^{2/n}\left(\frac{n}{2}\sqrt{V}\,(x-Vt)\right) \tag{9.7.75}$$

siendo necesario que $V > 0$. Esta condición impone un signo a la velocidad de propagación, por lo que en este caso las ondas sólo se podrán propagar en el sentido positivo del eje de coordenadas.

9.7.3. Cotas de energía para ondas viajeras. I

Considere un campo $u(x,t)$ con energía cinética T y potencial V dadas por las expresiones

$$T = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u_t^2 dx \quad , \quad V = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}u_x^2 + \frac{\lambda}{2}\left(u^2-a^2\right)^2\right]dx \tag{9.7.76}$$

siendo a y $\lambda > 0$ constantes, y cuya ecuación de movimiento está dada por

$$u_{tt} - u_{xx} + 2\lambda u\left(u^2-a^2\right) = 0 \tag{9.7.77}$$

(a) Determine las condiciones frontera que debe satisfacer $u(x,t)$ en el infinito, $x \to \pm\infty$, para que su energía total sea finita.

(b) Obtenga las soluciones de onda viajera del campo u, que satisfacen las condiciones frontera del apartado **(a)**, calculando su energía total. Determine la velocidad de la onda resultante que corresponde a la energía mínima.

(c) Una de las posibles condiciones frontera del apartado **(a)** consiste en fijar el valor

$$u(x,t)\big|_{-\infty}^{+\infty} = 2a \tag{9.7.78}$$

Demuestre que en este caso la energía del sistema está acotada por debajo por el valor $C\sqrt{\lambda}a^3$, siendo C una constante que debe determinar. Obtenga la solución cuya energía es igual a esta cota, y muestre que corresponde efectivamente a una solución de energía mínima, descrita en el apartado **(b)**.

(a) La energía total de la perturbación es, por definición,

$$E \equiv T + V \tag{9.7.79}$$

y está dada por la suma de las dos contribuciones integrales del enunciado que se extienden a las fronteras del medio en el infinito. Un resultado infinito en el cálculo de E puede tener dos orígenes: una singularidad de $u(x,t)$ en el interior del medio, lo que no es físicamente aceptable,

ó una contribución no nula en el infinito, esto es, una suma infinita de contribuciones finitas de $u(x,t)$ en la frontera ilimitada ($x \to \pm\infty$).

Matemáticamente la energía será finita si no existe singularidad y la contribución de $u(x,t)$ a T y V es nula en el infinito. Para ello es necesario simultánemente que

$$\frac{1}{2}u_t^2 \to 0 \quad , \quad \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{\lambda}{2}\left(u^2 - a^2\right)^2 \to 0 \quad , \quad x \to \pm\infty \tag{9.7.80}$$

En el segundo término tenemos la suma de dos cantidades positivas, por lo que cada una de ellas debe ser nula por separado, para que la expresión completa sea nula. Obtenemos por tanto las expresiones equivalentes

$$u_t \to 0 \quad , \quad u_x \to 0 \quad , \quad u^2 \to a^2 \quad \to \quad x \to \pm\infty \tag{9.7.81}$$

Esto es, en el infinito la perturbación debe tender a un valor constante y uniforme, $u^2 = a^2$, siendo irrelevante si toma el valor $u = a$ ó $u = -a$.

(b) Con el cambio de variable independiente

$$\xi \equiv x - Vt \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} = -V\frac{d}{d\xi} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi} \tag{9.7.82}$$

la ecuación para la perturbación

$$u(x,t) = f(x - Vt) \equiv f(\xi) \tag{9.7.83}$$

en forma de onda viajera se reduce a

$$V^2 f'' - f'' + 2\lambda f\left(f^2 - a^2\right) = 0 \tag{9.7.84}$$

Utilizando la regla de la cadena tenemos por un lado

$$f'' \equiv \frac{1}{2}\frac{df'^2}{df} \tag{9.7.85}$$

y por tanto

$$\frac{1}{2}\left(V^2 - 1\right)\frac{df'^2}{df} + 2\lambda f\left(f^2 - a^2\right) = 0 \tag{9.7.86}$$

que tiene una integración directa en forma de cuadratura

$$f'^2 = \frac{4\lambda}{1 - V^2}\int f\left(f^2 - a^2\right)df = \frac{4\lambda}{1 - V^2}\left(\frac{1}{4}f^4 - \frac{a^2}{2}f^2\right) + C_1 \tag{9.7.87}$$

Aplicando las condiciones frontera, que podemos reducir a la expresión única

$$x \to \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad \left(f^2, f'\right) \to \left(a^2, 0\right) \tag{9.7.88}$$

obtenemos el valor de la constante de integración C_1

$$C_1 \equiv f'^2 - \frac{4\lambda}{1 - V^2}\left(\frac{1}{4}f^4 - \frac{a^2}{2}f^2\right)\Big|_{(f^2,f')\to(a^2,0)} = \frac{\lambda a^4}{1 - V^2} \tag{9.7.89}$$

con lo cual obtenemos la expresión de la cuadratura anterior en la forma

$$f'^2 = \frac{\lambda}{1 - V^2}\left(f^2 - a^2\right)^2 \tag{9.7.90}$$

Considerando arbitrariamente el intervalo de definición para la función f

$$0 < f^2 < a^2 \tag{9.7.91}$$

de la expresión anterior podemos obtener la cuadratura final en la forma

$$\int \frac{df}{a^2 - f^2} = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{1 - V^2}}\xi \tag{9.7.92}$$

con la resolución analítica

$$f = a \tanh\left(\pm\frac{\sqrt{\lambda}a}{\sqrt{1 - V^2}}(x - Vt)\right) + C_2 \tag{9.7.93}$$

siendo C_2 la constante de integración. Para elegir correctamente el signo en esta expresión, revisamos las condiciones frontera. Vemos que para $x \to +\infty$, si, entre las dos opciones posibles, $f \to +a$, el resultado corresponde al signo $+$ en la expresión anterior, con un valor irrelevante para C_2, y que podemos tomar por simplicidad $C_2 \equiv 0$. Para esta solución la otra condición frontera debe ser $f \to -a$ en $x \to -\infty$. Y viceversa, tomando el signo $-$ tenemos $f \to -a$ en $x \to \infty$ y $f \to a$ en $x \to +\infty$. Son las soluciones kink y antikink descritas en la sección 9.6.2.

• Una vez obtenida la solución de onda viajera determinamos el valor de su energía, cuya expresión en términos de la función f y sus derivadas es, término a término,

$$E = T + V = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}V^2 f'^2 + \frac{1}{2}f'^2 + \frac{\lambda}{2}\left(f^2 - a^2\right)^2\right)dx \tag{9.7.94}$$

Haciendo uso de la expresión en cuadratura 9.7.90, esta expresión se reduce a

$$E = T + V = \int_{-\infty}^{\infty} f'^2 dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f' f' dx \equiv \int f'(f) df \tag{9.7.95}$$

siendo $f'(f)$ la función que se deduce de 9.7.90. Para calcular el valor exacto, podemos hacer uso de cualquiera de las dos soluciones kink ó antikink, descritas anteriormente, ya que el resultado es el mismo. Para la solución kink, que crece desde el valor $f = -a$ en $x \to -\infty$ hasta el valor $f = a$ en $x \to +\infty$, el valor de la pendiente f' es positivo, y obtenemos

$$E = \int_{-a}^{a} f'(f) df = \sqrt{\frac{\lambda}{1 - V^2}}\int_{-a}^{a}\left(a^2 - f^2\right)df = \sqrt{\frac{\lambda}{1 - V^2}}\frac{4}{3}a^3 \tag{9.7.96}$$

Para la solución antikink, que decrece desde el valor $f = a$ en $x \to -\infty$ hasta el valor $f = -a$ en $x \to +\infty$, el valor de la pendiente f' es negativo, y obtenemos igualmente

$$E = \int_{a}^{-a} f'(f) df = -\sqrt{\frac{\lambda}{1 - V^2}}\int_{a}^{-a}\left(a^2 - f^2\right)df = \sqrt{\frac{\lambda}{1 - V^2}}\frac{4}{3}a^3 \tag{9.7.97}$$

En cualquier caso, en términos de la velocidad de propagación, la energía será mínima para el valor $V = 0$, esto es, para la perturbación estática

$$f_e(x) = a \tanh\left(\sqrt{\lambda}ax\right) \tag{9.7.98}$$

con energía

$$E_e = \frac{4}{3}\sqrt{\lambda}a^3 \tag{9.7.99}$$

(c) Como indica el enunciado, una de las posibles soluciones que satisface $u^2 = a^2$ en $x \to \pm\infty$, está dada por la condición frontera

$$u(-\infty, t) = -a \quad , \quad u(+\infty, t) = a \quad \Longrightarrow \quad u(x,t)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 2a \tag{9.7.100}$$

Para obtener una cota a la energía, tenemos en este caso general la resolución de 9.7.96 en la forma

$$E = \sqrt{\frac{\lambda}{1-V^2}}\left(a^2 f - \frac{1}{3}f^3\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \sqrt{\frac{\lambda}{1-V^2}}\frac{2}{3}a^2\left(f_\infty - f_{-\infty}\right) = \sqrt{\frac{\lambda}{1-V^2}}\frac{4}{3}a^3 \quad (9.7.101)$$

relación de la que obtenemos la cota, en función de la velocidad de propagación,

$$E \equiv \sqrt{\frac{\lambda}{1-V^2}}\frac{4}{3}a^3 \geq \frac{4}{3}\sqrt{\lambda}a^3 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{4}{3} \quad (9.7.102)$$

Se comprueba además que esta cota mínima corresponde a la energía de la solución estática, con $V = 0$, esto es, la solución estática es la solución de onda viajera con energía mínima.

9.7.4. Cotas de energía para ondas viajeras. II

Considere un sistema definido en el intervalo espacial $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, y con las expresiones de energía cinética y potencial

$$T = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}u_t^2 dx \quad , \quad V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(u_x^2 + 1 - u^2\right)dx \quad (9.7.103)$$

La función $u(x,t)$ satisface la condición frontera

$$\left|u\left(\pm\frac{\pi}{2},t\right)\right| = 1 \quad (9.7.104)$$

y satisface en todo punto (x,t)

$$\left|u(x,t)\right| \leq 1 \quad (9.7.105)$$

Demuestre que la energía total de $u(x,t)$ está acotada por debajo, y obtenga la solución que tiene ese cota mínima de energía. Para ello analice su dependencia con las condiciones frontera tipo *kink* ó *antikink*.

• Necesitamos obtener en primer lugar la ecuación del movimiento. De la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \quad (9.7.106)$$

para la densidad Lagrangiana del sistema

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}\left(1 - u^2\right) \quad (9.7.107)$$

deducimos la ecuación del movimiento, en la forma

$$u_{tt} - u_{xx} - u = 0 \quad (9.7.108)$$

(a) A partir de la definición de la energía, tenemos la siguiente desigualdad

$$E \equiv T + V \geq V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(u_x^2 + 1 - u^2\right)dx \quad (9.7.109)$$

dado que la energía cinética es siempre, para todas las soluciones, una cantidad positiva. La igualdad en la expresión anterior será correcta para las soluciones que sean independientes del tiempo, esto es, para $u_t \equiv 0$. Escribimos ahora el integrando del término potencial en la forma

$$u_x^2 + 1 - u^2 \equiv \left(u_x + \sqrt{1-u^2}\right)^2 - 2u_x\sqrt{1-u^2} \quad (9.7.110)$$

lo que nos permite identificar una nueva contribución estrictamente positiva, de forma que podemos escribir también

$$E \geq -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u_x \sqrt{1-u^2} dx \Big|_{u_t \equiv 0} \tag{9.7.111}$$

La igualdad de nuevo será correcta para las soluciones que satisfagan simultáneamente

$$u_t \equiv 0 \quad , \quad u_x + \sqrt{1-u^2} \equiv 0 \tag{9.7.112}$$

esto es, soluciones para que las dos contribuciones cuadráticas a la energía se anulan idénticamente.

• En todo caso, debemos demostrar que el conjunto de soluciones dado existe para la ecuación del movimiento del sistema. Esto es, debemos demostrar que las soluciones que cumplen

$$u_t \equiv 0 \quad , \quad u_x + \sqrt{1-u^2} \equiv 0 \tag{9.7.113}$$

son soluciones de la ecuación del movimiento

$$u_{tt} - u_{xx} - u = 0 \tag{9.7.114}$$

Lo comprobamos de forma directa término a término, dado que

$$u_t \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad u_{tt} \equiv 0 \tag{9.7.115}$$

junto a

$$u_x \equiv -\sqrt{1-u^2} \quad \Longrightarrow \quad u_{xx} = \frac{u u_x}{\sqrt{1-u^2}} \equiv -u \tag{9.7.116}$$

y por tanto la función dada u también es solución de la ecuación del movimiento

$$u_{tt} - u_{xx} - u = 0 + u - u \equiv 0 \tag{9.7.117}$$

Uniendo ambos resultados podemos concluir que la energía del sistema tiene la cota inferior

$$E^* \equiv -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u_x \sqrt{1-u^2} dx \Big|_{u_t \equiv 0} \tag{9.7.118}$$

y que dicha cota inferior se alcanza con la solución del problema auxiliar

$$u_t \equiv 0 \quad , \quad u_x + \sqrt{1-u^2} \equiv 0 \tag{9.7.119}$$

• Para completar la resolución, determinamos en primer lugar la cota de la energía, teniendo en cuenta que se satisface la equivalencia

$$u_t \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad u_x \equiv \frac{du}{dx} \quad \Longrightarrow \quad u_x \sqrt{1-u^2} dx \equiv \sqrt{1-u^2} du \tag{9.7.120}$$

Con ello, la cota de energía está dada por el valor

$$E^* = -\int_{u_-}^{u_+} \sqrt{1-u^2} du = -\frac{1}{2} \left(u\sqrt{1-u^2} + \operatorname{arcsen} u \right) \Big|_{u_-}^{u_+} \tag{9.7.121}$$

siendo $u_\pm$ las condiciones frontera en $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Según indica el enunciado, en ambos casos $u_\pm^2 \equiv 1$, luego $\sqrt{1-u_\pm^2} \equiv 0$, llegando al resultado

$$E^* = -\frac{1}{2} \left(\operatorname{arcsen} u_+ - \operatorname{arcsen} u_- \right) \tag{9.7.122}$$

valor que depende de las condiciones frontera elegidas para la solución. Finalmente, como indicamos, este valor de la energía corresponde a la solución estática (independiente del tiempo) dada por la cuadratura

$$\frac{du}{dx} = -\sqrt{1-u^2} \quad \Longrightarrow \quad \int -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = x + C_1 \tag{9.7.123}$$

con la expresión analítica

$$\arccos u = x + C_1 \quad \Longrightarrow \quad u = \cos(x + C_1) \tag{9.7.124}$$

siendo C_1 la constante de integración aplicando las condiciones frontera. Para la solución tipo *kink* tenemos

$$u_+ \equiv u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = +1 \quad , \quad u_- \equiv u\left(-\frac{\pi}{2}, t\right) = -1 \tag{9.7.125}$$

con la solución

$$C_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad u = \operatorname{sen} x \tag{9.7.126}$$

Para la solución tipo *anti-kink* tenemos

$$u_+ \equiv u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = -1 \quad , \quad u_- \equiv u\left(-\frac{\pi}{2}, t\right) = +1 \tag{9.7.127}$$

con la solución

$$C_1 = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad u = -\operatorname{sen} x \tag{9.7.128}$$

A partir de este resultado vemos directamente que la energía mínima para las soluciones estáticas tiene el valor

$$E^*_{\min} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \tag{9.7.129}$$

correspondientes a la solución tipo *antikink*.

9.7.5. Cantidades conservadas para ecuación KdV

Considere la ecuación KdV

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{9.7.130}$$

para un campo $u(x,t)$.

(a) Demuestre que las expresiones integrales

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \rho dx \tag{9.7.131}$$

siendo ρ las cantidades

$$\rho_1 = u \quad , \quad \rho_2 = u^2 \quad , \quad \rho_3 = u^3 - \frac{1}{2}u_x^2 \tag{9.7.132}$$

son todas cantidades conservadas del movimiento.

(b) Evalúe el valor de estas cantidades conservadas para la solución de campo de $1-$soliton, con posición central x_0 y velocidad $v = 4\mu^2$, dado por

$$u_{(x_0,v)}(x,t) \equiv \frac{v}{2}\operatorname{sech}^2\left(\mu\left(x - x_0 - vt\right)\right) \tag{9.7.133}$$

(c) Considere por cierto que la solución inicial $u(x,0) = 2\operatorname{sech}^2(x)$ evoluciona en el tiempo como la suma de dos soluciones de $1-$soliton con velocidades respectivas v_1 y v_2. Utilice la conservación de las cantidades Q_1, Q_2 para determinar el valor de estas velocidades. ¿Qué sucede entonces con la cantidad Q_3?

(a) La comprobación es directa, aplicando el operador de derivación temporal en la forma

$$\frac{d}{dt}\int u dx = \int \frac{\partial u}{\partial t} dx \tag{9.7.134}$$

dado que el intervalo de integración se mantiene constante en el tiempo (misma localización espacial del medio para todo t). Utilizando entonces la ecuación de movimiento tenemos

$$\frac{dQ_1}{dt} = \int u_t dx = -\int \left(6uu_x + u_{xxx}\right) dx \equiv -\int \frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + u_{xx}\right) dx \tag{9.7.135}$$

Realizando entonces la integración directa en x,

$$\frac{dQ_1}{dt} = -\left(3u^2 + u_{xx}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} \tag{9.7.136}$$

y aplicando las condiciones frontera para la función u

$$(u, u_x, u_{xx}) \to 0 \quad , \quad x \to \pm\infty \tag{9.7.137}$$

obtenemos el resultado pedido

$$\frac{dQ_1}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q_1 = \text{cte} \tag{9.7.138}$$

Realizamos el mismo procedimiento con la siguiente cantidad, con la expresión inicial

$$\frac{dQ_2}{dt} = \int u_t^2 dx = \int 2uu_t dx = -\int \left(12u^2u_x + 2uu_{xxx}\right) dx \tag{9.7.139}$$

Teniendo en cuenta ahora los desarrollos parciales

$$12u^2u_x = \frac{\partial\left(4u^3\right)}{\partial x} \tag{9.7.140}$$

junto a

$$uu_{xxx} = \frac{\partial^2\left(uu_x\right)}{\partial x^2} - \frac{\partial\left(\frac{3}{2}u_x^2\right)}{\partial x} \tag{9.7.141}$$

comprobamos que la integración de todos los términos dan únicamente contribuciones en la frontera que resultan idénticamente nulas al aplicar las condiciones frontera. El resultado es, por tanto, de nuevo

$$\frac{dQ_2}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q_2 = \text{cte} \tag{9.7.142}$$

Finalmente para la tercera cantidad, tenemos la expresión inicial

$$\frac{dQ_3}{dt} = \int \left(u^3 - \frac{1}{2}u_x^2\right)_t dx = \int \left(3u^2u_t + u_xu_{xt}\right) dx \tag{9.7.143}$$

El resultado también aquí es directo, ya que se satisface

$$u_t = -\frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + u_{xx}\right) \tag{9.7.144}$$

junto a

$$u_{xt} \equiv \frac{\partial}{\partial x}u_t = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(3u^2 + u_{xx}\right) \tag{9.7.145}$$

de forma que el integrando admite el desarrollo

$$3u^2u_t + u_xu_{xt} = \left(-3u^2\frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(3u^2 + u_{xx}\right) \tag{9.7.146}$$

que puede escribirse en la forma agrupada

$$3u^2u_t + u_xu_{xt} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + u_{xx}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x\frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + u_{xx}\right)\right) \tag{9.7.147}$$

A partir de esta expresión, y realizando una primera integración en la coordenada x, comprobamos que los dos términos resultantes dan contribuciones en la frontera que resultan idénticamente nulas al aplicar las condiciones frontera: en el primer sumando por ser $(u, u_{xx}) \to (0, 0)$, y en el segundo por ser $u_x \to 0$. El resultado es, por tanto, de nuevo

$$\frac{dQ_3}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q_3 = \text{cte} \tag{9.7.148}$$

(b) Para la primera cantidad tenemos para la solución $u_{(x_0,v)} = \frac{v}{2}\text{sech}^2\left(\mu\left(\xi - \xi_0\right)\right)$ planteada en el enunciado

$$Q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx = \frac{v}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2\left(\mu\left(\xi - \xi_0\right)\right) d\xi \tag{9.7.149}$$

La integral es directa, y obtenemos el resultado

$$Q_1 = \frac{v}{2\mu}\tanh\left(\mu\left(\xi - \xi_0\right)\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{v}{\mu} = 2v^{1/2} \tag{9.7.150}$$

al ser $v = 4\mu^2$. Para la segunda cantidad tenemos así mismo

$$Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx = \frac{v^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^4\left(\mu\left(\xi - \xi_0\right)\right) d\xi \tag{9.7.151}$$

cuya integral también es directa, y obtenemos el resultado

$$Q_2 = \frac{v^2}{4\mu}\left(\tanh\mu\left(\xi - \xi_0\right) - \frac{1}{3}\tanh^3\mu\left(\xi - \xi_0\right)\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{v^2}{3\mu} = \frac{2}{3}v^{3/2} \tag{9.7.152}$$

Finalmente para la tercera cantidad, al ser

$$u^3 - \frac{1}{2}u_x^2 = f^3 - \frac{1}{2}f'^2 \tag{9.7.153}$$

y teniendo en cuenta la cuadratura para la solución de la ecuación KdV (véase la sección 9.6.2)

$$\frac{1}{2}f'^2 = \frac{v}{2}f^2 - f^3 \tag{9.7.154}$$

tenemos

$$Q_3 = \int\left(2f^3 - \frac{v}{2}f^2\right)dx = \frac{v^3}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\text{sech}^6\left(\mu\left(\xi - \xi_0\right)\right)d\xi - \frac{v}{2}Q_2 \tag{9.7.155}$$

cuya integral también es directa, y obtenemos el resultado

$$\begin{aligned} Q_3 &= -\frac{v}{2}\frac{16}{3}\mu^3 + \frac{v^3}{4\mu}\left(\tanh\sharp - \frac{2}{3}\tanh^3\sharp + \frac{1}{5}\tanh^5\sharp\right)_{\sharp=\mu(\xi-\xi_0)}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} \\ &= -\frac{1}{3}v^{5/2} + \frac{4}{15}v^{5/2} = -\frac{1}{15}v^{5/2} \end{aligned} \tag{9.7.156}$$

(c) Si $u(x, 0)$ es la configuración inicial de la perturbación, válida para $x_0 = 0$, y siendo Q_{10} y Q_{20} el valor de las cantidades conservadas Q_1 y Q_2, el teorema de conservación establece que

$$Q_1(t) = Q_{10} \quad , \quad Q_2(t) = Q_{20} \tag{9.7.157}$$

para un tiempo arbitrario. Si sabemos además que la solución $u(x,t)$ evoluciona en el tiempo como la suma independiente de dos solitones

$$u(x,t) \equiv u_{v_1}(x,t) + u_{v_2}(x,t) \tag{9.7.158}$$

necesariamente se satisface simultáneamente

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= Q_1(v_1) + Q_1(v_2) \\ Q_2(t) &= Q_2(v_1) + Q_2(v_2) \end{aligned} \tag{9.7.159}$$

y por tanto, de la identidad

$$\begin{aligned} Q_1(v_1) + Q_1(v_2) &= Q_{10} \\ Q_2(v_1) + Q_2(v_2) &= Q_{20} \end{aligned} \tag{9.7.160}$$

podemos obtener el valor de las velocidades v_1 y v_2, una vez conocidas las constantes en el instante $t = 0$.

• Para ello, escribimos la solución inicial en la forma

$$u(x,0) \equiv 2\,\mathrm{sech}^2\,(x) = 2\frac{2}{2}\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{2}{2}}x\right) \equiv 2u_{(0,2)}(x,0) \tag{9.7.161}$$

esto es, corresponde a 2 veces el perfil en el instante inicial de $1-$ soliton de velocidad $v = 2$, y posición inicial $x_0 = 0$. Con esto, sus cantidades conservadas tienen el valor

$$\begin{aligned} Q_{10} &= 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \\ Q_{20} &= 2^2 \cdot \frac{2}{3}2^{3/2} = \frac{16}{3}\sqrt{2} \end{aligned} \tag{9.7.162}$$

y por tanto se debe satisfacer

$$\begin{aligned} Q_1(v_1) + Q_1(v_2) = 4\sqrt{2} \quad &\Longrightarrow \quad 2\left(\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2}\right) = 4\sqrt{2} \\ Q_2(v_1) + Q_2(v_2) = \frac{16}{3}\sqrt{2} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{2}{3}\left(v_1^{3/2} + v_2^{3/2}\right) = \frac{16}{3}\sqrt{2} \end{aligned} \tag{9.7.163}$$

con la solución

$$v_1 = \frac{4}{3}\left(2 + \sqrt{3}\right) \quad , \quad v_1 = \frac{4}{3}\left(2 - \sqrt{3}\right) \tag{9.7.164}$$

Hasta ahora no hemos evaluado la conservación de la cantidad Q_3. Sólo han sido suficientes estas dos ecuaciones de conservación para determinar las dos incógnitas del problema, v_1 y v_2, en función de la energía inicial, dada por $u(x,0)$. Si varíaramos el coeficiente numérico en $u(x,0)$ comprobaríamos que no existe solución en general. Esto es, la representación inicial no evoluciona hasta orden 2, (Q_1, Q_2), como la suma de dos $1-$solitones independientes. Lo mismo sucede con el siguiente orden, dado por Q_3. La solución obtenida para Q_1 y Q_2 no conserva la carga inicial Q_{30}. Para la conservación de Q_3 necesitamos añadir un parámetro más en la evolución temporal, por ejemplo un coeficiente relativo a en la suma

$$u(x,t) = a \cdot u_{v_1}(x,t) + u_{v_2}(x,t) \tag{9.7.165}$$

y de nuevo encontraremos que sólo para determinados valores del parámetro a encontraremos una solución aproximada hasta orden 3 para la evolución del sistema en dos $1-$soliton independientes. La justificación física de esta limitación reside en que la solución de $2-$soliton para la ecuación del movimiento no puede construirse a partir de la solución de $1-$soliton, por la propia no-linealidad de la ecuación KdV.

Nota adicional: Sin entrar en el detalle de la demostración, para la construcción de la solución de 2−soliton, y las soluciones de mayor grado, necesitaremos aplicar un *principio de superposición generalizado* apropiado para esta ecuación no lineal. Si escribimos la solución de 1−soliton en la forma general simplificada

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A\text{sech}^2\xi = \frac{4A}{\left(e^{\xi}+e^{-\xi}\right)^2} \\ &\equiv 2A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{2\xi}}{1+e^{2\xi}}\right) \equiv 2A\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left(1+e^{2\xi}\right) \equiv 2A\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln F(x,t) \end{aligned} \tag{9.7.166}$$

vemos que el estudio de las soluciones $u(x,t)$ se reduce al estudio de la función auxiliar $F(x,t)$, pero ya con una diferencia fundamental. Podemos incorporar un principio generalizado de superposición a la función F, en la forma

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{N} F_n(x,t) \quad , \quad F_0 \equiv 1 \tag{9.7.167}$$

siendo cada F_n una función que contiene contribuciones de hasta n−solitones: eligiendo $F_n \equiv 0$, para $n \geq N$ obtendriamos la solución de $(N-1)$−solitones. En particular, para $F_n \equiv 0$ para $n \geq 2$, obtenemos la solución conocida de 1−soliton.

• La cuestión clave es que las ecuaciones de movimiento para cada una de las funciones F_n dependen explícitamente de las funciones del orden inferior, y podemos ir así ajustando las soluciones orden a orden para obtener la solución exacta para cada N. Además la ecuación resultante para el primer orden, F_1, al no depender de ninguna función de orden inferior, es lineal. De ahí el origen de la superposición, ya que la función F_1 genera por recurrencia las funciones en órdenes superior, generalizando la superposición a dichos órdenes.
En particular,

$$F_1(x,t) = \sum_{n=1}^{N} e^{2\xi_n} \quad , \quad \xi_n \equiv \sqrt{\frac{v_n}{2}}\,(x - v_n t) \tag{9.7.168}$$

es la función generadora por superposición de la solución de N−soliton, con las velocidades individuales $(v_1, .., v_N)$. Y para $N = 1$ la solución es la conocida: a partir de

$$F_1(x,t) = e^{2\xi} \tag{9.7.169}$$

obtenemos

$$F(x,t) = 1 + e^{2\xi} \tag{9.7.170}$$

mientras que para $N = 2$ la solución de 2−soliton está generada por la función

$$F_1(x,t) = e^{2\xi_1} + e^{2\xi_2} \tag{9.7.171}$$

que da lugar a la función F hasta orden 2

$$F(x,t) = 1 + e^{2\xi_1} + e^{2\xi_2} + \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)^2 e^{2\xi_1 + 2\xi_2} \tag{9.7.172}$$

siendo

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{v_1}{2}}\,(x - v_1 t) \quad , \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{v_2}{2}}\,(x - v_2 t) \tag{9.7.173}$$

y obtenemos la solución correspondiente aplicando directamente

$$u(x,t) = 2A\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln F(x,t) \tag{9.7.174}$$

9.8. Otros ejemplos

9.8.1. Modelo no lineal complejo. Soluciones de onda y cantidades conservadas

Considere un campo complejo $u(x,t)$ que obedece la ecuación de movimiento

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2 u = 0 \tag{9.8.1}$$

siendo $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria, y que satisface las condiciones frontera

$$u, u_x, u_{xx} \to 0 \quad , \quad x \to \pm\infty \tag{9.8.2}$$

(a) Demuestre que las siguientes expresiones integrales

$$\begin{aligned} Q_1 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx \\ Q_2 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\left(\bar{u}u_x\right) dx \end{aligned} \tag{9.8.3}$$

son constantes del movimiento.

(b) Obtenga las soluciones al movimiento de la forma

$$u(x,t) \equiv \rho(x)e^{i\varphi(t)} \tag{9.8.4}$$

siendo ρ, φ funciones reales, y definiendo $u(x,0)$ como una función real par en x.

• Dado que el campo es complejo necesitaremos utilizar la ecuación de movimiento para $u(x,t)$ y para su conjugado complejo $\bar{u}(x,t)$ dada por

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2 u = 0 \quad \Longrightarrow \quad -i\bar{u}_t + \frac{1}{2}\bar{u}_{xx} + |u|^2 \bar{u} = 0 \tag{9.8.5}$$

(a) Para la primera cantidad, obtenemos su variación respecto al tiempo en la forma

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{d}{dt}\int |u|^2 dx = \int \frac{\partial}{\partial t}\left(u\bar{u}\right) dx \tag{9.8.6}$$

siendo

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u\bar{u}\right) = u_t\bar{u} + \bar{u}_t u \tag{9.8.7}$$

Utilizando ambas ecuaciones de movimiento, vemos que esta expresión está dada por el desarrollo

$$u_t\bar{u} + \bar{u}_t u = \frac{1}{2i}\left(\bar{u}_{xx}u - u_{xx}\bar{u}\right) \equiv \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}_x u - u_x\bar{u}\right) \tag{9.8.8}$$

En consecuencia obtenemos la variación de Q_1 en la forma

$$\frac{dQ_1}{dt} = \int \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}_x u - u_x\bar{u}\right) dx \tag{9.8.9}$$

Integrando de forma directa en la coordenada x, y utilizando las condiciones frontera de la función u y su conjugada $\bar{u}$

$$\bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_{xx} \to 0 \quad , \quad x \to \pm\infty \tag{9.8.10}$$

obtenemos el resultado pedido

$$\frac{dQ_1}{dt} = \int \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}_x u - u_x \bar{u}\right) dx = \frac{1}{2i}\left(\bar{u}_x u - u_x \bar{u}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q_1 = \text{cte} \tag{9.8.11}$$

Para la segunda cantidad Q_2 tenemos inicialmente

$$\frac{dQ_2}{dt} = \text{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{u}u_x\right) dx \tag{9.8.12}$$

dado que la operación de derivación temporal conmuta con el valor imaginario. Para la derivada parcial respecto al tiempo, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{u}u_x\right) = \bar{u}_t u_x + \bar{u}u_{xt} \tag{9.8.13}$$

siendo

$$\bar{u}u_{xt} \equiv \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}u_t = -\frac{1}{2i}\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2 u\right) \tag{9.8.14}$$

y

$$\bar{u}_t u_x = \frac{1}{2i}u_x\left(\frac{1}{2}\bar{u}_{xx} + |u|^2\bar{u}\right) \tag{9.8.15}$$

Sumando ambas contribuciones dadas por estos desarrollos, llegamos al resultado

$$\bar{u}_t u_x + \bar{u}u_{xt} = i\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u_{xx}\bar{u} + |u|^4\right) + 2i\text{Im}\left(\frac{1}{2}\bar{u}_{xx}u_x + |u|^2\bar{u}u_x\right)\right) \tag{9.8.16}$$

Con esta expresión, vemos que en la integración en la coordenada x el primer sumando da una contribución directa nula al aplicar las condiciones frontera, mientras que el segundo sumando es una cantidad real, esto es tiene componente imaginaria nula, al ser

$$i2i\text{Im}\left(\frac{1}{2}\bar{u}_{xx}u_x + |u|^2\bar{u}u_x\right) = -2\text{Im}\left(\frac{1}{2}\bar{u}_{xx}u_x + |u|^2\bar{u}u_x\right) \in \mathbb{R} \tag{9.8.17}$$

y por tanto su integral en la coordenada x también sera un valor real, con parte imaginaria nula. Reuniendo ambos resultados obtenemos el resultado pedido

$$\frac{dQ_2}{dt} = \text{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} -2\text{Im}\left(\frac{1}{2}\bar{u}_{xx}u_x + |u|^2\bar{u}u_x\right) dx\right) \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad Q_2 = \text{cte} \tag{9.8.18}$$

(b) La solución propuesta en el enunciado

$$u(x,t) \equiv \rho(x)e^{i\varphi(t)} \tag{9.8.19}$$

será solución de la ecuación del movimiento si

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + |u|^2\right)u \equiv 0 \tag{9.8.20}$$

teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}u &= -\rho(x)\varphi'(t)e^{i\varphi(t)} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u &= \frac{1}{2}\rho''(x)e^{i\varphi(t)} \\ |u|^2 u &= \rho^3(x)e^{i\varphi(t)} \end{aligned} \tag{9.8.21}$$

Eliminando el factor temporal $e^{i\varphi(t)}$ en la ecuación de movimiento resultante, las funciones ρ, φ deben satisfacer la ecuación conjunta

$$-\rho(x)\varphi'(t) + \frac{1}{2}\rho''(x) + \rho^3(x) = 0 \tag{9.8.22}$$

que podremos resolver mediante la separación de variables

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}\frac{\rho''(x)}{\rho(x)} + \rho^2(x) \tag{9.8.23}$$

Para ello, vemos que el término en la izquierda depende únicamente de t, y el término de la derecha únicamente de x, siendo x y t variables independientes. Esto sólo será factible si ambos términos por separado son iguales a una misma constante, digamos C. Esto es, si se satisface simultáneamente

$$\begin{aligned} &\varphi'(t) = C \\ &\frac{1}{2}\frac{\rho''(x)}{\rho(x)} + \rho^2(x) = C \end{aligned} \tag{9.8.24}$$

con la integración directa

$$\varphi(t) = Ct \tag{9.8.25}$$

dado que $\varphi = 0$ en $t = 0$ para que $u(x, 0)$ sea una función real. Para la integración en x utilizamos en primer lugar la regla de la cadena

$$\rho'' = \frac{1}{2}\frac{d\rho'^2}{d\rho} \tag{9.8.26}$$

para obtener una primera cuadratura en la forma

$$\rho'^2 = 2C\rho^2 - \rho^4 \tag{9.8.27}$$

Tomando el signo negativo para ρ' (físicamente el módulo de $u(x, t)$ debe decrecer en x hasta anularse en el infinito) tenemos la segunda cuadratura

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{2C\rho^2 - \rho^4}} = -x \tag{9.8.28}$$

que tiene la solución analítica

$$\frac{1}{\sqrt{2C}}\tanh^{-1}\frac{\sqrt{2C-\rho^2}}{\sqrt{2C}} = x \quad \Longrightarrow \quad \rho = \sqrt{2C}\,\mathrm{sech}\left(\sqrt{2C}x\right) \tag{9.8.29}$$

9.9. Autoevaluación

Ejercicios

Cuestionarios en línea

9.9.1. Ecuaciones del movimiento

- Enlace al cuestionario

9.9.2. Cantidades conservadas

- Enlace al cuestionario

9.9.3. Teoría de campo

- Enlace al cuestionario

9.10. Videoclases

Tipo	Duración	Contenidos	Enlace
Teoría	90 mn	Secciones 9.1, 9.2, 9.3, 9.6	S.9.1–S.9.3, S.9.6
Problemas	60 mn	Problemas secciones 9.4, 9.8	S.9.4, S.9.8
Autoevaluación	15 mn	Problemas 9.5	S.9.5
Otros	30 mn	Apéndice **??**	–

Capítulo 10

Teoría clásica de campos

10.1. Introducción

10.1.1. Noción de campo

Introducción La noción de *campo* como entidad física es muy antigua. Durante la época dorada de la Mecánica Newtoniana, la reducción de las teorías físicas (tal como la teoría de la luz) a la Mecánica de partículas puntuales fue considerada como la única opción válida para la comprensión de la naturaleza, y el concepto de campo (el propio campo de fuerzas) se utilizó únicamente como una herramienta matemática útil. Y aún con esta perspectiva se consiguieron realizar importantes avances en la fundamentación teórica de numerosas áreas de la Física, como la óptica o la hidrodinámica. El concepto de campo con entidad física seguía siendo vago, y existía el convencimiento de que cualquier teoría, aún de tipo fenomenológico, podría explicarse en última instancia por la mecánica de las partículas puntuales.
El cambio conceptual necesario se produjo con la llegada de la Teoría electromagnética de Maxwell y Faraday, y la Relatividad especial de Einstein. En ambas teorías existe la interacción entre partículas, y por tanto se acepta la existencia de campos. Cualquier modificación o perturbación sufrida o generada por una partícula no puede percibida de forma instantánea por cualquier partícula distante, ya que los efectos ocasionados por la primera como mucho pueden viajar a la velocidad de la luz, que es finita. Por tanto, debe existir algún tipo de objeto con naturaleza *física* que sea portador de la interacción, y al que denominamos genéricamente campo.

Conceptos básicos La idea básica de las teorías de campo es que las propiedades físicas (como la energía, el momento, la carga eléctrica o la masa) se ven distribuidas por el campo de forma suave (matemáticamente, en una forma continua) en el espacio y el tiempo. Algunos ejemplos de estos campos pueden ser:

- la densidad $\rho(\boldsymbol{r},t)$ genérica, dependiente del espacio y el tiempo, de forma que su integral en todo el volumen V accesible del espacio

$$Q_V(t) \equiv \int_V \rho(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r} \tag{10.1.1}$$

  es la cantidad neta en el instante t asociada al campo de densidad. La densidad se puede definir para cualquier propiedad que sea *extensiva*, es decir, que el total sea la suma de las partes, como la energía, el momento, la masa o la carga eléctrica.

- la velocidad $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$, presión $p(\boldsymbol{r},t)$ o temperatura $T(\boldsymbol{r},t)$ en el seno de un fluido.

- La función clásica de onda $\psi(\boldsymbol{r},t)$ de un sistema cuántico.

Lo mismo que el movimiento del sistema mecánico se define en un espacio físico real tridimensional y el tiempo, debe existir un *espacio abstracto* asociado al campo, y que tenga propiedades similares que el espacio físico real. Distinguiremos por ello propiedades *externas* y propiedades *internas* del

campo, siendo las primeras las que están asociadas a las transformaciones físicas en el espacio y el tiempo, y las segundas cuando se realizan transformaciones en este espacio abstracto asociado al campo. Por ejemplo, para la función de onda $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ pueden existir simetrías bajo transformaciones en el espacio y el tiempo, como la inversión en el espacio, $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$, o la traslación temporal $t \to t + a$, y simetrías bajo transformaciones internas como el operador de conjugación compleja, $\psi \to \psi^*$. Dichas transformaciones internas también reciben el nombre de *transformaciones gauge* o de calibración.

Simetría La manifestación más importante de la simetría en Física es la llamada *simetría de evolución*, que implica que cualquier evolución físicamente admisible de un sistema puede transformarse, mediante la transformación adecuada, en otra evolución físicamente admisible. Tal simetría estará siempre asociada a las leyes de conservación del sistema, y nos indica que la naturaleza es indiferente a ciertos aspectos de los sistemas físicos (como la energía, el momento, etc), y por tanto la evolución del sistema físico es independiente de ellos. Las leyes de conservación asociadas son sencillamente el reflejo de la falta de capacidad de la teoría, posiblemente mal planteada desde un inicio, de eliminar los aspectos irrelevantes en la descripción de la evolución del sistema.

Construcción de la teoría de campo La teoría del campo es una pieza fundamental para el desarrollo de la Física. Los ejemplos más destacables en la física clásica son los campos de fuerza de los fenómenos gravitatorio y electromagnético, y que están causados por la presencia de masas y cargas eléctricas, respectivamente.
Para su construcción se utiliza habitualmente la formulación Lagrangiana. Aparte de su concisión y su elegancia matemática, tiene dos ventajas claras frente a otras formulaciones, entre las cuales está la propia formulación Hamiltoniana. En primer lugar, el Lagrangiano o la densidad Lagrangiana en su caso, por su propia construcción, son invariantes frente a todas las transformaciones de simetría del sistema. Este punto preciso es muy importante en las teorías relativistas ya nos permite tratar al espacio y el tiempo de forma unificada desde un principio. La segunda ventaja es que la formulación Lagrangiana admite una extensión natural cuántica, de modo que el Principio clásico de Acción estacionaria clásico se ve directamente traducido en la denominada Integración sobre caminos de la Mecánica Cuántica.

10.1.2. Espacio-tiempo relativista

Coordenadas En el medio continuo tridimensional definimos en general el campo como el desplazamiento del sistema respecto a su posición de equilibrio, como esté definida. Ahora consideramos un tipo arbitrario de campo, sin referencia alguna a qué grados de libertad describe, y que será función del vector de coordenadas de espacio-tiempo, escrito en la forma $\mathbf{x} = x^\alpha \equiv \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (ct, \boldsymbol{r})$, donde t denota el tiempo y c la velocidad de la luz en el vacío, y que tiene por tanto una componente temporal (para $\alpha = 0$), y tres componentes espaciales (para $\alpha = 1, 2, 3$).

Tensor métrico La *signatura* (elementos diagonales) de la métrica relativista (métrica de Minkoswki) viene dada por el tensor métrico[1] $\eta^{\alpha\beta} = \operatorname{diag}(-1, 1, 1, 1) = \eta_{\alpha\beta}$ con todos los elementos fuera de la diagonal nulos, $\eta^{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$. En notación matricial,

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.1.2}$$

[1] Las dos signaturas posibles para el espacio-tiempo relativista, $\operatorname{diag}(-1, 1, 1, 1)$ y $\operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$ son totalmente equivalentes y es una cuestión de convenio elegir una u otra. La única diferencia, si realmente la hay, reside en dar una mayor importancia a los aspectos geómetricos (espaciales) de la teoría para el primer caso, o una mayor importancia a los aspectos dinámicos (temporales) de la teoría en el segundo caso. En nuestro caso, no existe diferencia conceptual entre ellas, ya que se tratan los temas con suficiente generalidad. El único aspecto a tener en cuenta para esta elección ha sido entonces mantener al menos la notación usual propia de la Relatividad General con signatura $\operatorname{diag}(-1, 1, 1, 1)$, en la que priman más los conceptos geométricos, y que también se cursa en el Grado.

Este tensor nos permite intercambiar entre sí las componentes de cualquier vector $\mathbf{A}$, en su versión contravariante A^α y en su versión covariante A_α, a través de las dos fórmulas de transformación vectorial

$$A^\alpha = \eta^{\alpha\beta} A_\beta \quad , \quad A_\alpha = \eta_{\alpha\beta} A^\beta \tag{10.1.3}$$

con suma en cada término de la derecha en el índice repetido β. Por ejemplo, para el vector de coordenadas, tenemos

$$x_\alpha = \eta_{\alpha\beta} x^\beta = \eta_{\alpha 0} x^0 + \eta_{\alpha 1} x^1 + \eta_{\alpha 2} x^2 + \eta_{\alpha 3} x^3 \tag{10.1.4}$$

Tomando ahora $\alpha = 0, 1, 2, 3$ obtenemos las cuatro componentes covariantes del vector de coordenadas, en la forma

$$x_0 = \eta_{00} x^0 = -ct \quad , \quad x_i = \eta_{ii} x^i = x^i \tag{10.1.5}$$

donde adoptamos el siguiente convenio, el conjunto de los cuatro índices espacio-temporales se denominará por una letra griega del tipo α, β, y el subconjunto de los tres índices espaciales por la letra latina del tipo i, j. Podemos escribir la transformación anterior en la forma más compacta[1]

$$x^\alpha = (ct, \boldsymbol{r}) \Rightarrow \; x_\alpha = (-ct, \boldsymbol{r}) \tag{10.1.6}$$

Operador de derivación Además del vector de coordenadas, en la teoría de campo utilizaremos el operador de derivación respecto a las coordenadas (que es un conjunto de cuatro operadores de derivación parcial) que se define inicialmente en su versión covariante mediante la notación ∂_α

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla} \right) \tag{10.1.7}$$

que asegura, por ejemplo, que $\partial_0 x^0 = 1$, ó $\partial_i x^j = \delta_i^j$. A partir de su definición, su versión contravariante está dada por

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla} \right) \tag{10.1.8}$$

Elemento de arco Uno de los postulados de la Relatividad especial es la constancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas inerciales (sistemas con la métrica de Minkowski). Este hecho lleva a que el elemento ds de arco en el espacio-tiempo relativista, denotado por

$$ds^2 \equiv \eta^{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx^\alpha dx_\alpha = -c^2 dt^2 + d\boldsymbol{r}^2 \tag{10.1.9}$$

sea invariante bajo las transformaciones de coordenadas, y además, en el sistema de referencia en reposo para el cual $d\boldsymbol{r} = \mathbf{0}$, $t = \tau$, satisface

$$|ds| = c d\tau \tag{10.1.10}$$

siendo τ su tiempo propio. Su invariancia se escribe matemáticamente como

$$ds^2 = ds'^2 \tag{10.1.11}$$

La *longitud* ds es completamente análoga a la longitud del arco medida sobre una curva en un espacio métrico, y tiene su mismo papel como parámetro de la curva. En particular, la curva recorrida por el sistema en el espacio-tiempo se denomina su *línea de mundo*.

[1] En general es muy sencillo pasar de una teoría relativista a otra con una signatura de la métrica de signo contrario. Este cambio de signo únicamente reside en el tensor métrico $\eta_{\alpha\beta}$, y en ninguna otra cantidad. En este caso, la notación $x^\alpha = (ct, \boldsymbol{r})$ es una definición, y se mantiene igual para las dos signaturas ya que no depende del tensor métrico, mientras que $x_\alpha \equiv \eta_{\alpha\beta} x^\beta$ sí depende del tensor métrico, y cambia de signo al cambiar de signatura. Así $x_\alpha = (-ct, \boldsymbol{r})$ para la signatura $\mathrm{diag}\,(-1, 1, 1, 1)$ y $x_\alpha = (ct, -\boldsymbol{r})$ para la signatura $\mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$.

4−Velocidad Otro vector en el espacio-tiempo que necesitaremos manejar es la 4−velocidad $\mathbf{u} = u^\alpha$, que se define como la derivada respecto a la longitud s del vector de coordenadas de la partícula, en la forma

$$\mathbf{u} = u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \tag{10.1.12}$$

y que tiene las componentes contravariantes

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}(ct, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - \boldsymbol{v}^2}}(c, \boldsymbol{v}) \equiv \left(\gamma, \gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right) \tag{10.1.13}$$

siendo

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}} \tag{10.1.14}$$

y dado que

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{|ds^2|}{dt^2}} = \sqrt{\frac{c^2dt^2 - d\boldsymbol{r}^2}{dt^2}} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2} = \sqrt{c^2 - \boldsymbol{v}^2} \tag{10.1.15}$$

Obtenemos además las componentes covariantes

$$u_\alpha = \eta_{\alpha\beta}u^\beta = \left(-\gamma, \gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right) \tag{10.1.16}$$

y el invariante constante

$$\mathbf{u}^2 \equiv \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \equiv u^2 = u^\alpha u_\alpha = -\gamma^2\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right) = -1 \tag{10.1.17}$$

10.2. Campo relativista

Campo escalar La teoría del campo relativista tiene las siguientes propiedades generales. Definimos un campo arbitrario $\phi(x)$ dependiente de las coordenadas $x^\alpha = (ct, \boldsymbol{r})$ del espacio-tiempo, que sin introducir mayor complejidad, podemos tomar en la forma de un *campo escalar*. Por definición el campo escalar es el que no varía punto a punto bajo una transformación de coordenadas, esto es,

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{10.2.1}$$

donde ϕ' es el campo transformado (con la forma específica que indique la teoría del campo) y siendo $x \to x'$ la transformación de coordenadas. Por ejemplo, el campo de temperatura es un campo escalar que representará físicamente la misma temperatura en cada punto independientemente del sistema de coordenadas x elegido y el instrumento de medición elegido (campo ϕ).

Transformaciones del espacio-tiempo En cualquier caso, y sin entrar en detalles particulares, la diferencia al crear una teoría de campo que se base en cantidades escalares como la energía o el Lagrangiano, o cantidades vectoriales como los vectores $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ del campo electromagnético, o cantidades tensoriales como el propio tensor métrico, radica en las diferentes propiedades de transformación de estas cantidades. En la teoría relativista las transformaciones admisibles en el espacio-tiempo, que darían lugar a las simetrías del sistema, son las llamadas *transformaciones de Poincaré*, definidas por una matriz 4×4 (la *transformación de Lorentz*), que denotamos por $\Lambda^\alpha{}_\beta$, que incluye como subconjunto las rotaciones el espacio de tres dimensiones, y por un vector constante $\mathbf{b} = b^\alpha$, que determina la traslación en el espacio-tiempo, e incluye a su vez como subconjunto la traslación en el espacio y en el tiempo de la física no relativista.

Formulación Lagrangiana del campo Definimos la acción relativista como la integral en el espacio-tiempo de la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$, que para el campo escalar tiene la dependencia funcional

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi(x), \partial_\alpha \phi(x)\right) \tag{10.2.2}$$

esto es, depende del campo y sus primeras derivadas. Obtenemos entonces la acción en la forma

$$S = \int L dt = \int\int \mathcal{L} d\boldsymbol{r} dt = \frac{1}{c}\int\int \mathcal{L} d\boldsymbol{r} c dt \equiv \frac{1}{c}\int \mathcal{L} dx \tag{10.2.3}$$

siendo dx el elemento de longitud en el espacio-tiempo relativista, y donde hemos utilizado de forma auxiliar el Lagrangiano equivalente

$$L \equiv \int \mathcal{L} d\boldsymbol{r} \tag{10.2.4}$$

• La forma explícita de la densidad Lagrangiana dependerá del tipo de teoría de campo que se considere. Recordando la teoría no relativista de los medios continuos, en el caso más simple la densidad Lagrangiana podrá escribirse como la diferencia de una densidad de energía cinética, dependiente del vector gradiente del campo y una densidad de energía potencial, dependiente del propio campo, en la forma

$$\mathcal{L}\left(\phi(x), \partial_\alpha \phi(x)\right) = K \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) \tag{10.2.5}$$

y en su notación espacio-temporal se escribe

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\phi(x), \partial_\alpha \phi(x)\right) &= K\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\phi\right) \cdot \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\phi\right) - V(\phi) \\ &= K\left(-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2\right) - V(\phi) \end{aligned} \tag{10.2.6}$$

muy similar en cuanto a su estructura a la densidad Lagrangiana del medio continuo no relativista (véase la sección 9.2)

$$\mathcal{L}\left(y, y_t, y_x\right) = \frac{1}{2}\rho y_t^2 - \frac{1}{2} T y_x^2 = \frac{1}{2} T\left(\frac{1}{v^2} y_t^2 - y_x^2\right) \tag{10.2.7}$$

siendo ρ la densidad de masa, T la tensión elástica del medio, y

$$v \equiv \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{10.2.8}$$

la velocidad de propagación de la perturbación $y(x,t)$ en el medio.

10.3. Características del campo escalar

10.3.1. Densidad Lagrangiana

El *campo escalar relativista* se denota por $\phi(x)$ y es un cantidad invariante bajo transformaciones de Lorentz ó *invariante Lorentz*, de forma que $\phi'(x') = \phi(x)$. Distintos observadores asignarán distintos valores a las coordenadas x en el espacio-tiempo y realizarán medidas distintas, pero estarán de acuerdo en el valor *físico* del campo en el punto preciso. La densidad Lagrangiana para el campo escalar es un invariante Lorentz dado por

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\alpha \phi) = -\frac{1}{2}\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{10.3.1}$$

donde m define la masa en reposo de la partícula. En las coordenadas espacio-temporales tiene la expresión

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{10.3.2}$$

10.3.2. Ecuaciones de Euler−Lagrange

Las ecuaciones de movimiento del campo se obtienen exigiendo que la variación de la acción sea nula, esto es $\delta S = 0$, para una variación arbitraria del campo $\delta\phi$, que sea compatible con las condiciones externas impuestas definidas por las condiciones frontera. La situación es totalmente análoga al medio continuo clásico. Esto es, partimos de la variación en la región Ω fija en el espacio-tiempo

$$\delta S = \int_\Omega \delta\mathcal{L} dx \equiv \int_\Omega \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha \phi\right)}\delta\left(\partial_\alpha\phi\right)\right) dx \tag{10.3.3}$$

Teniendo en cuenta que la variación del campo conmuta con el operador de derivación respecto a las coordenadas, esto es,

$$\delta\left(\partial_\alpha\phi\right) = \partial_\alpha\left(\delta\phi\right) \tag{10.3.4}$$

podemos integrar por partes el segundo término del desarrollo anterior, con el resultado

$$\int_\Omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)}\partial_\alpha\left(\delta\phi\right) dx = \delta\phi \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)}\bigg|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \delta\phi \cdot \partial_\alpha\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)}\right) dx \tag{10.3.5}$$

donde $\partial\Omega$ es la frontera de Ω, y entonces obtenemos la condición para la variación nula de la acción en la forma

$$\delta S = \delta\phi \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)}\bigg|_{\partial\Omega} + \int_\Omega \delta\phi \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\alpha\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)}\right)\right) dx = 0 \tag{10.3.6}$$

Para una variación arbitraria del campo compatible con las condiciones frontera prefijadas por las condiciones externas, debemos tener idénticamente $\delta\phi = 0$ sobre $\partial\Omega$, y de la condición $\delta S = 0$ para $\delta\phi$ arbitrario en el interior de Ω, se deducen las ecuaciones de movimiento del campo en la forma

$$\begin{aligned} \delta S = \cancelto{0}{\delta\phi} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)}\bigg|_{\partial\Omega} + \int_\Omega \delta\phi \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\alpha\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)}\right)\right) dx = 0 \\ \Longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\alpha\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)}\right) = 0 \end{aligned} \tag{10.3.7}$$

En conclusión, la *ecuación de Euler−Lagrange* para la evolución del campo es, en notación covariante

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\alpha\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)}\right) \tag{10.3.8}$$

10.3.3. Ecuación de Klein-Gordon

Y conocida $\mathcal{L}$ desarrollamos la ecuación del movimiento del campo a partir de la expresión covariante anterior. En primer lugar, para evaluar el término en el lado derecho, debemos notar previamente que

$$\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\,\partial_\beta\phi \tag{10.3.9}$$

y que en función del tensor δ^α_β, con las propiedades $\delta^\alpha_\beta = 1$ si $\alpha = \beta$, y $\delta^\alpha_\beta = 0$ cuando $\alpha \neq \beta$, tenemos

$$\frac{\partial\left(\partial_\beta\phi\right)}{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)} = \delta^\alpha_\beta \tag{10.3.10}$$

y por tanto,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\beta\phi - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\beta\phi = -\partial^\alpha\phi \tag{10.3.11}$$

Con esto, la ecuación de Euler−Lagrange para el campo escalar se escribe

$$-\partial^\alpha\partial_\alpha\phi + m^2\phi = 0 \tag{10.3.12}$$

que se denomina *ecuación de Klein-Gordon*. En coordenadas espacio-temporales tiene la expresión

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\phi + m^2\phi = 0 \tag{10.3.13}$$

similar al resultado obtenido para el medio elástico no relativista

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{10.3.14}$$

La diferencia reside en el término de masa en la ecuación relativista, que proviene de la masa en reposo del sistema, y por ello está ausente en la ecuación del medio continuo.

10.4. Teorema de Noether

10.4.1. Simetría de Noether

Supongamos ahora que una cierta transformación de las coordenadas y el tiempo, que en la teoría relativista toma necesariamente la forma compacta

$$x^\alpha \Rightarrow\ x'^{\,\alpha} = x^\alpha + \delta x^\alpha \tag{10.4.1}$$

junto con la transformación del campo

$$\phi(x) \Rightarrow\ \phi'(x') \tag{10.4.2}$$

deja invariante la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema relativista. Veamos que consecuencias podemos extraer de esta simetría. En principio la variación de la acción debido a esta transformación está dada por

$$\delta S = \int \mathcal{L}\left(\phi', \partial'_\alpha\phi'\right) dx' - \int \mathcal{L}\left(\phi, \partial_\alpha\phi\right) dx \tag{10.4.3}$$

Vamos a calcular por separado la variación de las variables independientes (x) y las variables dependientes, el campo $\phi(x)$, por separado. Respecto a las primeras, tenemos las relaciones

$$dx' = \mathcal{J}dx \quad , \quad \mathcal{J} \equiv \left|\frac{dx'}{dx}\right| = 1 + \frac{d\left(\delta x\right)}{dx} \tag{10.4.4}$$

siendo $\mathcal{J}$ el Jacobiano de la transformación.

10.4.2. Variación del campo y de la densidad Lagrangiana

Por otro lado, la variación del campo $\phi(x)$ será la suma de la variación por el propio cambio de la función ϕ, que denotaremos por $\overline{\delta\phi}$, tomando las coordenadas x constantes, y la variación de ϕ debida exclusivamente a la variación de la coordenadas. Esto es, la variación total $\delta\phi$ satisface

$$\delta\phi \equiv \phi'(x') - \phi(x) = \overline{\delta\phi} + \partial_\alpha\phi \cdot \delta x^\alpha \tag{10.4.5}$$

Para el campo escalar, por definición $\delta\phi \equiv 0$, pero mantenemos esta variación con valor arbitrario para analizar el caso más general que se da con otro tipo de campos. Para la densidad Lagrangiana, obtenemos igualmente

$$\delta\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}\left(\phi', \partial'_\alpha\phi\right) - \mathcal{L}\left(\phi, \partial_\alpha\phi\right) = \overline{\delta\mathcal{L}} + \partial_\alpha\mathcal{L} \cdot \delta x^\alpha \tag{10.4.6}$$

donde la variación $\overline{\delta\mathcal{L}}$ a x constante es

$$\overline{\delta\mathcal{L}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\overline{\delta\phi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)}\overline{\delta\left(\partial_\alpha\phi\right)} \tag{10.4.7}$$

10.4.3. Variación de la acción

Con todo ello, de forma análoga a lo realizado en el estudio de las simetrías del medio continuo (véase la sección 9.3), la variación de la acción se escribe

$$\delta S = \int \left(\frac{d}{dx} \left(\mathcal{L} \delta x \right) + \overline{\delta \mathcal{L}} \right) dx \tag{10.4.8}$$

Dado que el operador de derivación puede intercambiarse con el operador de variación a coordenadas constantes, denotado por el símbolo $\overline{\delta}$, tenemos

$$\overline{\delta \left(\partial_\alpha \phi \right)} = \partial_\alpha \left(\overline{\delta \phi} \right) \tag{10.4.9}$$

con lo cual, podemos escribir el último término integral en la expresión anterior, tras una integración por partes,

$$\int \overline{\delta \mathcal{L}} dx = \int \frac{d}{dx} \left(\overline{\delta \phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\alpha \phi \right)} \right) dx + \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\alpha \phi \right)} \right) \right) dx \tag{10.4.10}$$

y así, la variación de la acción tiene la expresión final

$$\delta S = \int \frac{d}{dx} \left(\mathcal{L} \delta x + \overline{\delta \phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\alpha \phi \right)} \right) dx + \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\alpha \phi \right)} \right) \right) dx \tag{10.4.11}$$

10.4.4. Teorema de Noether. Corriente conservada

Aplicando ahora la condición de que la variación de la acción sea nula por tener esa simetría $S' = S$, y que el campo evoluciona según su trayectoria real, esto es, que se satisfagan las ecuaciones de Euler−Lagrange, obtenemos el denominado *teorema de Noether* para la teoría relativista:

Si $\mathcal{L}$ es invariante bajo la transformación de las coordenadas y el tiempo

$$x^\alpha \Rightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \delta x^\alpha \tag{10.4.12}$$

junto con la transformación del campo

$$\phi(x) \Rightarrow \phi'(x') \tag{10.4.13}$$

y el campo es real, esto es, satisface las ecuaciones de campo, entonces

$$\delta S = \int \frac{d}{dx} \left(\mathcal{L} \delta x + \overline{\delta \phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\alpha \phi \right)} \right) dx = 0 \tag{10.4.14}$$

esto es,

$$\frac{d}{dx} \left(\mathcal{L} \delta x + \overline{\delta \phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\alpha \phi \right)} \right) = 0 \tag{10.4.15}$$

Si ahora recuperamos la notación covariante $\delta x \to \delta x^\alpha$ y $d/dx \to \partial_\alpha$, y teniendo en cuenta que

$$\overline{\delta \phi} = \delta \phi - \partial_\alpha \phi \delta x^\alpha \tag{10.4.16}$$

llegamos a la expresión final

$$\partial_\alpha \left(\mathcal{L} \delta x^\alpha - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\alpha \phi \right)} \partial_\beta \phi \delta x^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\alpha \phi \right)} \delta \phi \right) = 0 \tag{10.4.17}$$

con suma en los índices α, β. Con el fin de mejorar la notación, y englobar los dos primeros términos en uno sólo, ya que los dos dependen de la variación δx de las coordenadas, utilizamos la relación siguiente

$$\delta x^\alpha = \eta^{\alpha\beta} \delta x_\beta \tag{10.4.18}$$

Con esto, el teorema de Noether se lee

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0 \tag{10.4.19}$$

donde j^α es el denominado $4-$*vector de corriente*

$$j^\alpha \equiv \left(\mathcal{L}\eta^{\alpha\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha \phi\right)} \partial^\beta \phi \right) \delta x_\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha \phi\right)} \delta\phi \tag{10.4.20}$$

y decimos que la corriente j^α está *conservada*, puesto que su gradiente (en el espacio-tiempo) es nulo, $\partial_\alpha j^\alpha = 0$.

10.5. Simetrías y leyes de conservación

Pasamos a estudiar las simetrías de la teoría relativista escalar, y las cantidades conservadas asociadas. Según se detalla en la sección anterior, con la condición de que la variación de la acción sea nula y que el campo evolucione según su trayectoria real, esto es, que se satisfagan las ecuaciones de Euler−Lagrange, obtenemos el teorema de Noether

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0 \quad , \quad j^\alpha = \left(j^0, \boldsymbol{j}\right) \tag{10.5.1}$$

10.5.1. Leyes de conservación. Carga Q

De la existencia de estas corrientes conservadas j^α debidas a las simetrías del sistema, por el teorema de Noether, se deducen directamente *leyes de conservación* en el tiempo, como vemos a continuación. En las coordenadas espacio-temporales se escribe

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0 \Rightarrow \ \frac{1}{c}\frac{\partial j^0}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{10.5.2}$$

Integrando en todo el espacio tridimensional esta ecuación, que es la expresión de la ecuación clásica de continuidad, llegamos a

$$\frac{d}{dt}\int_V j^0 d\boldsymbol{r} \equiv \int_V \frac{\partial j^0}{\partial t} d\boldsymbol{r} \equiv -c \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} d\boldsymbol{r} \equiv -c \oint_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{10.5.3}$$

siendo V el volumen fijo del sistema y S la superficie que lo acota siendo $\boldsymbol{n}$ su vector en dirección normal, y donde hemos utilizado el teorema de la divergencia tridimensional (*teorema de Gauss*) en el último paso.

Asumiendo ahora que el flujo de la corriente es nulo en la frontera, esto es, $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n} \equiv 0$ ó $\oint \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n} dS = 0$, es decir asumiendo que el sistema puede considerarse cerrado y aislado, llegamos a la siguiente ley de conservación asociada a la simetría del sistema

$$\frac{d}{dt}\int_V j^0 d\boldsymbol{r} = 0 \Rightarrow \ Q \equiv \int_V j^0 d\boldsymbol{r} = \text{cte} \tag{10.5.4}$$

y hablamos de la conservación de la *carga* Q.

10.5.2. Tensor de energía-momento

Analizamos en particular las consecuencias del teorema de Noether para la simetría del campo escalar frente a la *traslación en el espacio-tiempo*, que engloba la traslación en el tiempo y en el espacio de forma conjunta.
En este caso, asumimos la ley de transformación para las coordenadas x

$$x'^\alpha = x^\alpha + a^\alpha \Rightarrow \ \delta x^\alpha = a^\alpha \tag{10.5.5}$$

siendo a^α cualquier vector constante, junto con la correspondiente ley de transformación del campo escalar

$$\phi'(x') = \phi(x) \Rightarrow \ \delta\phi = 0 \tag{10.5.6}$$

Deducimos entonces por el teorema de Noether que, al ser $\delta S = 0$, existe bajo esta transformación de simetría una corriente conservada, tal que $\partial_\alpha j^\alpha = 0$, definida por

$$j^\alpha = \left(\mathcal{L}\eta^{\alpha\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha \phi\right)} \partial^\beta \phi \right) a_\beta \tag{10.5.7}$$

Dado que a_β representa un vector constante, tenemos

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0 \Rightarrow \ \partial_\alpha \left(\mathcal{L}\eta^{\alpha\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha \phi\right)} \partial^\beta \phi \right) = 0 \tag{10.5.8}$$

de forma que este caso de simetría bajo traslación en el espacio-tiempo realmente se asocia a la conservación, no de un vector, sino del *tensor* de orden dos:

$$T^{\alpha\beta} \equiv \mathcal{L}\eta^{\alpha\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha \phi\right)} \partial^\beta \phi \quad , \quad \partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \tag{10.5.9}$$

tensor conservado que recibe el nombre, en el caso de la dinámica de una partícula puntual, de *tensor de energía-momento* ó el nombre de *tensor de energía-tensiones* para un cuerpo continuo. La importancia de este tensor reside en la relación que guarda con la energía y el momento del campo, y de ahí su denominación. La componente $\varepsilon \equiv T^{00}$ resulta ser la densidad de energía del sistema, mientras que las componentes $T^{i0} = T^{0i}$ con $i = 1, 2, 3$ son las densidades de momento según los tres ejes espaciales. Finalmente las componentes $T^{ij} = T^{ji}$, con $i, j = 1, 2, 3$, están relacionadas con la densidad de fuerza del campo, como sería la presión.

10.5.3. Ley de conservación de $T^{\alpha\beta}$

La ley de conservación del tensor relativista nace de la propia definición del tensor de tensiones en la física Newtoniana, y de su extensión directa a la física relativista.

Versión Newtoniana Sea F cualquier cantidad extensiva en el sistema Newtoniano, que queda definida, al ser extensiva, por la integral de su densidad ρ_F en el volumen V del sistema:

$$F \equiv \int \rho_F dV \tag{10.5.10}$$

Por ejemplo, F puede ser la masa del sistema, en cuyo caso ρ_F es la densidad de masa del sistema (masa por unidad de volumen). El denominado *teorema de transporte de Reynolds* establece que

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho_F dV + \oint \rho_F \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \tag{10.5.11}$$

Esto es, la variación respecto al tiempo de F, cantidad definida en el volumen dado, es la suma de dos contribuciones: la primera es debida a la propia variación en el tiempo de su densidad ρ_F en el interior del volumen (término primero) y la segunda da la variación debida al flujo de F que atraviesa la superficie que limite el volumen V (término segundo). Aquí el flujo se representa por su definición estándar $\rho_F \mathbf{u}$ siendo $\mathbf{u}$ la velocidad a la es transportada la cantidad F en el interior del medio. Definiendo entonces la *variación neta* de F en la forma de una integral de volumen

$$\frac{dF}{dt} \equiv \int K_F dV \tag{10.5.12}$$

siendo K_F la creación, cuando es positiva, o destrucción, cuando es negativa, de F por unidad de tiempo y volumen en el interior del sistema, y utilizando el teorema de Gauss para transformar la integral de superficie en una integral de volumen, podemos comprobar que la expresión diferencial del teorema de transporte para F se escribe

$$\frac{\partial \rho_F}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_F \mathbf{u}) \equiv K_F \tag{10.5.13}$$

Cuando no existe creación ni destrucción de F en el sistema, esto es, se conserva F, se satisface la llamada *ecuación de continuidad* para la cantidad F

$$0 = \frac{\partial \rho_F}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_F \mathbf{u}) \tag{10.5.14}$$

ó utilizando los índices espaciales

$$0 = \frac{\partial \rho_F}{\partial t} + \partial_i \left(\rho_F u^i\right) \tag{10.5.15}$$

Existe una puntualización importante en el caso de la energía, para $F = E$. En un *fluido* (medio continuo) la densidad de energía se define como

$$\rho_E \equiv \varepsilon \equiv \frac{1}{2}\rho_m v^2 + \epsilon \tag{10.5.16}$$

suma de las contribuciones de energía cinética y energía interna respectivamente, siendo ρ_m la densidad de masa, v la velocidad del fluido y ϵ la densidad de energía interna. Para la energía transportada en el seno del fluido, la densidad de flujo no es directamente, como podia esperarse, $\epsilon\mathbf{v}$, sino

$$(\epsilon + p)\,\mathbf{v} \tag{10.5.17}$$

siendo p la presión interior del fluido. La razón estriba en que la presión (que tiene unidades de energía por unidad de volumen) es una medida del flujo de energía, presente en el fluido, originado por el trabajo mecánico $dW = -pdV$. Dicho de otra forma, la ecuación de continuidad para la energía tendría la expresión más correcta

$$-\nabla \cdot (p\mathbf{v}) \equiv K_E = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{v}) \tag{10.5.18}$$

siendo K_E el factor de producción o destrucción de energía en el interior del fluido. No obstante, dada la similaridad de K_E con el término de flujo del lado derecho, se utiliza habitualmente la ley de continuidad en la forma usual conservativa

$$0 = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot ((\varepsilon + p)\,\mathbf{v}) \tag{10.5.19}$$

En el caso de que F sea una cantidad vectorial, por ejemplo la densidad de momento $\rho_m\mathbf{v}$ podemos definir las cantidades tensoriales correspondientes

$$T^{i0} = \rho_m v^i \tag{10.5.20}$$

y

$$T^{ij} = T^{ji} \tag{10.5.21}$$

para el tensor de tensiones. No debe olvidarse que en la física Newtoniana no existe la simetría de las componentes $i0$ y $0i$ del tensor de energía-tensiones ya que no existe en la física Newtoniana la equivalencia de masa y energía, por lo que la densidad de momento T^{i0} y la densidad del flujo de energía T^{0i} son distintas.

Versión relativista El tensor relativista es la extensión natural del tensor Newtoniano incorporando el requisito relativista de equivalencia masa-energía. Como consecuencia la densidad de momento y la densidad de flujo de energía son iguales (salvo el factor constante c^2)

$$T^{i0} = T^{0i} \tag{10.5.22}$$

Las componentes tensoriales puramente espaciales, en general, se consideran simétricas

$$T^{ij} = T^{ji} \tag{10.5.23}$$

(lo mismo que el caso Newtoniano), condición indispensable para que todo fluido relativista que esté aislado no presente ninguna rotación interna (ausencia de torques). Si las componentes no fueran simétricas, se generaría un momento de fuerzas interior en cualquier estado de equilibrio.
La ley de conservación del tensor de energía-tensiones se lee

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} \equiv \partial_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \tag{10.5.24}$$

Esta ecuación de conservación es válida para cualquier sistema relativista como es el campoelectromagnético, un fluido relativista, o cualquier otra distribución de energía en el espacio-tiempo, suponiendo siempre que la distribución de energía es lo suficientemente débil para no perturbar la geometría subyacente del espacio-tiempo (lo que daría lugar a un fenómeno relativista general). En consecuencia la geometría relativista corresponderá al espacio-tiempo plano (esto es, sin curvatura) descrito por la métrica de Minkowski.
En general, la construcción del tensor $T^{\alpha\beta}$ para un sistema relativista dado no difiere significativamente del procedimiento utilizado en la física Newtoniana. Tres son los métodos estándar utilizados:

(1) partiendo del Principio de la Acción estacionaria, definiendo una densidad Lagrangiana (que se transforma necesariamente como un escalar relativista), se obtiene el tensor y su ley de conservación aplicando el teorema de Noether para la invariancia de la acción bajo una traslación arbitraria en el espacio-tiempo.

(2) Utilizando el resultado anterior como punto de partida, e introduciendo correciones *ad-hoc* adicionales con la estructura métrica correcta y que den cuenta de los nuevos fenómenos o interacciones que se pretenden analizar.

(3) Directamente con la extensión relativista de un tensor Newtoniano conocido.

10.6. Ejercicios resueltos

10.6.1. Acción relativista para una partícula libre

Demuestre que la integral de acción de la teoría relativista para una partícula libre puede definirse en la forma

$$S = \int L dt \equiv -mc \int ds \tag{10.6.1}$$

Es conveniente hacer uso de las propiedades invariantes del espacio-tiempo a la hora de elegir el Lagrangiano.

• Una partícula relativista libre no está sometida a ninguna fuerza exterior, y por tanto su integral de acción no debe depender explícitamente de las coordenadas, y en particular del sistema de referencia elegido, y por tanto debe ser un escalar, que es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Y además dicho escalar no debe depender de ninguna propiedad externa al espacio- tiempo. El único escalar que cumple este requisito es el elemento de longitud s de la trayectoria, y en su versión diferencial ds. Entonces, introduciendo una constante de proporcionalidad por determinar, la acción relativista se escribe

$$S = \alpha \int_a^b ds \tag{10.6.2}$$

donde a, b son los dos puntos o sucesos en el espacio-tiempo, inicial y final, de la trayectoria de la partícula. La constante α dependerá de las características propias de la partícula, como su masa m.

• Para determinar el Lagrangiano, dado que se satisface $S = \int L dt$, siendo t el tiempo, debemos escribir ds en función de dt, en la forma

$$ds^2 = -c^2 dt + (d\boldsymbol{r})^2 \Rightarrow ds = -\sqrt{c^2 - \boldsymbol{v}^2}\, dt \tag{10.6.3}$$

siendo $\boldsymbol{v}$ la velocidad de la partícula. Obtenemos entonces

$$L = \alpha \frac{ds}{dt} = \alpha \sqrt{c^2 - \boldsymbol{v}^2} \tag{10.6.4}$$

Para determinar la constante α, basta aproximar dicha función para $||\boldsymbol{v}|| \ll c$, y ajustar su valor con el resultado no relativista para la partícula libre

$$L = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \tag{10.6.5}$$

Así obtenemos el valor de la constante en la forma

$$L = \alpha \frac{ds}{dt} = \alpha \sqrt{c^2 - \boldsymbol{v}^2} \simeq \alpha c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2} \right) \equiv \text{cte} + \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \Rightarrow \ \alpha = -mc \tag{10.6.6}$$

y así llegamos al Lagrangiano relativista y la acción para la partícula libre, en la forma

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} \quad , \quad S = \int L dt = -mc \int ds \tag{10.6.7}$$

10.6.2. Tensor de energía-momento para una partícula aislada. Caso no relativista

Para la física Newtoniana, una partícula aislada con masa m que se mueve a lo largo de la trayectoria tridimensional $\boldsymbol{r}_p(t)$ con velocidad $\boldsymbol{v}_p \equiv \dot{\boldsymbol{r}}_p$, tiene asociada una *densidad de partícula* en el espacio dada por la función δ de Dirac,

$$\rho_p(\boldsymbol{r}, t) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_p(t)) \tag{10.6.8}$$

donde la delta de Dirac en tres dimensiones satisface la relación integral usual, para un tiempo fijo,

$$\int f(\boldsymbol{r}, t) \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_p) d\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{r}_p, t) \tag{10.6.9}$$

Así entonces el número total de partículas en todo el espacio accesible a la partícula será

$$N = \int \rho_p(\boldsymbol{r}, t) d\boldsymbol{r} = \int \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_p(t)) d\boldsymbol{r} = 1 \tag{10.6.10}$$

efectivamente igual a la unidad en todo instante de tiempo.

(a) En función de esta densidad ρ_p defina la densidad de masa, la densidad de momento, y la densidad de energía de la partícula. Utilizando el teorema de Reynolds (véase la sección 10.5.3) demuestre que se satisface

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_p f dV = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho_p f) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}_p \right) dV \tag{10.6.11}$$

siendo f cualquier cantidad asociada al movimiento de la partícula y $\boldsymbol{j}_p \equiv \rho_p \boldsymbol{v}_p f$ la corriente de flujo asociado a ella.

(b) Utilice el resultado del apartado **(a)** para establecer la ley de conservación de la masa de la partícula.

(c) Utilice el resultado del apartado **(a)** para establecer la ley de movimiento de la partícula.

(a) Utilizando ρ_p podemos definir la densidad espacial de cualquier cantidad asociada al movimiento de la partícula. En el caso de la densidad de masa (esto es, masa por unidad de

volumen), obtenemos

$$\rho_m = m \cdot \rho_p = m\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_p(t)) \tag{10.6.12}$$

y de forma análoga para la densidad de momento

$$\rho_P = P \cdot \rho_p = m\boldsymbol{v}_p\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_p(t)) \tag{10.6.13}$$

o la densidad de energía

$$\rho_E = E_p \cdot \rho_p = E_p\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_p(t)) \tag{10.6.14}$$

siendo E_p la energía de la partícula puntual.

• Siendo $\boldsymbol{v}_p$ la velocidad de la partícula, definimos asimismo la densidad de flujo ó corriente de flujo de cualquier cantidad asociada al movimiento de la partícula como

$$\boldsymbol{j}_p = \rho_p \boldsymbol{v}_p\, f \tag{10.6.15}$$

de forma que su integral sobre una superficie dada

$$\int \boldsymbol{j}_p \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{10.6.16}$$

siendo $\boldsymbol{n}$ el vector normal a dicha superficie, representa el flujo de que atraviesa la superficie dada. Tomando ahora un volumen dado V, el teorema de transporte de Reynolds, en su forma más general, establece para el volumen fijo V

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_p f dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_p f\right) dV + \oint_S \rho_p f\left(\boldsymbol{v}_p \cdot \boldsymbol{n}\right) dS \tag{10.6.17}$$

siendo S la superficie cerrada que delimita el volumen dado. Este teorema establece que la variación total de la cantidad f en el volumen dado respecto al tiempo se debe a la variación temporal de la misma en el interior del volumen más el flujo neto de la cantidad f que atraviesa la superficie que lo delimita. Dado que el volumen es fijo, utilizando el teorema de Gauss

$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} dV \tag{10.6.18}$$

llegamos a la expresión del teorema dada en el enunciado, con

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_p f dV = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_p f\right) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}_p\right) dV \quad , \quad \boldsymbol{j}_p \equiv \rho_p \boldsymbol{v}_p f \tag{10.6.19}$$

(b) En este caso, tomando $f = m$, y considerando un volumen que incluya en todo tiempo la posición de la partícula, tenemos

$$\frac{d}{dt}\int_V m\rho_p dV = \frac{dm}{dt} \tag{10.6.20}$$

y por tanto, la ley de la variación temporal de la masa se escribe

$$\frac{dm}{dt} = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(m\rho_p\right) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(m\rho_p \boldsymbol{v}_p\right)\right) dV \tag{10.6.21}$$

Dado que el volumen es fijo, para la primera integral en el lado derecho tenemos

$$m\int_V \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = m\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_p dV = m\frac{\partial\, 1}{\partial t} \equiv 0 \tag{10.6.22}$$

Además, al Al ser $\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{v}_p(t)$, para la segunda integral obtenemos

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(m\rho_p \boldsymbol{v}_p\right) dV = m\boldsymbol{v}_p \cdot \int_V \boldsymbol{\nabla}\rho_p dV \tag{10.6.23}$$

y en virtud de la propiedad de la función delta de Dirac

$$f(x)\delta'(x-x_0) = -f'(x)\delta(x-x_0) \tag{10.6.24}$$

donde la prima indica la derivación respecto al argumento de la funcion, tenemos

$$\boldsymbol{\nabla}\rho_p = \delta'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t))\boldsymbol{u}_r \Rightarrow \ \boldsymbol{\nabla}\rho_p = -\boldsymbol{u}_r'\delta'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t)) \equiv 0 \tag{10.6.25}$$

donde $\boldsymbol{u}_r$ es el vector unitario en la dirección del vector $\boldsymbol{r}$, que por definición no depende de $\boldsymbol{r}$, esto es, $\boldsymbol{u}_r' = 0$, con lo cual tenemos

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(m\rho_p\boldsymbol{v}_p)\,dV = 0 \tag{10.6.26}$$

Con todo ello, vemos que el teorema de Reynolds para la masa m queda reducido a

$$\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \ m = \text{cte} \tag{10.6.27}$$

(c) En este caso, tomando $f = \boldsymbol{P}$, y considerando un volumen que incluya en todo tiempo la posición de la partícula, tenemos

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho_p\boldsymbol{P}) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_p\boldsymbol{v}_p : \boldsymbol{P})\right) dV \tag{10.6.28}$$

donde $\boldsymbol{v}_p : \boldsymbol{P}$ debe entenderse como un producto tensorial, esto es, un tensor de orden 2. Desarrollando obtenemos

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \int_V \left(\boldsymbol{P}\frac{\partial\rho_p}{\partial t} + \rho_p\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_p\boldsymbol{v}_p)\right) dV \tag{10.6.29}$$

De la misma forma que en el caso anterior, obtenemos, al ser $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}_p(t)$ y $m = \text{cte}$,

$$\boldsymbol{F} \equiv \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t} = m\frac{d\boldsymbol{v}_p}{dt} \tag{10.6.30}$$

expresión trivial, dado que efectivamente conocemos de antemano la posición $\boldsymbol{r}_p(t)$ y velocidad $\boldsymbol{v}_p(t)$ de la partícula.

10.6.3. Tensor de energía-momento para una partícula aislada. Caso relativista

Considere ahora la versión de la Relatividad especial para el movimiento de una partícula aislada con masa en reposo m que se mueve a lo largo de la trayectoria tridimensional $\boldsymbol{r}_p(t)$ con velocidad $\boldsymbol{v}_p = \dot{\boldsymbol{r}}_p$, respecto al observador en reposo en el origen de coordenadas.

(a) Demuestre que la expresión relativista para la densidad de la partícula está dada por

$$\rho_p(\boldsymbol{r},t) = \gamma\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p(t)) \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}_p^2}{c^2}}} \tag{10.6.31}$$

(b) Demuestre que el tensor de energía-momento relativista para la partícula aislada tiene la expresión

$$T^{\alpha\beta} = \frac{c^2}{E_p}\rho_p(\boldsymbol{r},t)P^\alpha P^\beta \tag{10.6.32}$$

siendo $E_p = \gamma mc^2$ la energía de la partícula.

(c) Verifique que este tensor $T^{\alpha\beta}$ cumple todos los requisitos exigidos al tensor de energía-momento relativista.

(a) El número de partículas del sistema, definido por

$$N \equiv \int \rho_p d\boldsymbol{r} \tag{10.6.33}$$

debe comportarse como un escalar bajo las transformaciones de Lorentz, y tiene la expresión anterior para el observador inercial en reposo relativo con la partícula (*observador solidario*). Para el observador inercial localizado en el origen de coordenadas (*observador del laboratorio*) se satisface, independientemente de la dirección del movimiento de la partícula,

$$d\boldsymbol{r}' = \frac{1}{\gamma} d\boldsymbol{r} \quad , \quad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}_p^2}{c^2}} \tag{10.6.34}$$

por la contracción de la longitud en la dirección del movimiento, mientras las otras dos direcciones espaciales no se modifican. Por tanto la expresión relativista ρ_p' para la densidad de partículas para este observador debe ser tal que

$$N = \int \rho_p' d\boldsymbol{r}' = \int \rho_p' \frac{1}{\gamma} d\boldsymbol{r} \equiv \int \rho_p d\boldsymbol{r} \tag{10.6.35}$$

Esto es, debemos identificar

$$\frac{1}{\gamma}\rho_p' = \rho_p \Rightarrow \ \rho_p' = \gamma \rho_p = \gamma \cdot \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_p(t)) \tag{10.6.36}$$

obteniendo la expresión indicada en el enunciado, y que indica que ρ_p' es un escalar relativista (su expresión es la misma para todos los observadores inerciales).

(b) El tensor de energía-momento se define como la densidad del flujo del $4-$momento de la partícula, y formalmente está dado por la expresión, en el sistema de referencia del observador del laboratorio,

$$T^{\alpha\beta} = c\rho_p' u^\alpha \cdot P^\beta \tag{10.6.37}$$

siendo

$$u^\alpha = \left(\gamma, \gamma \frac{\boldsymbol{v}_p}{c}\right) \quad , \quad P^\alpha = mcu^\alpha \tag{10.6.38}$$

y donde el factor numérico c se introduce para obtener las unidades correctas. En particular, para la componente temporal T^{00} tenemos la densidad de energía $T^{00} \sim mc^2\rho_p \sim mc^2/V$. A partir de esta definición, ya es directo obtener

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{m\gamma}\rho_p(\boldsymbol{r}, t) P^\alpha P^\beta \equiv \frac{c^2}{E_p}\rho_p(\boldsymbol{r}, t) P^\alpha P^\beta \tag{10.6.39}$$

siendo $E_p = \gamma mc^2$ la energía de la partícula libre.

(c) Verificamos ahora las propiedades del tensor energía-momento así definido. Confirmamos que dicha cantidad se comporta como un tensor bajo las transformaciones de Lorentz. Para ello lo escribimos en la forma

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{m}\rho_p'(\boldsymbol{r}', t) P^\alpha P^\beta \tag{10.6.40}$$

y vemos que los dos primeros factores se comportan como un escalar de Lorentz, mientras que $P^\alpha P^\beta$ es un tensor simétrico de orden 2, lo que demuestra que en su totalidad $T^{\alpha\beta}$ es un tensor simétrico de orden 2. Nos queda por verificar entonces sus propiedades adicionales.
En primer lugar evaluamos su componente $T^{\alpha 0}$ que debe corresponder a la densidad del $4-$momento, de forma que efectivamente

$$\int T^{\alpha 0} d\boldsymbol{r} = cP^\alpha \quad , \quad \int T^{00} d\boldsymbol{r} = cP^0 = E_p \tag{10.6.41}$$

al ser

$$\int \rho_p(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r} = 1 \tag{10.6.42}$$

donde hemos utilizado por simplicidad el sistema de referencia del observador del laboratorio. Por otro lado, las componentes $T^{\alpha i}$ determinan la densidad de flujo espacial del 4-momento, de forma que

$$\int T^{\alpha i}d\boldsymbol{r} = \frac{c^2}{E_p}P^\alpha P^i = \frac{c^2}{E_p}P^\alpha mc\gamma\frac{\boldsymbol{v}_p}{c} = P^\alpha \boldsymbol{v}_p \tag{10.6.43}$$

y finalmente T^{ij} determinan la densidad de flujo de momento (esto es, el tensor de tensiones tridimensional), de forma que

$$\int T^{ij}d\boldsymbol{r} = \frac{c^2}{E_p}P^iP^j = \frac{E_p}{mc^2}\boldsymbol{v}:\boldsymbol{v} \tag{10.6.44}$$

10.6.4. Tensor de energía-momento para el campo escalar

(a) Demuestre que a partir de la conservación del tensor de energía-momento $T^{\alpha\beta}$, se deduce la existencia no de una, sino de dos corrientes conservadas. Interprete su significado físico en función de las leyes de conservación de las dos cargas asociadas.

(b) Analice los valores de las cargas para el campo escalar.

(a) Eligiendo en primer lugar $\beta = 0$, y definiendo el 4−vector de corriente conservada $\mathbf{j}_E = j_E^\alpha \equiv T^{\alpha 0}$, esto es,

$$\partial_\alpha j_E^\alpha = 0 \Rightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot T^{i0} = 0 \tag{10.6.45}$$

encontramos la ley de conservación de la carga asociada Q_E del sistema, que no es más que la ley de conservación de la energía

$$\frac{dQ_E}{dt} = 0 \rightarrow \; Q_E \equiv \int_V j_E^0 d\boldsymbol{r} = \int_V T^{00}d\boldsymbol{r} = \int_V \varepsilon d\boldsymbol{r} = E = \text{cte} \tag{10.6.46}$$

Y si ahora elegimos un índice espacial, $\beta = i$, y definimos esta vez la corriente conservada $\mathbf{j}_i = j_i^\alpha \equiv T^{\alpha i}$, esto es,

$$\partial_\alpha j_i^\alpha = 0 \Rightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial T^{0i}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot T^{ji} = 0 \tag{10.6.47}$$

deducimos la ley de conservación de la carga asociada Q_i, que no es más que la ley de conservación del momento en la dirección del eje espacial i

$$\frac{dQ_i}{dt} = 0 \rightarrow \; Q_i \equiv \int_V j_i^0 d\boldsymbol{r} = \int_V T^{0i}d\boldsymbol{r} = P^i = \text{cte} \tag{10.6.48}$$

(b) Tomando como ejemplo particular el campo de Klein-Gordon para la densidad Lagrangiana del campo escalar

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{10.6.49}$$

el tensor de energía-momento, con la expresión general,

$$T^{\alpha\beta} \equiv \mathcal{L}\eta^{\alpha\beta} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)}\partial^\beta\phi \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\phi\right)} = -\partial^\alpha\phi \tag{10.6.50}$$

toma el valor

$$T^{\alpha\beta} = \partial^\alpha\phi\partial^\beta\phi + \mathcal{L}\eta^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi\eta^{\alpha\beta} + \partial^\alpha\phi\partial^\beta\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\eta^{\alpha\beta} \tag{10.6.51}$$

Como hemos visto, nos interesa especialmente la densidad de energía y la densidad de momento del campo, puesto que por el teorema de Noether son cantidades conservadas. Tomando $\alpha\beta = (00)$, al ser $\eta^{00} = -1$, y con suma en $\alpha = 0, 1, 2, 3$, tenemos

$$\varepsilon \equiv T^{00} = \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{10.6.52}$$

De forma análoga, tomando $\alpha\beta = (0i)$, al ser $\eta^{0i} = 0$, tenemos directamente

$$T^{0i} \equiv P^i = -\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \tag{10.6.53}$$

Los dos resultados están en analogía con lo obtenido para el medio continuo elástico para la densidad de energía y densidad de momento (véase la sección 9.2)

$$\varepsilon = \frac{1}{2}T\left(\frac{1}{v^2}y_t^2 + y_x^2\right) \quad , \quad P^i = \rho y_t y_x \tag{10.6.54}$$

donde ρ es la densidad de masa, T la tensión elástica del medio y v la velocidad de propagación de las perturbaciones. Comparando dichas expresiones vemos que el término de masa en la ecuación relativista proviene la masa en reposo del sistema, y por eso está ausente en la ecuación del medio continuo en el que no es relevante el valor de la masa en reposo.

10.6.5. Campo escalar con interacción

Sea $\mathcal{L}$ la densidad Lagrangiana de un campo escalar sometido al potencial de interacción

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - V(\phi) \quad , \quad V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \tag{10.6.55}$$

(a) Explique el significado físico de los distintos términos del potencial $V(\phi)$.

(b) Determine la ecuación de evolución del campo escalar.

(c) Determine la expresión general de la energía del campo.

(d) Considere la configuración de equilibrio del campo, y demuestre que corresponde a un valor ϕ constante.

(e) Analice para qué valores de m^2, λ esta teoría del campo escalar es físicamente realizable. Para ello, determine bajo qué condiciones la configuración de equilibrio se encuentra en el mínimo del potencial.

(a) El potencial de interacción incluye el término usual de masa del campo escalar,

$$\frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{10.6.56}$$

más un término de interacción del campo, con parámetro λ, que resulta ser simétrico bajo la transformación interna (ó transformación *gauge*) $\phi \to -\phi$. El efecto que produce tal interacción se hace más evidente en la ecuación de movimiento, que resulta ser no lineal. De esta no linealidad se deduce que si ϕ_1, ϕ_2 son dos soluciones distintas, su combinación lineal $a\phi_1 + b\phi_2$ no será una solución, debido a la presencia de un mecanismo de interacción del campo consigo mismo.
Utilizando una analogía con la dinámica de las partículas puntuales, la interacción cuadrática $\frac{1}{2}m^2\phi^2$ es la reponsable de la colisión elástica de dos partículas, mientras que la interacción cuártica $\frac{1}{4}\lambda\phi^4$ daría lugar a la colisión inelástica dos partículas con la creación de nuevas partículas, que a su vez interaccionarían con las partículas iniciales en colisión, también de forma inelástica, creándose nuevas partículas, lo que amplificaría aún más el efecto no lineal.

(b) La ecuación de evolución del campo se deduce directamente de la ecuación de Euler- Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\alpha \phi \right)} \right) \tag{10.6.57}$$

con la expresión

$$-\partial_\alpha \partial^\alpha \phi = -V'(\phi) = -m^2 \phi - \lambda \phi^3 \tag{10.6.58}$$

ó utilizando las coordenadas espacio-temporales

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 \phi + m^2 \phi \left(1 - \frac{\lambda}{m^2} \phi^2 \right) = 0 \tag{10.6.59}$$

donde se observa el término lo lineal, como indicábamos.
(c) Para determinar la expresión de la densidad de energía del campo debemos deducir en primer lugar el tensor de energía-momento, a partir de su definición, válida para el campo escalar

$$T^{\alpha\beta} = \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi + \mathcal{L} \eta^{\alpha\beta} = \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi - \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + V(\phi) \right) \eta^{\alpha\beta} \tag{10.6.60}$$

Entonces, tomando $\alpha\beta = (00)$, al ser $\eta^{00} = -1$, y con suma en $\alpha = 0, 1, 2, 3$, la densidad de energía ε está dada por

$$\varepsilon = T^{00} = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\nabla} \phi \right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \tag{10.6.61}$$

(d) Dado que la densidad de energía es suma de términos cuadráticos, el campo que representa el valor mínimo de la energía, y por tanto, es el campo en el equilibrio corresponde a un valor uniforme y constante de ϕ, digamos ϕ_0, que satisface

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{\nabla} \phi_0 = 0 \tag{10.6.62}$$

y para el cual, por tanto, la densidad tiene un valor mínimo, e igual al valor constante

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi_0^4 \tag{10.6.63}$$

(e) Analizamos ahora el comportamiento del campo en ese mínimo, en función de los valores dados para los parámetros de masa y de la interacción no lineal. Por simplicidad renombramos el potencial en la forma

$$V(\phi) = b\phi^2 + a\phi^4 \quad , \quad b = \frac{1}{2} m^2 \quad , \quad a = \frac{1}{4} \lambda \tag{10.6.64}$$

Sus valores extremos, digamos ϕ_e, son las soluciones de la condición de extremo

$$V'(\phi_e) = 0 \Rightarrow \; 2\phi_e \left(b + 2a\phi_e^2 \right) = 0 \tag{10.6.65}$$

y tenemos las tres soluciones posibles

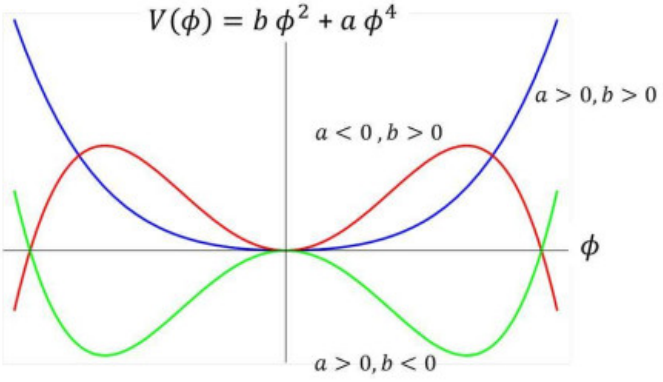
$$\phi_e = 0 \quad , \quad \phi_e = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}} \tag{10.6.66}$$

Dado que el campo debe ser real (esto es, no complejo), tendremos un solo extremo $\phi_e = 0$ si a, b tienen el mismo signo, y tres extremos si a, b tienen distinto signo. Cada una de estas soluciones es candidata a representar la configuración del campo en el equilibrio, que hemos denotado anteriormente por ϕ_0.

Verificamos cuál de ellas corresponde al mínimo de energía potencial, analizando la segunda derivada del potencial $V''(\phi) = 2b + 12a\phi^2$, que tiene los valores

$$V''(0) = 2b \quad , \quad V''\left(\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) = -4b \tag{10.6.67}$$

Como observamos en la siguiente figura, cuando $b > 0$, $\phi_e = 0$ resulta ser un mínimo local, y si además $a < 0$ existen los dos valores $\phi_e = \pm\sqrt{-2b/a}$ y ambos son máximos locales. Por el contrario, cuando $b < 0$, $\phi_e = 0$ resulta ser un máximo local, y si además $a > 0$, existen los dos valores existen los dos valores $\phi_e = \pm\sqrt{-2b/a}$ y ambos son mínimos locales.



Cuando $b > 0$, el campo tiene un único mínimo local en $\phi_e = 0$, y dependiendo del valor de a, puede tener dos máximos locales, éstos de menor relevancia desde el punto de vista dinámico. Cuando $b < 0$, y $a < 0$ la teoría de campo no tiene valor físico, ya que el campo tiene un único máximo, y ningún mínimo.
Sin embargo, para $b < 0$, y $a > 0$, $\phi_e = 0$ resulta ser un máximo local, y tenemos dos mínimos locales $\phi_e = \pm\sqrt{-2b/a}$, colocados simétricamente respecto al máximo central $\phi_e = 0$. Debemos notar no obstante que al ser $b = (1/2)m^2$, un valor negativo de b da lugar a una configuración del campo con una masa imaginaria, no física. Sin embargo, este potencial tiene una aplicación muy importante que se analiza en el siguiente ejercicio.

10.6.6. Ruptura espontánea de la simetría

Se dice que existe una *ruptura espontánea de la simetría* cuando uno de los dos mínimos del potencial de interacción queda seleccionado de alguna forma natural como el valor de configuración de equilibro del campo, de forma que la simetría de la teoría bajo el cambio $\phi \to -\phi$, desaparece.

(a) Asumiendo que el mecanismo que da lugar a tal selección es arbitrario, y queda fuera de la teoría, verifique las consecuencias de esta ruptura de simetría, analizando la evolución del campo del problema anterior en un entorno próximo del valor del equilibrio, en todos los casos físicamente realizables.

(a) Cuando $b < 0$, y $a > 0$ los dos posibles mínimos son $\phi_e = \pm\sqrt{-2b/a}$, y es el único caso que debe estudiarse donde es posible la ruptura de simetría. De acuerdo con el enunciado, con la selección arbitraria de uno de los mínimos del potencial, elijamos por ejemplo $v \equiv \sqrt{-b/2a}$, como el único campo de equilibrio del sistema, el objetivo es analizar cómo se comporta el campo en su proximidad. Para ello reescribimos el campo en un entorno del valor de equilibrio en la forma

$$\phi(x) = v + \xi(x) \tag{10.6.68}$$

de forma que en el equilibrio, el valor del campo corresponda a $\xi \equiv 0$. Se satisface por tanto

$$\partial_\alpha\phi = \partial_\alpha\xi \quad , \quad \partial^\alpha\phi = \partial^\alpha\xi \tag{10.6.69}$$

luego la ecuación de movimiento para el nuevo campo $\xi(x)$ sólo difiere del anterior en el término del potencial, dado por

$$V(\xi) = b(v + \xi(x))^2 + a\,(v + \xi(x))^4 \tag{10.6.70}$$

que desarrollado completamente queda en la forma

$$V(\xi) = 4av^2\xi(x)^2 + 4av\xi(x)^3 + a\xi(x)^4 - av^4 \tag{10.6.71}$$

Omitiendo ahora el último término constante que no tiene relevancia para la dinámica del campo, por ser una mera constante aditiva, vemos que el potencial para el campo ξ tiene la expresión general

$$V(\xi) = B\xi^2 + C\xi^3 + D\xi^4 \tag{10.6.72}$$

siendo ahora B el coeficiente del orden principal cuadrático (el que corresponde físicamente a la masa M del campo), con el valor, y con la identificación física

$$B = 4av^2 > 0 \quad , \quad B \equiv \frac{1}{2}M^2 \tag{10.6.73}$$

En consecuencia, el campo $\xi(x)$ adquiere tras la ruptura espontánea de la simetría (esto es, con la selección arbitraria del mínimo) una masa física

$$M = \sqrt{8a}v > 0 \tag{10.6.74}$$

en el denominado *mecanismo de Higgs*, responsable de la generación de masa de los campos relativistas, como el *bosón de Higgs*, a partir de la ruptura de la simetría en la configuración del equilibrio.

10.6.7. Teoría para una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético

Obtenga la expresión para la integral de acción y el Hamiltoniano para una partícula relativista cargada en presencia de un campo electromagnético. Deberá hacer uso de la expresión covariante

$$A^\alpha \equiv \left(\frac{1}{c}\phi, \boldsymbol{A}\right) \tag{10.6.75}$$

para el $4-$vector potencial del campo electromagnético, y considerar la integral de acción para la partícula relativista

$$S = -mc\int ds + \int A^\alpha j_\alpha ds \tag{10.6.76}$$

siendo j^α el $4-$vector corriente de carga de la partícula, que deberá definir adecuadamente.

El campo electromagnético satisface todos los postulados de la Relatividad especial, y de por sí es un campo relativista. Junto con la descripción clásica basada en los potenciales escalar eléctrico ϕ y vectorial magnético $\boldsymbol{A}$, de los que se deducen los campos eléctrico $\boldsymbol{E}$ y magnético $\boldsymbol{B}$ aplicando las ecuaciones de Maxwell, podemos construir una descripción relativista utilizando el $4-$vector potencial

$$A^\alpha = \left(\frac{1}{c}\phi, \boldsymbol{A}\right) \tag{10.6.77}$$

siendo su componente temporal el potencial escalar ϕ, y su componente espacial sea el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$.

Dicho esto, definimos la integral de acción. Como hemos dicho anteriormente, la acción debe ser un escalar, por un lado tenemos el escalar ds, y a partir de la cantidad externa al espacio-tiempo A^α podemos construir el escalar $A^\alpha j_\alpha$ que además es lineal en el potencial electromagnético, siendo

j^α el 4−vector de corriente de carga de la partícula, que por definición está dada por el producto de la carga eléctrica, digamos q, por la 4−velocidad de la partícula

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \tag{10.6.78}$$

Con esto, la integral de acción se escribe

$$S = -\int (mc - qA^\alpha u_\alpha)\, ds \equiv \int \mathcal{L} ds \tag{10.6.79}$$

Comprobamos por tanto que el parámetro que mide esta interacción de la partícula con el campo electromagnético es su carga eléctrica.

Una vez obtenida la expresión de la acción, el siguiente paso es obtener la expresión del Lagrangiano relativista, a partir del desarrollo

$$S = \int \mathcal{L} ds \equiv \int L dt \Rightarrow\ L = \mathcal{L}\frac{ds}{dt} \tag{10.6.80}$$

Aplicando entonces los resultados obtenidos en el ejercicio 10.6.1, es directo llegar a

$$\begin{aligned} L &= -mc^2\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} + q\left(\frac{1}{c}\phi, \boldsymbol{A}\right)\cdot\left(-\gamma, \gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)\sqrt{c^2 - \boldsymbol{v}^2} \\ &= -mc^2\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} - q\phi + q\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{10.6.81}$$

Para el caso particular de un electrón, con $q \equiv -e$, este Lagrangiano tiene la expresión

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} + e\phi - e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} \tag{10.6.82}$$

A partir de aquí, para obtener el Hamiltoniano a partir de este Lagrangiano, definimos en primer lugar el momento canónico $\boldsymbol{P}$ de la partícula, utilizando la notación vectorial, en la forma

$$\boldsymbol{P} \equiv \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = M\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A} \tag{10.6.83}$$

donde M es la masa relativista de la partícula en movimiento, esto es,

$$M = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}} \tag{10.6.84}$$

y por tanto, definiendo el *momento lineal* $\boldsymbol{p}$ de la partícula, en la forma usual $\boldsymbol{p} = M\boldsymbol{v}$, vemos que se satisface

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + q\boldsymbol{A} \tag{10.6.85}$$

Con esto, se obtiene también su Hamiltoniano, a partir de su definición, en la forma

$$H \equiv \boldsymbol{P}\boldsymbol{v} - L = M\boldsymbol{v}^2 + q\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} - L = Mc^2 + q\phi \tag{10.6.86}$$

Dado que el 4−momento lineal satisface

$$p^\alpha = mcu^\alpha = mc\left(\gamma, \gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right) \Rightarrow\ p^2 \equiv -m^2c^2 = -(Mc)^2 + \boldsymbol{p}^2 \tag{10.6.87}$$

tenemos finalmente la expresión de la conservación de la energía relativista, en la forma

$$Mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + c^2\boldsymbol{p}^2} \tag{10.6.88}$$

10.7. Ejercicios de Autoevaluación

10.7.1. Dinámica relativista de la partícula libre (R)

Obtenga la ecuación de Hamilton−Jacobi para la dinámica relativista de una partícula libre.

Nota: A partir de la función S, podemos también construir una formulación Hamiltoniana de la dinámica relativista, de forma análoga a la formulación Hamiltoniana no relativista. Para ello, el vector momento en la forma contravariante debe definirse en la forma

$$p^{\mu} \equiv -\frac{\partial S}{\partial x_{\mu}} \tag{10.7.1}$$

10.7.2. Partícula relativista en presencia de campo electromagnético (R)

Obtenga la expresión de la integral de acción y del Hamiltoniano para una partícula relativista en presencia de un campo electromagnético.

Nota: Para ello, haga uso de la expresión contravariante $A^{\mu} = \left(\frac{1}{c}\varphi, A\right)$ para el vector potencial del campo electromagnético, y para la integral de acción tome la expresión relativista

$$S = -mc \int dS - e \int A^{\mu} dx_{\mu} \tag{10.7.2}$$

10.7.3. Tensor de energía-tensiones para el campo de Klein-Gordon (R)

Para la densidad Lagrangiana de Klein-Gordon (véase la sección 10.3)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\varphi\partial_{\nu}\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{10.7.3}$$

(a) Determine la expresión para el tensor de energía-tensiones $T^{\mu\nu}$, la densidad de energía $\varepsilon = T^{00}$ y la presión $P \equiv \frac{1}{3}T^{ii}$, con suma en $i = 1, 2, 3$.

(b) Con esta definición de ε y P, determine cuál es la relación entre ellos, es decir cuál es la ecuación de estado del sistema, 1) para un campo φ estático y uniforme, 2) para un campo φ formado por ondas cuya energía sea mucho mayor que la energía en reposo mc^2 de la partícula.

10.8. Apéndice. Geodésicas

10.8.1. Principio de Acción estacionaria

Aplicamos el Principio de Acción estacionaria para determinar la ley de movimiento de la partícula puntual. Dado que la acción S es un escalar, y que el único escalar para la partícula puntual es el invariante s, la expresión covariante relativista de S tiene la expresión

$$S = -mc \int ds \tag{10.8.1}$$

donde ds es el elemento de arco medido sobre la línea de universo de la partícula. Sea $\boldsymbol{\xi}(\tau)$ la curva genérica descrita por la partícula en el espacio-tiempo, siendo τ su parámetro (por ejemplo,

su tiempo propio) y $||\mathbf{u}|| = \sqrt{|g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta|}$ el módulo del 4−vector velocidad $\mathbf{u} \equiv u^\alpha$ a la curva, de forma que localmente

$$||\mathbf{u}|| = \frac{ds}{cd\tau} \tag{10.8.2}$$

Aquí estamos considerando un tensor métrico arbitrario $g_{\alpha\beta}$ dentro del marco de la Relatividad especial, esto es, un tensor no vinculado a la presencia de un campo gravitatorio. Sólo en el caso de que $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ nos estaremos refiriendo específicamente al sistema de referencia de un observador inercial.
Fijados entonces dos puntos del espacio-tiempo, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, para las infinitas posibles curvas $\boldsymbol{\xi}(\tau)$ que los unen, con $\boldsymbol{\xi}(\tau_1) = \mathbf{p}$ y $\boldsymbol{\xi}(\tau_2) = \mathbf{q}$, la acción S está dada por el funcional

$$S(\tau_1, \tau_2; \boldsymbol{\xi}) \equiv -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} ||\mathbf{u}|| d\tau = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{|g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta|} d\tau \tag{10.8.3}$$

Entre todas las curvas posibles, la línea de universo de la partícula puntual, por el Principio de Acción estacionaria, será aquella curva para la cual la acción S tenga un valor extremo, y por tanto, por su propia definición anterior, una longitud de arco mínima o máxima, resultando ser entonces una *curva geodésica* para la métrica relativista dada.

Variación nula de la acción. Ecuación geodésica Asumimos que tanto la curva como su variación están definidas respecto al mismo sistema de coordenadas x. La variación de la acción resulta ser

$$\delta S = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{2||\mathbf{u}||} \left(\delta g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta + 2 g_{\alpha\beta} \delta u^\alpha u^\beta \right) d\tau \tag{10.8.4}$$

donde hemos utilizado la simetría del tensor métrico en sus índices (α, β). Para la variación del tensor métrico, que es función de las coordenadas, y que debe ser evaluado sobre la curva $\boldsymbol{\xi}$, tenemos directamente

$$\delta g_{\alpha\beta} = \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \cdot \delta x^\gamma = \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \cdot \delta \xi^\gamma \tag{10.8.5}$$

siendo ξ^α las coordenadas de la curva $\boldsymbol{\xi}$ en el sistema de referencia elegido. Asimismo se sobreentiende que las derivadas parciales del tensor métrico se deben evaluar en la curva $\boldsymbol{\xi}$. Para la variación de las componentes del vector velocidad tenemos

$$\delta u^\alpha \equiv \delta \left(\frac{d\xi^\alpha}{cd\tau} \right) = \frac{d}{cd\tau} \left(\delta \xi^\alpha \right) \tag{10.8.6}$$

dado que el operador de variación y el operador de derivación respecto al parámetro τ son independientes entre sí, y pueden conmutarse. Integrando por partes el segundo término integral en δS, encontramos

$$-mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{||\mathbf{u}||} g_{\alpha\beta} \frac{d\left(\delta\xi^\alpha\right)}{d\tau} u^\beta d\tau = -mc \frac{1}{||\mathbf{u}||} g_{\alpha\beta} \left(\delta\xi^\alpha\right) u^\beta \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{||\mathbf{u}||} g_{\alpha\beta} u^\beta \right) \delta\xi^\alpha d\tau \tag{10.8.7}$$

El conjunto de las curvas arbitrarias tomadas en la variación tienen sus puntos extremos fijos en $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, por lo que la variación de las coordenadas $\delta\xi^\alpha$ es nula en estos puntos, $\delta\xi^\alpha(\tau_1) = 0 = \delta\xi^\alpha(\tau_2)$, y la expresión anterior se reduce a

$$-mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{||\mathbf{u}||} g_{\alpha\beta} \frac{d\left(\delta\xi^\alpha\right)}{d\tau} u^\beta d\tau = mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{||\mathbf{u}||} g_{\alpha\beta} u^\beta \right) \delta\xi^\alpha d\tau \tag{10.8.8}$$

Reuniendo estos resultados, la condición de variación nula de la acción se escribe

$$\delta S = -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{1}{2||\mathbf{u}||} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} u^\beta u^\gamma - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{||\mathbf{u}||} g_{\alpha\beta} u^\beta \right) \right) \delta\xi^\alpha d\tau = 0 \tag{10.8.9}$$

y dado que este resultado debe ser válido sea cual sea la variación arbitraria $\delta\xi^\alpha$ de la curva descrita, deducimos que la curva descrita por la partícula puntual debe satisfacer la *ecuación geodésica*

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\cdot u^\beta u^\gamma - 2||\mathbf{u}||\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{||\mathbf{u}||}g_{\alpha\beta}u^\beta\right)=0 \tag{10.8.10}$$

Desarrollando el término entre paréntesis, llegamos a la expresión

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\cdot u^\beta u^\gamma - 2\frac{d}{d\tau}\left(g_{\alpha\beta}u^\beta\right)+2f(\tau)g_{\alpha\beta}u^\beta=0 \tag{10.8.11}$$

donde hemos definido

$$f(\tau)\equiv\frac{1}{||\mathbf{u}||}\frac{d||\mathbf{u}||}{d\tau}=\frac{d\ln||\mathbf{u}||}{d\tau} \tag{10.8.12}$$

10.8.2. Curva geodésica

Una de las propiedades importantes de una curva geodésica $\boldsymbol{\xi}$ es que su vector tangente $\mathbf{u}$ se transporta paralelamente a sí mismo a lo largo de la curva, de forma que su norma $||\mathbf{u}||$ puede tomarse constante a lo largo de la curva, y con ello tenemos $f(\tau)\equiv 0$. Cuando se elige τ tal que el vector tangente, además de ser constante, es unitario, $||\mathbf{u}||=-1$, este parámetro se denomina *tiempo propio*. En este caso, la ecuación geodésica con la parametrización elegida se reduce a

$$f(\tau)\equiv 0 \Longrightarrow\ \partial_\alpha g_{\beta\gamma}\cdot u^\beta u^\gamma - 2\frac{d}{d\tau}\left(g_{\alpha\beta}u^\beta\right)=0 \tag{10.8.13}$$

Tras el desarrollo del segundo término en la forma

$$\frac{d}{d\tau}\left(g_{\alpha\beta}u^\beta\right)=u^\beta\frac{dg_{\alpha\beta}}{d\tau}+g_{\alpha\beta}\frac{du^\beta}{d\tau}=\partial_\gamma g_{\alpha\beta}\cdot u^\beta u^\gamma+g_{\alpha\beta}\frac{du^\beta}{d\tau} \tag{10.8.14}$$

obtenemos la ecuación geodésica

$$\left(\partial_\alpha g_{\beta\gamma}-2\partial_\gamma g_{\alpha\beta}\right)u^\beta u^\gamma - 2g_{\alpha\beta}\frac{du^\beta}{d\tau}=0 \tag{10.8.15}$$

Finalmente, introduciendo los símbolos de Christoffel (véase la sección 11.7.8)

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\equiv\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(\partial_\beta g_{\gamma\sigma}+\partial_\gamma g_{\sigma\beta}-\partial_\sigma g_{\beta\gamma}\right) \tag{10.8.16}$$

que teniendo en cuenta que $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}=\delta^\gamma_\alpha$, satisfacen

$$2g_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\gamma}=\partial_\beta g_{\alpha\gamma}+\partial_\gamma g_{\alpha\beta}-\partial_\alpha g_{\beta\gamma} \tag{10.8.17}$$

encontramos la ecuación de la curva geodésica en la forma final usual

$$-2g_{\sigma\alpha}\left(\frac{du^\alpha}{d\tau}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta u^\gamma\right)=0\Longrightarrow\ \frac{du^\alpha}{d\tau}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta u^\gamma=0 \tag{10.8.18}$$

10.8.3. $4-$vector momento de la particula

Tomemos ahora, en la segunda parte del análisis, un movimiento ligeramente diferente de la partícula siguiendo una geodésica arbitraria que le lleva del punto inicial $\mathbf{p}$ al punto final $\mathbf{q}'$, en la vecindad de $\mathbf{q}$. A cada geodésica posible le corresponde una acción diferente $S(\boldsymbol{\xi})$. Para definir el $4-$*momento* de la partícula, debemos tomar la variación de la acción para la trayectoria variada, pero considerando ahora que la métrica del espacio-tiempo, al ser independiente del movimiento

de la partícula, por considerar ésta una partícula prueba, no se ve modificada. Esto es, analizamos el mismo problema bajo la condición adicional de una variación nula $\delta g = 0$. El resultado es

$$\begin{aligned}\delta S &\equiv \delta S(\tau_1, \tau_2 + \delta\tau_2, \boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}) - \delta S(\tau_1, \tau_2, \boldsymbol{\xi}) \\ &= -mc^2 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2+\delta\tau_2} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \right) \frac{1}{||\mathbf{u}||} g_{\alpha\beta} u^\beta \delta u^\alpha d\tau \approx -mc^2 \frac{1}{||\mathbf{u}||} g_{\alpha\beta} u^\beta \delta u^\alpha d\tau_2 \\ &= -mc \frac{1}{||\mathbf{u}||} g_{\alpha\beta} u^\beta \delta\xi^\alpha\end{aligned} \tag{10.8.19}$$

al ser $\delta u^\alpha c d\tau = \delta\xi^\alpha$.

Definición del 4−momento Como es usual, definimos el 4−vector momento $\mathbf{P}$ de la partícula en función de la acción como la cantidad (véase la sección 5.1)

$$P_\alpha \equiv \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \tag{10.8.20}$$

de forma que evaluada sobre la curva geodésica, según el análisis previo, nos da el valor

$$P_\alpha = \frac{\delta S}{\delta\xi^\alpha} = -mc \frac{1}{||\mathbf{u}||} g_{\alpha\beta} u^\beta = -mc \frac{1}{||\mathbf{u}||} u_\alpha \tag{10.8.21}$$

y a lo largo de la curva geodésica $\boldsymbol{\xi}$, representada en función del tiempo propio, para el cual $||\mathbf{u}|| = -1$, tenemos finalmente

$$P^\alpha = mcu^\alpha \quad , \quad u^\alpha = \frac{1}{c}\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \tag{10.8.22}$$

Ecuación de Hamilton−Jacobi Para la partícula libre, la acción S satisface la *ecuación de Hamilton−Jacobi* (véase la sección 5.1) que se deduce de la conservación del invariante

$$P^\alpha P_\alpha = m^2c^2u^2 = -m^2c^2 \quad , \quad P_\alpha \equiv \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \tag{10.8.23}$$

y se escribe en la forma

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} + m^2c^2 = 0 \tag{10.8.24}$$

Conservación del 4−momento Introduciendo la definición del 4−momento de la partícula en el Principio de Acción estacionaria obtenemos la ecuación expresión

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(-mc \frac{1}{2||\mathbf{u}||} \partial_\gamma g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta - \frac{dP_\gamma}{d\tau} \right) \delta\xi^\gamma d\tau = 0 \tag{10.8.25}$$

y por tanto, obtenemos una ley de conservación adicional: si la métrica no depende de la coordenada x^γ, es decir, x^γ es una coordenada ignorable de la métrica tenemos

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(-\frac{dP_\gamma}{d\tau} \right) \delta\xi^\gamma d\tau = 0 \tag{10.8.26}$$

debemos deducir que

$$\delta S = 0 \Longrightarrow \frac{dP_\gamma}{d\tau} = 0 \tag{10.8.27}$$

Esto es, la componente P_γ del 4−momento en la dirección de la coordenada ignorable es una constante a lo largo de la geodésica

$$\frac{dP_\gamma}{d\tau} = 0 \Rightarrow \ P_\gamma = \text{cte} \tag{10.8.28}$$

En conclusión, se deduce que existe una constante de movimiento asociada a una coordenada ignorable de la métrica. Debemos recordar no obstante que la componente contravariante P^γ no tiene por qué ser constante en general, al ser $P^\gamma \equiv g^{\gamma\alpha}P_\alpha = g^{\gamma\gamma}P_\gamma + \cdots$. Sólo en el caso de que el tensor métrico sea constante y diagonal, como en la métrica de Minkowski, tendremos también $P^\gamma \equiv \eta^{\gamma\gamma}P_\gamma = \text{cte}$.

10.9. Videoclases

Tipo	Duración	Contenidos	Enlace
Teoría	90 mn	Secciones 10.1, 10.2, 10.3, 10.4, 10.5	–
Problemas	60 mn	Problemas 10.6	–
Autoevaluación	15 mn	Problemas 10.7	–
Otros	30 mn	Apéndice 10.8	–

Apéndices - Complementos Matemáticos

Capítulo 11

Análisis tensorial

El concepto de *tensor* aparece con frecuencia en muchas áreas de la Física, ya que en general las magnitudes físicas tienen un comportamiento tensorial bien definido. Es frecuente el uso de magnitudes escalares y vectoriales, que describen variables como la masa, la temperatura, la velocidad o la fuerza, ó también el uso de tensores de orden 2 que relacionan entre sí dos propiedades físicas con naturaleza vectorial. Como ejemplo el tensor de inercia de un sólido rígido relaciona dos vectores: la velocidad angular y el momento angular. También en Mecánica de Fluidos existen ejemplos de magnitudes tensoriales importantes. Además de la temperatura otras magnitudes escalares relevantes en fluidos son la densidad, la presión o la concentración, y en cuanto a magnitudes vectoriales los ejemplos más usuales son el campo de velocidades, el campo de las fuerzas aplicadas y/o los flujos de materia y energía. Y como tensor de orden 2, el tensor de tensiones que nos da la tensión en seno del fluido en función de la dirección considerada.

11.1. Escalares y Vectores

11.1.1. Producto escalar y vectorial

El producto escalar (producto $\cdot$) de dos vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es la cantidad escalar definida por

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = uv \cos\theta \tag{11.1.1}$$

donde θ denota el ángulo que forman los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, cuando se sitúan sobre un origen común. Para entender el significado geométrico del producto escalar, introducimos el vector unitario $\boldsymbol{e}$ en la dirección del vector $\boldsymbol{u}$, definido en la forma

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{u}}{u} \tag{11.1.2}$$

con lo que el producto escalar tiene la expresión

$$\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{v} = v \cos\theta \tag{11.1.3}$$

representando la distancia de la proyección del vector $\boldsymbol{v}$ en la dirección del vector u, ó componente del vector $\boldsymbol{v}$ en la dirección de $\boldsymbol{u}$. Por tanto,

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u\,(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{v}) \tag{11.1.4}$$

y con esto, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ es la magnitud u veces la componente del vector $\boldsymbol{v}$ en la dirección de $\boldsymbol{u}$.

11.1.2. Magnitud escalar y vectorial

Presentamos ahora ejemplos de magnitudes físicas que deben ser consideradas como escalares y como vectores, y enumeramos algunas ecuaciones de la mecánica que relacionan estas cantidades.

Magnitudes escalares La temperatura, la masa, el voltaje eléctrico, el caudal de un flujo son magnitudes que se definen y evalúan con un simple número. Una temperatura de 20^{o}C, una masa de 20 kg, un voltaje de 20 voltios están todos representados por el mismo escalar 20, aunque no tendría sentido sumar un escalar de temperatura con un escalar de masa.

Vector de posición y desplazamiento Supongamos que nos desplazamos a lo largo de una trayectoria arbitraria. Podemos representar nuestra posición instantánea por el vector que une un punto fijo en el espacio, donde situamos el origen O, con el punto P situado sobre la curva descrita, en el instante dado. Por tanto, estamos definiendo el vector de posición $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$. Mucho más interesante desde el punto de vista físico es referirnos a nuestro cambio de posición, al transcurrir el tiempo. Nuestro cambio de posición sobre la trayectoria, o desplazamiento, se representa por el vector desplazamiento $\overrightarrow{P_1P_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ desde el punto P_1 al punto P_2. Es importante observar que dicho desplazamiento sólo tiene en cuenta la posición inicial y final, y no cúal ha sido el camino recorrido. Los desplazamientos obedecen la regla de adición obvia $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{P_1P_3} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1$, y en general, al no tener caracter escalar, no pueden sumarse sus magnitudes ó módulos, $|\overrightarrow{P_1P_2}| + |\overrightarrow{P_2P_3}| \neq |\overrightarrow{P_1P_3}|$.

Velocidad El vector velocidad promedio que efectuamos en nuestro desplazamiento desde el punto P_1 al punto P_2 se define como el cociente entre el desplazamiento $\overrightarrow{P_1P_2}$ y el tiempo empleado. La velocidad promedio es el módulo del vector velocidad. Muy importante en el estudio de la velocidad es la ley de composición de velocidades. Si nos desplazamos respecto a un sistema de referencia fijo con una velocidad $\boldsymbol{v}$ y lanzamos un objeto con velocidad $\boldsymbol{v}$, la velocidad del objeto respecto al sistema de referencia fijo será la combinación vectorial $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{V}$. El limite de esta ley esta establecido para velocidades suficientemente pequeñas, cuando las correcciones relativistas (debido al valor finito de la velocidad de la luz) son despreciables.

Fuerza El análisis va adquiriendo complejidad al estudiar las fuerzas; por ejemplo, las leyes anteriores de adición de desplazamientos y composición de velocidades, se transformarán en diagramas de fuerzas, y la noción de fuerza resultante. Una fuerza se define como una acción (empuje o tracción) ejercida en un punto dado, y se describe experimentalmente por los efectos que producen (movimiento, fricción, deformación, ..).
Y es ahí en el experimento, donde puede comprobarse la ley de suma de fuerzas. La condición experimental para dicha comprobación es que la fuerza $\boldsymbol{f}$ debe generar el mismo efecto medible que la aplicación conjunta de $\boldsymbol{f}_1$ y $\boldsymbol{f}_2$. Se deduce entonces que la fuerza resultante $\boldsymbol{f}$ es el vector suma de las fuerzas aplicadas $\boldsymbol{f}_1$ y $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2$. Y dada cualquier combinación de fuerzas aplicadas en un punto de un sólido la fuerza resultante se deduce de éstas aplicando la ley vectorial de adición del paralelogramo, en lo que se conoce como diagramas de fuerzas.

Mecánica de una partícula puntual. Tensores El movimiento de una partícula puntual de masa m constante está gobernado por la segunda ley de Newton $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$ donde $\boldsymbol{f}$ es la fuerza que actúa en la posición instantánea de la partícula y $\boldsymbol{a}$ es su aceleración (la derivada temporal del vector velocidad). La fuerza $\boldsymbol{f}$ será la resultante tanto de las fuerzas externas aplicadas como de las fuerzas de reacción generadas por las ligaduras a las que se ve sometido el movimiento (p.e., la fijación del punto de suspensión del péndulo).
El marco dinámico en el que el ánalisis del movimiento puede resolverse con ayuda de cantidades vectoriales es muy restringido, en particular, cuando tratemos con cuerpos puntuales y acciones y reacciones en un punto dado. Con la introducción de problemas más complejos, como el movimiento de un cuerpo continuo, donde las fuerzas se aplican en diferentes puntos, o un cuerpo deformable donde la distribución y localización de sus puntos de aplicación varía con el tiempo, se verifica que este ánalisis vectorial por sus muchas limitaciones será obsoleto, por lo que será necesario utilizar cantidades con propiedades geométricas más profundas, como son los tensores.

11.2. Tensores

11.2.1. Representación vectorial de tensores

Un tensor de *orden cero* es un escalar, que es invariante bajo rotaciones. El producto escalar se denomina también producto interior, en relación al hecho que de dos vectores obtenemos un escalar. Podemos definir una aplicación $\boldsymbol{u}\cdot$, lineal en este caso, que asocia a cada vector $\boldsymbol{v}$, el producto escalar $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$. Esta aplicación lineal de cada vector en un escalar se denomina tensor de *orden uno*. La linealidad se demuestra facilmente, ya que se satisface

$$\boldsymbol{u}\cdot(a\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{v}_2)=a\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}_2 \tag{11.2.1}$$

Consideremos ahora un par de vectores en la forma $\boldsymbol{uv}$, sin estar definido ningún producto interior entre ellos. Este tipo de par se denomina *diada*, y tiene el orden predefinido, ya que se aplica sobre un vector $\boldsymbol{w}$ siguiendo la forma

$$\boldsymbol{uv}\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}) \tag{11.2.2}$$

es decir, se aplica en la dirección del primer elemento de la diada. Obviamente, en general, $\boldsymbol{uv}\neq\boldsymbol{vu}$. Por tanto, una diada, y por definición un tensor de *orden dos*, aplica un vector en un vector. Cada tensor de orden dos puede ser representado como una combinación de diadas (tensor diadico). Los tensores de mayor orden se definen de forma similar. Por ejemplo, un tensor de tercer orden aplica un vector en un tensor de segundo orden, y puede construirse como combinación de *triadas* $\boldsymbol{uvw}$.

Tensor de proyección Dado un vector unitario arbitrario $\boldsymbol{u}$, el operador tensorial en forma de diada $P_{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{uu}$, se denomina tensor de proyección sobre la dirección definida por el vector $\boldsymbol{u}$, dado que

$$P_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}) \tag{11.2.3}$$

da la proyección del vector $\boldsymbol{v}$ sobre $\boldsymbol{u}$. De la misma forma, si I es el tensor identidad de orden 2, $I\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$, para todo $\boldsymbol{v}$, el operador tensorial $Q_{\boldsymbol{u}}=I-\boldsymbol{uu}$ determina la proyección sobre el subespacio ortogonal a la recta generada por el vector unitario $\boldsymbol{u}$, dado que

$$Q_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{v}=(I-\boldsymbol{uu})\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}) \tag{11.2.4}$$

y

$$\boldsymbol{u}\cdot(Q_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{v})=0 \tag{11.2.5}$$

Por tanto, tenemos la identificación tensorial

$$I=P_{\boldsymbol{u}}+Q_{\boldsymbol{u}} \tag{11.2.6}$$

donde el simbolo + representa la suma directa.

11.2.2. Componentes de un tensor. Representación matricial

Nos centramos ahora en los tensores cartesianos, que son aquellos definidos en un sistema de referencia cartesiano. Por simplicidad tomemos el espacio euclídeo de tres dimensiones, y posteriormente completaremos lo analizado para un sistema arbitrario de referencia.
Cualquier tensor cartesiano queda definido en términos de sus componentes sobre una base ortonormal $\{\boldsymbol{e}_i\}$, con i=1,2,3. Tomemos inicialmente un tensor $\boldsymbol{f}$ de orden uno. Definimos la componente i-ésima f_i del tensor, como la resultante de la aplicación del tensor sobre el vector $i-$ésimo $\boldsymbol{e}_i$ de la base escogida

$$f_i=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{e}_i \tag{11.2.7}$$

Ya que $\boldsymbol{f}$ es una aplicación lineal, para un vector arbitrario $\boldsymbol{u}\equiv u_i\boldsymbol{e}_i$, la acción del vector puede escribirse

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}\cdot(u_i\boldsymbol{e}_i)=u_i\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{e}_i=u_if_i=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u} \tag{11.2.8}$$

Por tanto, la acción del tensor $\boldsymbol{f}$ de orden uno queda definida en función de sus componentes f_i. Al escribir la notación reducida $\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{e}_i$ y siguientes, hacemos uso del convenio de Einstein, que

exige la suma sobre los índices mudos repetidos que aparezcan en la expresión dada.
Pasamos ahora a un tensor $\boldsymbol{T}$ de orden dos. Hemos visto que puede construirse como combinación de diadas. A partir de los vectores $\{\boldsymbol{e}_i\}$ de la base, podemos generar 9 diadas diferentes $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$, con i,j=1,2,3. Recordemos por ejemplo que $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 \neq \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1$. Por tanto, tenemos 9 componentes T_{ij} para el tensor cartesiano $\boldsymbol{T}$. Dichas componentes son escalares, y para determinarlas debemos aplicar el tensor $\boldsymbol{T}$ a cada diada, en la forma

$$T_{ij} = \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\right) \equiv \left(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_j\right)\cdot\boldsymbol{e}_i \tag{11.2.9}$$

Entonces para una diada arbitraria $\boldsymbol{uv}$, obtenemos

$$\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{uv}\right) \equiv \left(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{u} = u_i v_j \left(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_j\right)\cdot\boldsymbol{e}_i = u_i T_{ij} v_j \tag{11.2.10}$$

y al ser $u_i = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_i$, $v_j = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_j$, obtenemos

$$\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{uv}\right) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_i T_{ij}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_j = \left(T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{u} \tag{11.2.11}$$

de forma que $\boldsymbol{T}$ admite la representación diádica esperada

$$\boldsymbol{T} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{11.2.12}$$

Estas componentes cartesianas T_{ij} se relacionan directamente con la matriz cuadrada 3×3

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \tag{11.2.13}$$

Denominamos a T la matriz del tensor $\boldsymbol{T}$, relativa a la base dada. Podemos reducir así la operación tensorial sobre sus vectores a simples operaciones matriciales de T sobre sus vectores fila o columna. Todas las propiedades de los tensores de segundo orden son equivalentes a las propiedades conocidas para las matrices cuadradas.
Los tensores de mayor orden se descomponen de manera similar. Por ejemplo, para un tensor $\boldsymbol{B}$ de orden tres

$$\boldsymbol{B} = B_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k \tag{11.2.14}$$

tiene 27 componentes, dadas por

$$B_{ijk} = \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\right) \equiv \left(\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{e}_k\right)\cdot\boldsymbol{e}_j\right)\cdot\boldsymbol{e}_k \tag{11.2.15}$$

11.2.3. Algunas propiedades tensoriales

Tensor de orden dos transpuesto e inverso Cada tensor $\boldsymbol{T}$ de orden dos tiene asociado un tensor *transpuesto*, designado por $\boldsymbol{T}^t$, y definido por la relación operacional

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}^t \equiv \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u} \tag{11.2.16}$$

para todo vector $\boldsymbol{u}$, que al aplicarlo a un vector $\boldsymbol{v}$, nos permite determinar la siguiente descomposición en diadas

$$\boldsymbol{T}^t = T_{ji}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{11.2.17}$$

Como ejemplo importante, el tensor $\boldsymbol{T}$ será simétrico si $\boldsymbol{T}^t = \boldsymbol{T}$, o en notación matricial, $T_{ji} = T_{ij}$, y será antisimétrico si $\boldsymbol{T}^t = -\boldsymbol{T}$, esto es, cuando $T_{ji} = -T_{ij}$.
Un tensor $\boldsymbol{T}$ es *no singular* si ninguno de sus autovalores es nulo. Recordamos que los autovalores λ y autovectores $\boldsymbol{v}$ del tensor $\boldsymbol{T}$ son la solución de la ecuación tensorial

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \tag{11.2.18}$$

Cualquier tensor $\boldsymbol{T}$ no singular tiene un *inverso*, designado por $\boldsymbol{T}^{-1}$ que satisface las ecuaciones tensoriales

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{T} = \boldsymbol{1} \tag{11.2.19}$$

Como ejemplo importante de la aplicación de estas propiedades, un tensor se denomina *ortogonal* si su inverso coincide con su traspuesto, esto es, si $\boldsymbol{T}^t = \boldsymbol{T}^{-1}$.
Destacamos que aquí también el producto $(\cdot)$ entre dos tensores denota un producto interior, llamado específicamente la *contracción de índices* en este caso de un tensor de orden dos; en la expresión anterior, $\mathbf{1}$ es el tensor unidad de orden 2, con matriz unidad y componentes $I = \delta_{ij}$. Podemos utilizar la analogía con el cálculo matricial para entender fácilmente el mecanismo de contracción. La ecuación tensorial anterior tiene la ecuación matricial asociada

$$T_{ik}\left(T^{-1}\right)_{kj} = \left(T^{-1}\right)_{ik} T_{kj} = \delta_{ij} \tag{11.2.20}$$

y por tanto, la multiplicación matricial exige la suma (ó contracción) sobre el índice mudo k. Del mismo modo, el producto interior de dos tensores de orden dos exige la contracción interior de un orden, para obtener de nuevo un tensor de orden dos. Como hemos comentado anteriormente, los tensores tienen un significado geométrico más profundo que vectores y matrices; por ejemplo, por la existencia de un producto exterior de tensores, que en este caso hubiera dado un tensor de orden cuatro, sin contracción de índices.

Tensor de rotación y de reflexión Cada tensor cartesiano ortogonal, digamos $\boldsymbol{Q}$, es ó un tensor de rotación $\boldsymbol{R}$, ó es el producto de un tensor de rotación $\boldsymbol{R}$ y un tensor de reflexión $\boldsymbol{H}$. En la reflexión sobre un plano normal al vector $\boldsymbol{e}$, todo vector mantiene invariables sus componentes paralelas al plano, cambiando de signo la componente normal al plano, en la dirección del vector $\boldsymbol{e}$. Su representación es

$$\boldsymbol{H} = \mathbf{1} - 2\boldsymbol{e}\boldsymbol{e} \tag{11.2.21}$$

de forma que

$$\boldsymbol{v}' \equiv \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{e}\,(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}) \tag{11.2.22}$$

cumple los requisitos anteriores

$$\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{t} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t} \quad , \quad \boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e} \tag{11.2.23}$$

siendo $\boldsymbol{t}$ un vector unitario tangente al plano, y por tanto perpendicular al vector $\boldsymbol{e}$.
Por otro lado, para determinar la expresión general del tensor de rotación, de ángulo θ, y eje de rotación definido por el vector unitario $\boldsymbol{e}$ realizamos el siguiente cálculo. Los vectores con los que contamos son $\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{v}$, y $\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{v}$, y los escalares $\cos\theta$,$\operatorname{sen}\theta$, siendo $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v} = v\cos\theta$. La forma general del vector rotado será de la forma

$$\boldsymbol{v}' \equiv \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v} = a(\theta)\boldsymbol{v} + b(\theta)\boldsymbol{e} + c(\theta)\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{v} \tag{11.2.24}$$

La componente en la dirección del eje de giro debe mantenerse invariable, $\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{e} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}$. Por tanto,

$$b(\theta) = (1 - a(\theta))\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}) \tag{11.2.25}$$

Con esta relación, eliminamos la función $b(\theta)$. Bajo la rotación, se conserva invariante la norma del vector, $\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{v}' \equiv \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$, y de aquí, se debe satisfacer

$$a^2(\theta)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + \left(1 - a^2(\theta)\right)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})^2 + c^2(\theta)\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} \tag{11.2.26}$$

Haciendo uso de la propiedad del producto vectorial, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$, obtenemos

$$a^2(\theta)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + \left(1 - a^2(\theta)\right)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})^2 + c^2(\theta)\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} - c^2(\theta)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} \tag{11.2.27}$$

y por tanto, como $\boldsymbol{e}$ es arbitrario, se debe satisfacer

$$a^2(\theta) + c^2(\theta) = 1 \tag{11.2.28}$$

Dado que las funciones a,b,c sólo dependen del ángulo de giro, su valor no dependerá de la elección concreta del vector $\boldsymbol{e}$. Reducimos la complejidad asumiendo un giro en un plano, para el cual $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e} =$

0, es decir, el vector $\boldsymbol{e}$ es perpendicular al plano de giro. Para el giro en dos dimensiones, el resultado es conocido, $a(\theta) = \cos\theta, c(\theta) = \operatorname{sen}\theta$. Deducimos entonces que $b(\theta) = (1 - \cos(\theta))(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e})$. Concluimos entonces que el vector tras la rotación está dado por

$$\boldsymbol{v}' \equiv \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{v} = \cos\theta \boldsymbol{v} + (1 - \cos(\theta))(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e})\boldsymbol{e} + \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{v} \tag{11.2.29}$$

y al ser arbitrario, el tensor de rotación resulta ser

$$\boldsymbol{R} = \cos\theta \mathbf{1} + (1 - \cos(\theta))\boldsymbol{e}\boldsymbol{e} + \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{e}\times \tag{11.2.30}$$

Representación espectral de un tensor simétrico Un tensor simétrico $\boldsymbol{S}$ de orden dos tiene todos sus autovalores (λ_i) reales, y sus correspondientes autovectores son ortogonales entre sí. Los ejes principales de $\boldsymbol{S}$ son los ejes cartesianos en la dirección de los autovectores. Respecto a esta base de vectores, la matriz S tiene la forma diagonal, $S = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Si $\{\boldsymbol{e}_i\}$ es el conjunto de autovectores normalizados, el tensor simétrico puede representarse como la combinación diádica

$$\boldsymbol{S} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \tag{11.2.31}$$

Este desarrollo se denomina la *representación espectral* del tensor $\boldsymbol{S}$. Como ejemplo importante, el tensor unidad de orden dos, admite la representación espectral

$$\mathbf{1} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \tag{11.2.32}$$

11.2.4. Manejo de índices en operaciones tensoriales

Convenio de Einstein Todo índice mudo dentro de un producto de términos indica el sumatorio de los productos en el índice dado, desde el valor 1 al valor n, igual a la dimensión del espacio. Por ejemplo, en tres dimensiones

$$a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3 \tag{11.2.33}$$

pero por ejemplo,

$$a_i + b_i \tag{11.2.34}$$

sólo indica la suma de los términos i-ésimos de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.
Aplicando este convenio tenemos las siguientes propiedades generales a tener en cuenta en los cálculos tensoriales:

- Cualquier par de índices mudos puede cambiarse arbitrariamente de letra

  $$a_{ij} b_{jk} = a_{im} b_{mk} \tag{11.2.35}$$

  y en ambos casos este producto es la entrada (i, k) del producto AB de las matrices respectivas A, B. Cualquier índice libre en una expresión tendrá el mismo rango que los índices mudos de suma. Cuando uno de los índices mudos sea uno de los índices de una delta de Kronecker, basta sustituir el índice mudo por el índice libre de la delta, por ejemplo

  $$a_{jk}\delta_{ki} = a_{ji} \tag{11.2.36}$$

  $$\delta_{ij}\delta_{ik} = \delta_{jk} \tag{11.2.37}$$

- Un índice mudo no puede repetirse más de una vez dentro de un producto, y es aconsejable evitar la repetición continuada de índices en los distintos sumandos. Además en una ecuación tensorial, se tiene que mantener el mismo orden de índices en todos los términos

  $$v_i a^{ik} b_{jkl} + c_{jl} \tag{11.2.38}$$

  y serían incorrectas las expresiones siguientes

  $$v_i a^{ij} b_{jjl} + c_{jl} \tag{11.2.39}$$

  $$v_i a^{ik} b_{kmn} + c_{jl} \tag{11.2.40}$$

- Una expresión puede tener varios índices de suma. Así, $a_{ij}x_iy_j$ indicas sumas simultáneas sobre i, j. Si una expresión contiene dos índices mudos, tendrá en total n^2 sumandos; si contiene tres índices de suma, tendrá n^3 sumandos, etc. Por ejemplo, cuando $n = 2$, la expresión tensorial $y_i = c_i^r a_{rs}x_s$ tiene el desarrollo

$$y_1 = c_1^r a_{rs}x_s = c_1^1 a_{1s}x_s + c_1^2 a_{2s}x_s = c_1^1 a_{11}x_1 + c_1^2 a_{21}x_1 + c_1^1 a_{12}x_2 + c_1^2 a_{22}x_2 \quad (11.2.41)$$

$$y_2 = c_2^r a_{rs}x_s = c_1^2 a_{1s}x_s + c_2^2 a_{2s}x_s = c_2^1 a_{11}x_1 + c_2^2 a_{21}x_1 + c_2^1 a_{12}x_2 + c_2^2 a_{22}x_2 \quad (11.2.42)$$

- En el caso de sustituciones, por ejemplo la expresión $y_i = a_{ij}x_j$ en el escalar $Q = b_{ij}y_ix_j$, debemos ser cuidadosos para no obtener expresiones sin sentido, como podría ser en este caso, $Q = b_{ij}a_{ij}x_jx_j$ en el que el índice j está repetido cuatro veces. El método correcto es renombrar primero la expresión a incluir, $y_i = a_{ik}x_k$, y de aquí llegamos al resultado correcto $Q = b_{ij}a_{ik}x_kx_j$, con tres sumas dobles en i, j, k y por tanto, n^3 sumandos.

11.2.5. Otros tensores importantes

Existen dos tensores adicionales importantes que permiten una simplificación notable del cálculo tensorial. La *delta de Kronecker* δ_{ij} con el valor +1, cuando $i = j$, y el valor 0 en cualquier otro caso, y el *símbolo de permutación* ϵ_{ijk}, con el valor +1 si el triplete (i, j, k) es una permutación par de (1,2,3), con el valor -1, si es una permutación impar, y el valor 0 en cualquier otro caso. A partir de estas componentes, se generan los tensores correspondientes, el tensor unidad de segundo orden,

$$\mathbf{1} = \delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \quad (11.2.43)$$

y el tensor de permutación

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k \quad (11.2.44)$$

Como ejemplos, el símbolo de permutación aparece en la definición del determinante de una matriz 3×3

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \epsilon_{ijk}a_ib_jc_k \quad (11.2.45)$$

o en la expresión del producto vectorial de vectores

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})_i = \epsilon_{ijk}u_jv_k \quad , \quad (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \epsilon_{ijk}u_jv_kw_i \quad (11.2.46)$$

y la delta de Kroneker puede utilizarse también para definir el producto escalar de una base ortonormal

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \quad (11.2.47)$$

11.3. Mecánica de medios continuos

11.3.1. Medio continuo

Partiendo de que la cantidad de materia que existe en un porción de un cuerpo es su masa m, en el estudio de los cuerpos y medios continuos, la cantidad fundamental, más que la masa m, es la densidad ρ, ó masa por unidad de volumen. Ambas variables, m y ρ dependerán de la posición y el tiempo, pero mientras la masa depende del volumen V del cuerpo o porción seleccionado, y es proporcional a éste, la densidad por su propia definición resulta independiente de V, dentro de unos límites, y por tanto, en la descripción dinámica de su evolución no será necesario hacer referencia a ningún volumen determinado del medio. Dado que el medio es continuo, todas las variables del sistema pueden describirse matemáticamente mediante funciones continuas de las coordenadas, y del tiempo, y por ejemplo, se establece la relación

$$m(V) = \int_V \rho dV \quad (11.3.1)$$

para la masa del medio continuo contenida en el volumen V.

11.3.2. Fuerzas en el medio continuo

La Mecánica del medio continuo estudia la variación en el espacio y el tiempo de las variables continuas del sistema, inducida como respuesta a la presencia de fuerzas en el medio y posiblemente a efectos impuestos externamente (p.e. cambios de temperatura) sobre el medio. Como medios continuos se analizan los fluidos y los sólidos elásticos, entre otros. Tomaremos el caso de un fluido como ejemplo de estudio.
Dentro de las fuerzas presentes en el medio se distinguen dos tipos, de corto y de largo alcance. Las fuerzas de largo alcance varían muy poco en posiciones vecinas del medio, y por ello, actúan de forma uniforme, por lo que resultan ser proporcionales al volumen de la porción del medio considerado, y por ello reciben el nombre de *fuerzas de volumen*. Ejemplos de fuerzas de volumen son la fuerza de la gravedad, las fuerzas inerciales, o las fuerzas electromagnéticas. Si $\boldsymbol{f}$ es una fuerza de este tipo, medida por unidad de masa (p.e en el caso de la fuerza de la gravedad, tendremos $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$), la fuerza por unidad de volumen será $\rho\boldsymbol{f}$, y la fuerza ejercida sobre un elemento del medio de volumen V es, por tanto

$$\boldsymbol{F}_V = \int_V \rho \boldsymbol{f} dV \tag{11.3.2}$$

Del mismo modo, existen fuerzas de corto alcance que comprenden diferentes tipos de interacción de nivel molecular, esto es, que se producen entre las moléculas de capas vecinas del medio continuo. El hecho característico de estas fuerzas moleculares es que son despreciables a distancias por encima de las dimensiones moleculares típicas del sistema. Como consecuencia, fuerzas de esta naturaleza que se ejercen entre dos elementos de volumen del fluido se deberán localizar en un fina capa de la superficie que los separa. Por eso, se denominan también *fuerzas de superficie* o de contacto. Si $\boldsymbol{t}$ es la fuerza por unidad de superficie, la fuerza total que se aplica en la superficie que rodea al volumen V de fluido será

$$\boldsymbol{F}_S = \oint_S \boldsymbol{t} dS \tag{11.3.3}$$

Las fuerzas de superficie quedan descritas por las llamadas *ecuaciones de constitución*, que son las relaciones matemáticas entre el estado dinámico del fluido (determinado por el campo de velocidades), y las fuerzas correspondientes generadas en el seno del fluido.

11.3.3. Ecuaciones del movimiento

Una vez descritas las fuerzas del sistema, estamos en disposición de establecer las ecuaciones de movimiento del fluido. Para ello, definimos la velocidad $\boldsymbol{v}$ del fluido, función de las coordenadas del punto en cuestión, y del tiempo, de forma que

$$\boldsymbol{P} = \int_V \rho \boldsymbol{v} dV \tag{11.3.4}$$

es el vector momento lineal del elemento de fluido seleccionado, de volumen V. La segunda ley de movimiento de Newton en su forma $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{P}/dt$ tiene su expresión en el medio continuo, para el volumen seleccionado, teniendo en cuenta la expresión y tipo de las fuerzas implicadas, descritas en el apartado anterior,

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \boldsymbol{v} dV = \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_S + \boldsymbol{F}_V = \oint_S \boldsymbol{t} dS + \int_V \rho \boldsymbol{f} dV \tag{11.3.5}$$

A la hora de calcular la derivada temporal, la expresión integral del momento lineal depende del tiempo por dos circunstancias, primero porque la velocidad $\boldsymbol{v}$ del fluido depende del tiempo, y en segundo lugar porque el volumen dado de fluido evoluciona con el tiempo, principalmente se deforma en una extensión dependiente del propio campo de velocidad local. Vemos así que la ecuación del movimiento del fluido es no lineal en $\boldsymbol{v}$, una de sus principales características. Para avanzar en el análisis podemos considerar 1) un fluido de densidad constante, y 2) que tomamos un volumen de control fijo en el sistema, en cuyo caso en el interior de V no se encontrará siempre la

misma cantidad de fluido, ni las mismas partículas fluidas, ya que éstas en cada instante atraviesan el volumen de control con velocidad $\boldsymbol{v}$. Para este volumen de control

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \boldsymbol{v} dV \equiv \int_V \rho \frac{d}{dt}\boldsymbol{v} dV = \oint_S \boldsymbol{t} dS + \int_V \rho \boldsymbol{f} dV \tag{11.3.6}$$

En esta ecuación de movimiento, tenemos dos términos dependientes del volumen y un término dependiente de la superficie. Obviamente $V \sim S \cdot h$ donde h es un longitud perpendicular a la superficie. Dado que el volumen de control es arbitrario, podemos tomar el límite $h \to 0$ y ver el resultado. Mientras que los términos de volumen son proporcionales a h y se anulan en este límite, el término de superficie no se anula en este límite, y por ello para que se satisfaga la ecuación de movimiento debemos exigir adicionalmente que

$$\lim_{h\to 0} \oint_S \boldsymbol{t} dS = 0 \tag{11.3.7}$$

condición que nos dará la forma general del vector $\boldsymbol{t}$.

11.3.4. Tensor de tensiones

Dado que sobre una superficie esférica, por simetría, $\int \boldsymbol{n} dS = 0$, donde $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario en la dirección normal (dirección radial), podemos anticipar que $\boldsymbol{t} = \mathcal{T}\boldsymbol{n}$ donde $\mathcal{T}$ es una cantidad por determinar que contiene la información sobre las fuerzas locales, y que podrá ser un escalar o un tensor de orden dos. Dado que la fuerza de superficie no tiene por qué dirigirse exclusivamente en la dirección normal, $\mathcal{T}$ no será una cantidad escalar, sino un tensor de orden dos, y obtenemos la ecuación de Cauchy para los esfuerzos y tensiones de un cuerpo continuo

$$\boldsymbol{t} = \mathcal{T}\boldsymbol{n} = T_{ij} n_j \tag{11.3.8}$$

donde $\mathcal{T}$ se definirá entonces como el *tensor de tensiones* de Cauchy. Sus componentes tienen un significado claro, T_{ij} es la i-ésima componente de la fuerza por unidad de superficie que se aplica en la dirección definida por la j-ésima componente de la normal a la superficie. Y la fuerza por unidad de superficie sobre S resulta de la integración en S de todas estas contribuciones.

Una vez introducido el tensor de tensiones, la ecuación de movimiento tiene la expresión

$$\int_V \rho \frac{d}{dt}\boldsymbol{v} dV = \oint_S \mathcal{T}\boldsymbol{n} dS + \int_V \rho \boldsymbol{f} dV \tag{11.3.9}$$

Con ayuda del teorema de la divergencia, $\oint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n} dS = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{f} dV$, la integral en superficie puede transformarse en una integral en el volumen, y por tanto, la ley de movimiento queda

$$\int_V \rho \frac{d}{dt}\boldsymbol{v} dV = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathcal{T} dV + \int_V \rho \boldsymbol{f} dV \tag{11.3.10}$$

ó

$$\int_V \left\{ \rho \frac{d}{dt}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathcal{T} - \rho\boldsymbol{f} \right\} dV = 0 \tag{11.3.11}$$

y dada la arbitrariedad de V, obtenemos la ley de movimiento del fluido en su versión diferencial

$$\rho \frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathcal{T} + \rho\boldsymbol{f} \tag{11.3.12}$$

ó en notación tensorial

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i \tag{11.3.13}$$

Simetría del tensor de tensiones Hemos visto que la segunda ley de Newton exige que el tensor de tensiones $\mathcal{T}$ tenga cierta estructura determinada. Comprobamos ahora que la segunda ley de Newton para la rotación del volumen de control

$$\frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{v}dV = \oint_S \boldsymbol{r}\times(\mathcal{T}\boldsymbol{n})\,dS + \int_V \boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{f}dV \tag{11.3.14}$$

define la simetría de $\mathcal{T}$. Aquí $\boldsymbol{r}$ es el vector de posición respecto al punto de referencia (p.e. respecto al centro de masa). Dado que $d\boldsymbol{r}/dt\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$, la derivada temporal satisface

$$\frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{v}dV = \int_V \boldsymbol{r}\times\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}dV \tag{11.3.15}$$

Por el teorema de la divergencia, la integral de superficie es

$$\oint_S \boldsymbol{r}\times(\mathcal{T}\boldsymbol{n})\,dS = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{r}\times\mathcal{T})\,dV \tag{11.3.16}$$

y desarrollando obtenemos

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{r}\times\mathcal{T})\,dV = \int_V \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathcal{T})\,dV + \int_V \mathcal{I}^t\times\mathcal{T}dV \tag{11.3.17}$$

donde hemos hecho $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r}=\partial x_j/\partial x_i=\delta_{ji}=\mathcal{I}^t$. Con estos resultados parciales, la segunda ley de Newton para la rotación se escribe

$$\int_V \boldsymbol{r}\times\left(\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}-\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathcal{T}-\rho\boldsymbol{f}\right)dV = \int_V \mathcal{I}^t\times\mathcal{T}dV \tag{11.3.18}$$

Teniendo en cuenta la ecuación de movimiento para la traslación, vemos que esta ecuación lleva directamenta a la condición

$$\int_V \mathcal{I}^T\times\mathcal{T}dV = \boldsymbol{0} \tag{11.3.19}$$

y por tanto, por la arbitrariedad del volumen de control, se deduce la condición adicional

$$\mathcal{I}^T\times\mathcal{T}=\boldsymbol{0} \tag{11.3.20}$$

para el tensor de tensiones $\mathcal{T}$, ó en componentes $\epsilon_{ijk}\delta_{lj}T_{lk}\equiv\epsilon_{ijk}T_{jk}=0$. Dado que el tensor ϵ_{ijk} es antisimétrico en (j,k), para que la contracción con el tensor $\mathcal{T}$ arbitrario dé el vector nulo, necesariamente $\mathcal{T}$ *debe ser un tensor simétrico*, esto es, $T_{jk}=T_{kj}$. La excepción a esta regla se producirá en medios continuos que sufren rotaciones locales en ausencia de movimiento, en cuyo caso existen torques adicionales en la ley de movimiento de la rotación que deben compensarse con el torque asociado al tensor de tensiones.

11.4. Independencia de las coordenadas

Fijémonos en un vector $\boldsymbol{v}$ en un punto P del espacio, que es visto por dos observadores ligados a sus sistemas de coordenadas K_1 y K_2, respectivamente. Consideremos además que $\boldsymbol{v}$ representa una entidad independiente de las coordenadas, esto es, tiene sentido físico y es independiente de la localización que le asignemos. Desde el punto de vista matemático, vamos a necesitar una definición de esta independencia de las coordenadas. Lógicamente, cada observador medirá un vector propio, en este caso $\boldsymbol{V}_1$ y $\boldsymbol{V}_2$. La independencia de las coordenadas de $\boldsymbol{v}$ requiere que $\boldsymbol{v}$ sea el mismo para todos los observadores, esto es, que ambos vectores sean idénticos, $\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}_2$. No obstante, las componentes del vector $\boldsymbol{v}$ serán diferentes en general en cada sistema de coordenadas. En virtud de la existencia y propiedades de $\boldsymbol{v}$, los dos observadores van a ser capaces de comparar sus resultados, y deducir la ley de transformación entre sus sistemas de coordenadas, que servirá a su vez para

verificar de forma sencilla si una entidad es susceptible de ser independiente de las coordenadas. Del hecho de la identidad de los vectores $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2$ se deduce la identidad también sus módulos

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2 \rightarrow \boldsymbol{V}_1 \cdot \boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2 \cdot \boldsymbol{V}_2 \tag{11.4.1}$$

ó

$$V_1^2 = V_2^2 \tag{11.4.2}$$

donde V_1 y V_2 son las magnitudes respectivas.
Del mismo modo que a partir del vector $\boldsymbol{v}$ construimos el escalar $\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V}$, partiendo de un diádico $\mathcal{S} = \boldsymbol{AB}$ podemos construir el escalar $s = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, y de la independiencia de las coordenadas del tensor $\mathcal{S}$ se deduce la independencia de las coordenadas del escalar s.
Como veremos en los problemas resueltos, los tensores se definen formalmente mediante las leyes de transformación de sus componentes. Y recíprocamente, estas transformaciones son las requeridas para que el tensor resultante sea independiente de las coordenadas, y por tanto, tenga sentido físico. Esta propiedad de invariancia frente al observador permite la relación entre la realidad objetiva matemática y la realidad objetiva de los objetos físicos y sucesos. Definiremos de forma general los tensores como las cantidades que son independientes de las coordenadas, y recíprocamente sólo aquellas cantidades independientes de las coordenadas son admisibles en la clase de objetos que llamamos tensores.

11.5. Ejercicios resueltos

11.5.1. Tensor δ^i_j

Probar que las componentes del tensor δ^i_j son las mismas en todos los sistemas de coordenadas.

Consideremos un tensor arbitrario $\mathcal{T}$, independiente de las coordenadas. El tensor identidad, cuyas componentes son δ^i_j, satisface en el sistema K

$$\mathcal{I} \cdot \mathcal{T} = \mathcal{T} \tag{11.5.1}$$

y también, en el sistema K^*

$$\mathcal{I}^* \cdot \mathcal{T}^* = \mathcal{T}^* \tag{11.5.2}$$

Dada la independencia de las coordenadas del tensor $\mathcal{T}$, esto es, dado que $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$, de ambas relaciones podemos deducir que

$$(\mathcal{I} - \mathcal{I}^*) \cdot \mathcal{T} \equiv 0 \tag{11.5.3}$$

Como $\mathcal{T}$ es un tensor arbitrario, necesariamente $\mathcal{I} = \mathcal{I}^*$, y por tanto, las componentes del tensor δ^i_j son las mismas en todos los sistemas de coordenadas.

11.5.2. Independencia de las coordenadas. Vector

Pruebe la equivalencia entre la independencia de las coordenadas, y la definición formal de un tensor de rango 1 (vector).

Para mostrar la equivalencia de la expresión $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^*$ para el vector $\boldsymbol{v}$, y la expresión $v^i = (\frac{\partial x^i}{\partial x^{*j}}) v^{*j}$ para las componentes contravariantes, debemos demostrar que

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^* \Leftrightarrow v^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{*j}} \right) v^{*j} \tag{11.5.4}$$

Primero mostramos la necesidad. Asumimos que

$$v^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{*j}} \right) v^{*j} \tag{11.5.5}$$

Entonces

$$\boldsymbol{V} = v^i \boldsymbol{e}^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{*j}}\right) v^{*j} \boldsymbol{e}^i = v^{*j} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{*j}}\right) \boldsymbol{e}^i = v^{*j} \boldsymbol{e}^{*j} = \boldsymbol{V}^* \tag{11.5.6}$$

donde hemos utilizado el caracter contravariante de la base $\boldsymbol{e}^i$. Por tanto,

$$\left\{ v^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{*j}}\right) v^{*j} \right\} \Rightarrow \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^* \tag{11.5.7}$$

Probamos ahora la suficiencia, asumiendo que $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^*$. Entonces

$$v^i \boldsymbol{e}^i = v^{*j} \boldsymbol{e}^{*j} \tag{11.5.8}$$

Los vectores de la base contravariante $\boldsymbol{e}^i$ y $\boldsymbol{e}^{*j}$ son tangentes a los ejes coordenados en cada sistema de coordenadas, K y K^*. Si denominamos a dichos ejes de coordenadas x^i y x^{*j}, entonces los vectores de la base están dados por

$$\boldsymbol{e}^i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{e}^{*j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{*j}} \tag{11.5.9}$$

y podemos deducir la ley de transformación

$$\boldsymbol{e}^i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{*j}}\right)\left(\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^i}\right) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{*j}}\right)\left(\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^i}\right) = \boldsymbol{e}^{*j}\left(\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^i}\right) \tag{11.5.10}$$

Substituyendo este resultado en $v^i \boldsymbol{e}^i = v^{*j} \boldsymbol{e}^{*j}$, obtenemos

$$\left(v^{*j} - v^i \left(\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^i}\right)\right) \boldsymbol{e}^{*j} = 0 \tag{11.5.11}$$

y por tanto,

$$v^{*j} = v^i \left(\frac{\partial x^{*j}}{\partial x^i}\right) \tag{11.5.12}$$

Con esto queda demostrado también que

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^* \Rightarrow \left\{ v^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{*j}}\right) v^{*j} \right\} \tag{11.5.13}$$

11.5.3. Independencia de las coordenadas. Escalar

Partiendo de un diádico $\mathcal{S} = \boldsymbol{AB}$ podemos construir el escalar $s = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. Demuestre que de la independencia de las coordenadas del tensor $\mathcal{S}$ se deduce la independencia de las coordenadas del escalar s.

Partimos de la condición de independencia de las coordenadas $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$, que escribimos en la forma

$$\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{B}_2 \tag{11.5.14}$$

Aplicando este diádico al vector $\boldsymbol{A}_1$ encontramos

$$(\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{B}_1 = (\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{B}_2 \tag{11.5.15}$$

lo que nos permite determinar la relación entre los vectores $\boldsymbol{B}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2}{a^2} \boldsymbol{B}_2 \equiv \beta \boldsymbol{B}_2 \tag{11.5.16}$$

donde $a^2 = \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_1$. Utilizamos esta relación partiendo de nuevo de la condición de independencia $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$, y aplicándola al vector $\boldsymbol{B}_1$. Obtenemos

$$(\boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_1)\boldsymbol{A}_1 = (\boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{A}_2 \tag{11.5.17}$$

y de aquí

$$(\beta \boldsymbol{B}_2 \cdot \beta \boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{A}_1 = (\beta \boldsymbol{B}_2 \cdot \boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{A}_2 \tag{11.5.18}$$

con lo cual

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{1}{\beta}\boldsymbol{A}_2 \tag{11.5.19}$$

Con estos resultados, podemos comprobar la independencia de las coordenadas del escalar s:

$$s_1 = \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{B}_1 = \frac{1}{\beta}\boldsymbol{A}_2 \cdot \beta \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{B}_2 = s_2 \tag{11.5.20}$$

11.5.4. Independencia de las coordenadas. Diferencial de una función

Demuestre que todas las cantidades que aparecen en la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{\nabla} f \cdot d\boldsymbol{r} = df$$

son independientes de las coordenadas.

Hemos demostrado anteriormente que siendo $d\boldsymbol{r}$ un vector, se satisface $d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r}^*$. Si ahora f es una cantidad escalar que es independiente de las coordenadas, su diferencial df también lo será, con $df = df^*$. Por tanto, de

$$df = \boldsymbol{\nabla} f \cdot d\boldsymbol{r} = df^* = \boldsymbol{\nabla}^* f^* \cdot d\boldsymbol{r} \tag{11.5.21}$$

obtenemos la condición

$$(\boldsymbol{\nabla} f - \boldsymbol{\nabla}^* f^*) \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{11.5.22}$$

y en función de la arbitrariedad de $d\boldsymbol{r}$, deducimos la independencia de las coordenadas del último factor, $\boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{\nabla}^* f^*$.

11.5.5. Tensor isótropo

Un tensor isótropo es aquel cuyas componentes son invariantes bajo rotaciones. Determine los tensores isótropos hasta orden cuatro. Como ejemplo, determine el valor de la integral en coordenadas esféricas

$$\int n_i n_j d\Omega$$

donde $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario en dirección radial, y Ω es el ángulo sólido.

Todos los tensores de orden cero son escalares, y por tanto, invariantes bajo rotaciones. En orden uno, los tensores son vectores, que no son invariantes bajo rotaciones. En orden dos, el único invariante es el tensor unidad δ_{jk}, salvo constante de proporcionalidad. En orden tres, el tensor invariante, salvo constante de proporcionalidad, es el símbolo alternante de Levi-Civita, ϵ_{ijk}. Por último, para contruir tensores de orden cuatro, sólo podemos contar con el tensor unidad de orden dos. Las combinaciones posibles son $\delta_{ij}\delta_{kl}$, $\delta_{ik}\delta_{il}$,$\delta_{il}\delta_{jk}$, y por tanto, el tensor más general será de la forma

$$\Lambda_{ijkl} = \alpha \delta_{ij}\delta_{kl} + \beta \delta_{ik}\delta_{il} + \gamma \delta_{il}\delta_{jk} \tag{11.5.23}$$

Analizamos ahora el valor de la integral. Dado que no existe un vector característico en el sistema, la integral debe ser proporcional al tensor de orden dos isótropo, esto es,

$$\int n_i n_j d\Omega = \alpha \delta_{ij} \tag{11.5.24}$$

Aplicando la contracción de grado dos con el tensor unidad δ^{ij}, en el lado izquierdo tenemos

$$\delta^{ij} \int n_i n_j d\Omega = \int \delta^{ij} n_i n_j d\Omega = \int n^j n_j d\Omega = \int d\Omega = 4\pi \tag{11.5.25}$$

mientras que en el lado derecho

$$\alpha\delta^{ij}\delta_{ij} = \alpha\text{Traza}(\mathcal{I}) = 3\alpha \tag{11.5.26}$$

Igualando ambas expresiones, obtenemos el valor de α, y con ello el valor de la integral

$$\int n_i n_j d\Omega = \frac{4\pi}{3}\delta_{ij} \tag{11.5.27}$$

11.5.6. Ejemplos identidades no tensoriales

Demuestre que las expresiones que siguen

$$a_{ij}\left(x_i + y_j\right) = a_{ij}x_i + a_{ij}y_j$$

$$a_{ij}x_i y_j = a_{ij}y_i x_j$$

$$\left(a_{ij} + a_{ji}\right)x_i y_j = 2a_{ij}x_i y_j$$

no son identidades tensoriales.

En la primera ecuación, el lado derecho está bien definido como suma de dos términos con un único índice mudo covariante

$$a_{ij}x_i + a_{ij}y_j = a_{ji}x_j + a_{ij}y_j \tag{11.5.28}$$

pero el lado izquierdo no, dado que no se puede realizar la suma $x_i + y_j$ término a término. Obviamente la segunda ecuación no es correcta, porque en general no se pueden intercambiar los índices mudos de las variables, sin variar la expresión resultante. Y la última ecuación sólo sería correcta si $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, j.

11.5.7. Comprobación identidades tensoriales

Demuestre las siguientes identidades tensoriales.

$$\left(a_{ij} + a_{ji}\right)x_i x_j \equiv 2a_{ij}x_i x_j$$

$$\left(a_{ij} - a_{ji}\right)x_i x_j \equiv 0$$

utilizando cuando proceda argumentos de simetría.

En la primera ecuación, el lado derecho puede desarrollarse en la forma

$$\left(a_{ij} + a_{ji}\right)x_i x_j = a_{ij}x_i x_j + a_{ji}x_i x_j \tag{11.5.29}$$

Renombrando los índice mudos i, j en el segundo sumando por j, i, obtenemos en el lado derecho

$$a_{ij}x_i x_j + a_{ji}x_i x_j = a_{ij}x_i x_j + a_{ij}x_j x_i \tag{11.5.30}$$

y agrupando, obtenemos el resultado pedido

$$\left(a_{ij} + a_{ij}\right)x_j x_i = 2a_{ij}x_i x_j \tag{11.5.31}$$

Realizando el mismo procedimiento para la segunda ecuación, vemos que

$$\left(a_{ij} - a_{ji}\right)x_i x_j = a_{ij}x_i x_j - a_{ji}x_i x_j = a_{ij}x_i x_j - a_{ij}x_j x_i = \left(a_{ij} - a_{ij}\right)x_i x_j \equiv 0 \tag{11.5.32}$$

Este caso puede describirse de forma sencilla como la contracción de un tensor $a_{ij} - a_{ji}$, totalmente antisimétrico en i, j, con el tensor $x_i x_j$, simétrico en los mismos i, j. Por simetría, tal contracción es el escalar 0. Visto esto, también podemos resolver la primera relación con argumentos de simetría. Dado un tensor a_{ij}, podemos construir su parte simétrica en la forma

$$\left(a_S\right)_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right) \tag{11.5.33}$$

como puede comprobarse fácilmente $(a_S)_{ij} = (a_S)_{ji}$. Dado que $x_i x_j$ es un tensor simétrico, por simetría, su contracción con el tensor arbitrario a_{ij} será igual a la contracción con la parte simétrica de a_{ij}, esto es

$$a_{ij} x_i x_j = (a_S)_{ij}\, x_i x_j \tag{11.5.34}$$

y de aquí se deduce la relación del enunciado. Por completitud, si ahora construimos la parte antisimétrica del tensor a_{ij},

$$(a_A)_{ij} = \frac{1}{2}\,(a_{ij} - a_{ji}) \tag{11.5.35}$$

que satisface obviamente $(a_A)_{ij} = -\,(a_A)_{ji}$, y

$$a_{ij} = (a_A)_{ij} + (a_S)_{ij} \tag{11.5.36}$$

vemos que su contracción con el tensor simétrico $x_i x_j$ es nula

$$(a_A)_{ij}\, x_i x_j \equiv 0 \tag{11.5.37}$$

11.5.8. Derivada parcial de un escalar

Si las componentes a_{ij} son constantes, calcúlese la derivada parcial

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,(a_{ij} x_i x_j)$$

Antes de realizar la derivación debemos destacar que $s \equiv a_{ij} x_i x_j$ es un escalar, y por tanto el resultado de $\partial(s)/\partial x_k$ debe ser un vector con índice libre k. Realizando la regla de derivación y dada la constancia de los a_{ij}, encontramos

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,(a_{ij} x_i x_j) = a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}\,(x_i x_j) = a_{ij} x_j \frac{\partial x_i}{\partial x_k} + a_{ij} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \tag{11.5.38}$$

Dado que las x_i son coordenadas independientes (cartesianas o no), se satisface para cada una de ellas

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{ik} \tag{11.5.39}$$

en función de la delta de Kronecker, y por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,(a_{ij} x_i x_j) = a_{ij} x_j \delta_{ik} + a_{ij} x_i \delta_{jk} \tag{11.5.40}$$

Finalmente por las propiedades de la contracción con la función δ, $x_i \delta_{ij} = x_j$, llegamos al resultado

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,(a_{ij} x_i x_j) = a_{kj} x_j + a_{ik} x_i = (a_{ki} + a_{ik})\, x_i \tag{11.5.41}$$

renombrando el índice mudo del primer sumando. Como esperabamos, el resultado es un vector con índice libre k.

11.5.9. Demostración identidades tensoriales

Utilizando la notación por índices, demuestre las siguientes identidades

(1) Si $\mathcal{S}$ es un tensor simétrico de orden dos y $\mathcal{A}$ un tensor antisimétrico de orden 2, su contracción es el escalar nulo.

(2) $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\phi \equiv \mathbf{0}$ para toda función escalar ϕ.

(3) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}$ para todo vector $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$.

(4) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b})$ para todo vector $\boldsymbol{b}$.

(1) En el primer caso, en notación de índices, escribimos

$$s \equiv S_{ij}A^{ij} \tag{11.5.42}$$

y por las propiedades de simetría, deducimos que

$$s \equiv S_{ij}A^{ij} = -S_{ij}A^{ji} = -S_{ji}A^{ji} = -s \tag{11.5.43}$$

donde en el último término hemos renombrado los dos índices mudos. Dado que $s = -s$, necesariamente $s = 0$, ó $\mathcal{S} : \mathcal{A} \equiv 0$, donde la puntuación : indica el producto interior de los tensores, esto es, su contracción.
(2) El segundo caso se escribe

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\phi = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \epsilon_{ijk}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} \tag{11.5.44}$$

Dado que el tensor ϵ_{ijk} es totalmente antisimétrico en cada par de índices, y las derivadas parciales pueden conmutarse, tenemos la contracción de un tensor antisimétrico en j, k por un tensor simétrico en j, k, con resultado igual al vector nulo $\mathbf{0}$.
(3) En el tercer caso, escribimos

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \epsilon_{ijk}a_j \left(\epsilon_{krs}b_r c_s\right) \tag{11.5.45}$$

donde entre paréntesis figura el término k-ésimo del producto vectorial $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$. Agrupando tenemos

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = a_j b_r c_s \epsilon_{ijk}\epsilon_{krs} \tag{11.5.46}$$

Necesitamos deducir ahora el producto tensorial $\epsilon_{ijk}\epsilon_{krs}$ de los tensores ϵ. Y será un tensor T_{ijrs} de orden cuatro, constante y totalmente antisimétrico en los pares de índices (i, j) y (r, s). Para construirlo sólo podemos contar con el tensor constante de orden 2, δ_{ij}, simétrico en (i, j). Como forma general T_{ijrs} admite la expresión

$$T_{ijrs} = A\delta_{ij}\delta_{rs} + B\delta_{ir}\delta_{js} + C\delta_{is}\delta_{jr} \tag{11.5.47}$$

formada con todas las combinaciones posibles de dos tensores δ, y donde A, B, C son constantes, que se eligen convenientemente para satisfacer la antisimetría marcada, $T_{ijrs} = -T_{jirs}$, $T_{ijrs} = -T_{ijsr}$. La primera condición de simetría se escribe

$$A\delta_{ij}\delta_{rs} + B\delta_{ir}\delta_{js} + C\delta_{is}\delta_{jr} = -A\delta_{ji}\delta_{rs} - B\delta_{jr}\delta_{is} - C\delta_{js}\delta_{ir} \tag{11.5.48}$$

y nos lleva a exigir $A = 0, B = -C$. La segunda condición da el mismo resultado. Por tanto, por ahora obtenemos

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{krs} = B\left(\delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr}\right) \tag{11.5.49}$$

Para obtener el valor de B basta con tomar un conjunto de índices particulares, por ejemplo $(i, j) = (1, 2), (r, s) = (1, 2)$, que nos tiene que dar el resultado conocido $\epsilon_{12k}\epsilon_{k21} = \epsilon_{123}\epsilon_{312} = 1$. Deducimos $B = 1$, y con ello

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{krs} = \delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr} \tag{11.5.50}$$

Retomando el producto vectorial triple, con ayuda de esta fórmula encontramos

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = a_j b_r c_s \left(\delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr}\right) \tag{11.5.51}$$

y con ayuda de las propiedades del tensor δ

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = a_j c_j b_i - a_j b_j c_i \equiv (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} \tag{11.5.52}$$

(4) El último caso en notación de índices se escribe

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}b_k\right) \tag{11.5.53}$$

donde el término entre paréntesis es el término i-ésimo del vector $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b}$. Como el tensor ϵ_{ijk} es constante, deducimos que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b}) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} b_k \tag{11.5.54}$$

y dado que ϵ_{ijk} es antisimétrico en los índices (i, j) y el operador de derivación es simétrico en (i, j) (las derivadas conmutan), por simetría el resultado es el escalar nulo, esto es, $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b}) \equiv 0$.

11.5.10. Desarrollo espectral de tensor de orden 2

Si $\mathcal{S}$ es un tensor de orden 2 simétrico, cuyo desarrollo espectral es

$$\mathcal{S} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_3$$

demuestre que el tensor simétrico de orden 2 definido por el desarrollo espectral

$$\sqrt{\lambda_1} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1 + \sqrt{\lambda_2} \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2 + \sqrt{\lambda_3} \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_3$$

realmente es el tensor raíz cuadrada de $\mathcal{S}$.

Definimos el nuevo tensor de orden dos mediante el símbolo $\sqrt{\mathcal{S}}$. Debemos demostrar que

$$\sqrt{\mathcal{S}} \cdot \sqrt{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \tag{11.5.55}$$

donde el punto $\cdot$ denota contracción respecto a uno de los índices tensoriales. En virtud de la contracción de los tensores $\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i$

$$\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \delta_{ij} \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i \tag{11.5.56}$$

el cálculo da el resultado directo

$$\sqrt{\mathcal{S}} \cdot \sqrt{\mathcal{S}} = \left(\sqrt{\lambda_1}\right)^2 \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1 + \left(\sqrt{\lambda_2}\right)^2 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2 + \left(\sqrt{\lambda_3}\right)^2 \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_3 = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_3 = \mathcal{S} \tag{11.5.57}$$

11.5.11. Propiedades de simetría de un tensor

Dada la importancia de la simetría en el cálculo tensorial, existe una notación específica para caracterizar las propiedades de simetría de un tensor dado. En particular, todo paréntesis del tipo $(ij..)$ indica la simetrización del tensor respecto a esos índices, y de forma análoga, el corchete cuadrado $[ij..]$ indica la antisimetrización del tensor respecto a esos índices. Dado el tensor de tercer orden T_{ijk}, determine los tensores asociados $T_{(ij)k}$,$T_{[ij]k}$,$T_{(ijk)}$ y $T_{[ijk]}$.

En el primer caso, los índices del tensor son $(ij)k$, y determinan la simetrización respecto a i, j dejando el índice k invariable. Por tanto

$$T_{(ij)k} \equiv \frac{1}{2} \left(T_{ijk} + T_{jik}\right) \tag{11.5.58}$$

y como se comprueba fácilmente es efectivamente simétrico $T_{(ij)k} = T_{(ji)k}$. De forma análoga, construimos la antisimetrización

$$T_{[ij]k} \equiv \frac{1}{2} \left(T_{ijk} - T_{jik}\right) \tag{11.5.59}$$

y como se comprueba fácilmente es efectivamente antisimétrico $T_{(ij)k} = -T_{(ji)k}$. La construcción con mayor número de índices es más compleja, pero igualmente directa

$$T_{(ijk)} \equiv \frac{1}{6} \left(T_{ijk} + T_{ikj} + T_{jik} + T_{jki} + T_{kij} + T_{kji}\right) \tag{11.5.60}$$

donde hemos tenido en cuenta todas las permutaciones posibles de los índices i, j, k por pares. Finalmente, la parte antisimétrica en los tres índices tiene los mismos términos, y sólo debemos ajustar los signos correspondientes. Obtenemos

$$T_{[ijk]} \equiv \frac{1}{6}\left(T_{ijk} - T_{jik} + T_{kij} - T_{kji} + T_{jki} - T_{ikj}\right) \tag{11.5.61}$$

11.5.12. Desarrollo espectral del tensor de rotación

Determine la expresión espectral del tensor de rotación $\boldsymbol{R}$ en la base de vectores $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ donde $\boldsymbol{e}$ es el vector unitario en la dirección del eje de giro, y $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ son vectores ortonormales en el plano perpendicular al eje de giro. El ángulo de giro θ se define como el ángulo formado por el vector $\boldsymbol{u}$ y su rotación $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{u}$.

La expresión general del tensor de rotación es

$$\boldsymbol{R} = \cos\theta \mathbf{1} + (1 - \cos\theta)\, \boldsymbol{e}\boldsymbol{e} + \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{e}\times \tag{11.5.62}$$

Haciendo uso del desarrollo espectral del tensor identidad

$$\mathbf{1} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} \tag{11.5.63}$$

en la base $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, podemos escribir

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{v})\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{e}\times \tag{11.5.64}$$

ésta es la fórmula buscada, y teniendo en cuenta la identidad tensorial

$$\boldsymbol{e}\times \equiv \boldsymbol{v}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v} \tag{11.5.65}$$

puede escribirse

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{v})\cos\theta - (\boldsymbol{v}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v})\operatorname{sen}\theta \tag{11.5.66}$$

11.5.13. Solución tensorial de las ecuaciones de Stokes

En el caso de una esfera inmersa en un fluido e impulsada por una fuerza $\boldsymbol{F}$ puntual aplicada en su origen de coordenadas, en la vecindad de la esfera las ecuaciones de Stokes rigen el flujo de fluido

$$-\boldsymbol{\nabla} p + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{F}\delta(\boldsymbol{x})$$
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

que resulta laminar, donde p y $\boldsymbol{v}$ son la presión y velocidad del fluido, y μ es su viscosidad. Determínese la solución $(p, \boldsymbol{v})$ para el flujo en la forma tensorial

$$p = p_0 + \mathcal{P} \cdot \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{v} = \mathcal{G} \cdot \boldsymbol{F}$$

donde p_0 es una presión constante y $\mathcal{G}$ y $\mathcal{P}$ son los denominados tensores de Oseen-Burgers.

Dado que la presión es un escalar, y la velocidad un vector, $\mathcal{P}$ será un vector (tensor de orden uno), y $\mathcal{G}$ un tensor de orden dos. Dado que el problema es lineal en la fuerza $\boldsymbol{F}$, y este vector ya figura como factor en la solución planteada, los tensores $\mathcal{P}$ y $\mathcal{G}$ deberán serán isótropos, esto es, sólo pueden contener al vector $\boldsymbol{r}$, y no a otros vectores como el propio $\boldsymbol{F}$. La solución más general que conserva la isotropía es

$$\mathcal{P} = f(r)\boldsymbol{r} = f(r)x_i \tag{11.5.67}$$

donde $f(r)$ es una función del módulo de $\boldsymbol{r}$, y x_i denota las coordenadas cartesianas de $\boldsymbol{r}$, y

$$\mathcal{G} = g(r)\mathcal{I} + h(r)\boldsymbol{r}\boldsymbol{r} = g(r)\delta_{ij} + h(r)x_i x_j \tag{11.5.68}$$

donde $g(r), h(r)$ son funciones de r, y $\mathcal{I}$ es el tensor unidad de orden dos.
Para obtener la forma particular de las funciones implicadas, debemos resolver las ecuaciones de Stokes, y la ecuación de continuidad. Esta última tiene el operador (escalar obviamente)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathcal{G} \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{G}_{ij} F_j \right) \tag{11.5.69}$$

y por tanto, obtenemos

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{g'(r)}{r} \delta_{ij} x_i F_j + r^2 \frac{h'(r)}{r} x_j F_j + 4h(r) x_j F_j \tag{11.5.70}$$

dado que las componentes de la fuerza son constantes, y donde hemos utilizado $r^2 = x_i x_i$, y diferenciando $2rdr = 2x_i dx_i$, luego $\partial r / \partial x_j = x_j / r$, y el resultado $\partial x_i / \partial x_i = 3$ cuando existe suma en el índice mudo i. Aunque es muy conveniente trabajar en esta notación tensorial, por completitud escribimos la expresión vectorial que resulta

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \left(\frac{g'(r)}{r} + r h'(r) + 4h(r) \right) \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} \tag{11.5.71}$$

Evaluamos ahora la ecuación de Stokes. Para ello utilizamos los resultados parciales

$$\boldsymbol{\nabla} p = \boldsymbol{\nabla} \left(\mathcal{P} \cdot \boldsymbol{F} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(F_i \mathcal{P}_i \right) = F_i \frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial x_j} = F_i \frac{\partial \left(f(r) x_i \right)}{\partial x_j} \tag{11.5.72}$$

Desarrollando la derivación, obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial x_j} = x_i \frac{\partial f(r)}{\partial x_j} + f(r) \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = x_i f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_j} + f(r) \delta_{ij} = \frac{f'(r)}{r} x_i x_j + f(r) \delta_{ij} \tag{11.5.73}$$

Por tanto

$$\boldsymbol{\nabla} p = \frac{f'(r)}{r} F_i x_i x_j + f(r) F_i \delta_{ij} \tag{11.5.74}$$

$$\boldsymbol{\nabla} p = \frac{f'(r)}{r} \left(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} \right) \boldsymbol{r} + f(r) \boldsymbol{F} \tag{11.5.75}$$

Evaluamos ahora el término siguiente en la ecuación de Stokes, que escribimos

$$\mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v} = \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \left(\mathcal{G} \cdot \boldsymbol{F} \right) = \mu \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \left(\mathcal{G}_{jk} F_k \right) = \mu \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \left(g(r) F_k \delta_{jk} + h(r) x_j x_k F_k \right) \tag{11.5.76}$$

con suma en los índices mudos i, j, y resultando por tanto un tensor de orden uno (vector) con índice libre k. Por la constancia de $\boldsymbol{F}$ y del tensor identidad $\mathcal{I}$, teniendo en cuenta que el laplaciano (con suma en i) tiene el valor

$$\frac{\partial^2 g(r)}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g'(r) \frac{x_i}{r} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{g'(r)}{r} \right)' x_i x_i + \frac{g'(r)}{r} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \frac{1}{r^2} \left(r^2 g'(r) \right)' \tag{11.5.77}$$

donde $'$ indica derivación respecto a r, para cualquier función de r, y junto con

$$\frac{\partial^2 \left(x_j x_k \right)}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\delta_{ij} x_k + x_j \delta_{ik} \right) = 2 \delta_{ij} \delta_{ik} = 2 \delta_{jk} \tag{11.5.78}$$

y

$$\frac{\partial^2 \left(h(r) x_j x_k \right)}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial h(r)}{\partial x_i} x_j x_k + h(r) \delta_{ij} x_k + h(r) \delta_{ik} x_j \right) \tag{11.5.79}$$

$$= \frac{1}{r^2} \left(r^2 h'(r) \right)' x_j x_k + 4 \frac{h'(r)}{r} x_j x_k + 2 h(r) \delta_{jk} \tag{11.5.80}$$

obtenemos el valor para el operador $\mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}$ en la forma

$$\mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} = \mu\left(\frac{1}{r^2}\left(r^2g'(r)\right)' + 2h(r)\right)F_j + \mu\left(\frac{1}{r^2}\left(r^2h'(r)\right)' + 4\frac{h'(r)}{r}\right)x_kF_kx_j \tag{11.5.81}$$

ó en notación vectorial

$$\mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} = \mu\left(\frac{1}{r^2}\left(r^2g'(r)\right)' + 2h(r)\right)\boldsymbol{F} + \mu\left(\frac{1}{r^2}\left(r^2h'(r)\right)' + 4\frac{h'(r)}{r}\right)(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r} \tag{11.5.82}$$

Reuniendo estos resultados parciales, la ecuación de Stokes en el seno del fluido $-\boldsymbol{\nabla}p+\mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} = 0$ tiene la expresión final

$$\left(\frac{1}{r^2}\left(r^2g'(r)\right)' + 2h(r) - \frac{1}{\mu}f(r)\right)\boldsymbol{F} + \left(\frac{1}{r^2}\left(r^2h'(r)\right)' + 4\frac{h'(r)}{r} + \frac{1}{\mu}\frac{f'(r)}{r}\right)(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r} = 0 \tag{11.5.83}$$

donde hemos suprimido el término singular que sólo existe en la vecindad del origen de coordenadas, junto con la ecuación de continuidad

$$\left(\frac{g'(r)}{r} + rh'(r) + 4h(r)\right)\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r} = 0 \tag{11.5.84}$$

Dada la arbitrariedad de los vectores $\boldsymbol{F},\boldsymbol{r}$, ya podemos describir las condiciones necesarias para las funciones f, g, h por determinar. La ecuación de Stokes y de continuidad se satisfacen idénticamente si exigimos que

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2g'(r)\right)' + 2h(r) - \frac{1}{\mu}f(r) = 0 \tag{11.5.85}$$

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2h'(r)\right)' + 4\frac{h'(r)}{r} + \frac{1}{\mu}\frac{f'(r)}{r} = 0 \tag{11.5.86}$$

$$\frac{g'(r)}{r} + rh'(r) + 4h(r) = 0 \tag{11.5.87}$$

Se deja como ejercicio directo comprobar que la solución correcta es

$$f(r) = \frac{2\mu}{r^3}\,;g(r) = \frac{1}{r}\,;h(r) = \frac{1}{r^3} \tag{11.5.88}$$

11.5.14. Gradiente de una función escalar

Demuestre que en un sistema de coordenadas cartesianas el gradiente de una función escalar es un tensor de orden uno, bajo la transformación de coordenadas $\boldsymbol{r}' = \mathcal{A}\cdot\boldsymbol{r}$.

La relación vectorial pedida $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\phi$ tiene la expresión tensorial

$$v_i = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \tag{11.5.89}$$

y dado que ϕ es una cantidad escalar que se asume independiente de las coordenadas, en el sistema transformado se satisface

$$v_i' = \frac{\partial\phi}{\partial x_i'} \tag{11.5.90}$$

De aquí podemos deducir que

$$v_i' = \frac{\partial\phi}{\partial x_i'} = \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \tag{11.5.91}$$

con suma en j. Utilizando la transformación de coordenadas $x_j = a_{ji}x'_i$, obtenemos la ley de transformación de las componentes del vector $\boldsymbol{v}$

$$v'_i = a_{ji}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = a_{ji}v_j \tag{11.5.92}$$

y por tanto, se comprueba que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\phi$ es un tensor de orden uno.

11.5.15. Gradiente de un tensor

En un sistema de coordenadas cartesianas demuestre que el gradiente de un tensor de orden uno es un tensor de orden dos, bajo la transformación de coordenadas $\boldsymbol{r}' = \mathcal{A}\cdot\boldsymbol{r}$.

En otras palabras, debemos demostrar que dado el tensor de orden uno $\mathcal{T}$ con componentes T_i, la cantidad $\mathcal{S} \equiv \boldsymbol{\nabla}\mathcal{T}$ es un tensor de orden dos, con componentes $S_{ij} \equiv \frac{\partial T_i}{\partial x_j}$. Aplicando la regla de la cadena de la derivación y la ley de transformación de las componentes de $\mathcal{T}$, $T'_i = a_{ki}T_k$, deducimos que

$$S'_{ij} \equiv \frac{\partial T'_i}{\partial x'_j} = a_{ki}\frac{\partial T_k}{\partial x'_j} = a_{ki}\frac{\partial T_k}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x'_j} \tag{11.5.93}$$

y dado que $\frac{\partial x_m}{\partial x'_j} = a_{mj}$, obtenemos

$$S'_{ij} = a_{ki}a_{mj}S_{km} \tag{11.5.94}$$

con lo que se demuestra que, efectivamente, $\mathcal{S}$ es un tensor de orden dos, bajo esta transformación de coordenadas.

11.5.16. Tensor de inercia

En un sistema de coordenadas cartesianas, demuestre la ley de transformación tensorial de orden dos para el tensor de inercia I_{jk}, bajo la transformación ortogonal de coordenadas $\boldsymbol{r}' = \mathcal{A}\cdot\boldsymbol{r}$.

Definimos el tensor de inercia en la forma

$$I_{jk} = \int_V i_{jk}\rho dV \tag{11.5.95}$$

donde hemos introducido el tensor de inercia por unidad de masa $i_{jk} = x_m x_m \delta_{jk} - x_j x_k$. Las propiedades de transformación de I_{jk} se deducirán de las propiedades de transformación de i_{jk} y del elemento ρdV. Para el tensor, dado que $x'_j = a_{ij}x_i$, y por la condición de ortogonalidad $a_{rm}a_{sm} = a_{rm}a^T_{ms} = \delta_{rs}$, y $x'_m x'_m = x_m x_m$ por ser escalar, tenermos

$$i'_{jk} = x'_m x'_m \delta_{jk} - x'_j x'_k = x_m x_m \delta_{jk} - a_{rj}a_{sk}x_r x_s \tag{11.5.96}$$

Haciendo uso de nuevo de la ortogonalidad de la matriz de transformación, podemos realizar la siguiente factorización de las componentes en δ_{jk}

$$\delta_{jk} = a^T_{jr}a_{rk} = a_{rj}a_{sk}\delta_{rs} \tag{11.5.97}$$

y por tanto, tenemos la ley de transformación tensorial

$$i'_{jk} = a_{rj}a_{sk}\left(x_m x_m \delta_{rs} - x_r x_s\right) \equiv a_{rj}a_{sk}i_{rs} \tag{11.5.98}$$

La densidad de masa ρ es un escalar independiente de las coordenadas, $\rho' = \rho$. En cuanto al elemento de volumen dV, se transforma de acuerdo con

$$dV' = \mathcal{J}dV \equiv |\det\mathcal{A}|dV \tag{11.5.99}$$

siendo $\mathcal{J}$ el jacobiano de la transformación de coordenadas, dado por el determinante de la matriz $\mathcal{A}$. Al ser la transformación ortogonal, $\det\mathcal{A} = \pm 1$, y por tanto el elemento de volumen es invariante, $dV = dV'$. Reuniendo todos estos resultados, concluimos que el tensor de inercia I_{jk} satisface la ley tensorial correspondiente de transformación a las nuevas coordenadas

$$I'_{jk} = \int_V i'_{jk}\rho' dV' = a_{rj}a_{sk}\int_V i_{rs}\rho dV = a_{rj}a_{sk}I_{rs} \tag{11.5.100}$$

11.6. Ejercicios de Autoevaluación

11.6.1. Derivada segunda de un escalar

Si a_{ij} es un tensor simétrico constante, demuestre que

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\left(a_{ij}x_i x_j\right) = 2a_{kl}$$

11.6.2. Demostración identidades vectoriales

Mediante la notación de índices, demuestre las siguientes identidades vectoriales

- $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(u^2\right) - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{u}$ donde u es el módulo del vector $\boldsymbol{u}$.
- $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{b}$ para todo para de vectores $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$.

11.6.3. Demostración identidades tensoriales

Demuestre las siguientes relaciones

- $\delta_{ij}\delta_{ij} = 3$.
- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$.
- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$.

11.6.4. Desarrollo espectral de la potencia n-ésima de un tensor

Si $\mathcal{S}$ es un tensor de orden 2 simétrico, cuyo desarrollo espectral es

$$\mathcal{S} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \tag{11.6.1}$$

demuestre que se puede construir la potencia n-ésima del tensor, siendo n un número natural, en la forma

$$\mathcal{S}^n = \lambda_1^n \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2^n\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3^n\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$$

¿Se podrá construir asimismo el tensor $\exp(\mathcal{S})$, o el tensor $\log(\mathcal{S})$?

11.6.5. Tensor de tensiones

El tensor de tensiones σ (de orden dos) en el seno de un fluido está dado por la expresión

$$\sigma = -p\mathcal{I} + \mu\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla}\right) = -p\delta_{ij} + \mu\left(\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{v}_i\boldsymbol{\nabla}_j\right)$$

Dado éste, la fuerza que ejerce el fluido sobre una superficie viene dada por la integral

$$\boldsymbol{f} = \int_S \sigma \cdot \boldsymbol{n} dS$$

donde $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario en la dirección normal a la superficie, y dS es el elemento de superficie. Compruebe que la fuerza que se genera sobre la esfera por el flujo de Stokes

$$p = p_0 + \frac{2\mu}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\boldsymbol{F} + \frac{1}{r^3}\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F}\right)\boldsymbol{r}$$

es $\boldsymbol{F}$, e interprete físicamente. Ayúdese del resultado conocido

$$\int \boldsymbol{n} d\Omega = \boldsymbol{0}$$

$$\int \boldsymbol{n}\boldsymbol{n} d\Omega = \frac{4\pi}{3}\mathcal{I}$$

para la integración sobre la superficie de la esfera, donde $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario en la dirección radial y Ω es el ángulo sólido.

11.6.6. Tensor gradiente de velocidad

Sea $\boldsymbol{v}$ el campo de velocidad de un fluido, y $\mathcal{S}$ el tensor gradiente de velocidad. Divida el tensor $\mathcal{S}$ en su parte simetrica y antisimetrica,y demuestre que la parte simétrica se anula idénticamente cuando el fluido realiza una rotacion rígida, $\boldsymbol{v} = \omega \times \boldsymbol{r}$. Interprete físicamente.

11.6.7. Transformación ortogonal de coordenadas

Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son vectores en el sistema de coordenadas cartesiano, demuestre que las cantidades A_jB_k y $(A_jB_k - A_kB_j)$ se transforman como un tensor de orden dos, bajo la transformación ortogonal de coordenadas $\boldsymbol{r'} = \mathcal{A}\cdot\boldsymbol{r}$. Considere geométricamente el por qué de este resultado.

11.7. Apéndice. Tensores en la Geometría diferencial

11.7.1. Componentes covariantes y contravariantes

Consideremos un espacio euclídeo y un sistema de coordenadas cartesianas, que se construye con un conjunto de ejes coordenados (x, y, z), y un conjunto de planos (superficies) coordenadas xy, yz, xz. Para localizar un punto en el espacio de forma unívoca podemos utilizar tanto los ejes como los planos coordenados. De la misma forma, para elegir una base de vectores podemos referirnos al sistema de ejes, en cuyo caso, los vectores se denominan contravariantes, o al sistema de planos, en cuyo caso, los vectores se denominan covariantes. Aunque esta distinción es trivial en el espacio cartesiano, puesto que el conjunto de vectores en ambos casos resulta idéntico, tiene

importancia fundamental en los sistemas de coordenadas curvilíneas. Expliquémoslo con detalle en el caso cartesiano.
En cada punto P del espacio podemos construir una base local de vectores, en una de las dos formas siguientes.

1. Cada vector de la base es tangente a uno de los ejes locales en P, y por tanto, es paralelo a uno de los ejes cartesianos globales. Los vectores construidos así los denominamos $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{e}_3$. Respecto a esa base, cada vector $\boldsymbol{v}$ es combinación lineal de ellos, las componentes resultantes de $\boldsymbol{v}$ se referirán a esa base local, y se denominan componentes *contravariantes* de $\boldsymbol{v}$.

2. ó, podemos primero construir los planos (superficies) coordenadas locales en el punto P, y definir los vectores de la base como el conjunto perpendicular a cada uno de los planos coordenados en P. Los vectores construidos así los denominamos $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$ y $\boldsymbol{e}^3$. De nuevo podemos especificar cada vector $\boldsymbol{v}$ como combinación lineal de los vectores de esta base, cuyas componentes definidas respecto a la base local de planos coordenados, serán las componentes *covariantes* de $\boldsymbol{v}$.

Representación covariante y contravariante En el sistema cartesiano, las dos bases de vectores (covariante y contravariante) son idénticas, $\boldsymbol{e}^1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}^2 = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}^3 = \boldsymbol{e}_3$, y por convenio utilizamos la notación $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ para estos vectores. En un sistema curvilíneo, como puede ser el sistema de coordenadas cilíndricas, las dos bases son distintas, y la elección de base será cuestión de conveniencia en cada caso.
Resumiendo, en cada sistema de coordenadas, la base de vectores tangente a las curvas (ejes) coordenadas se denomina base contravariante, y la base perpencular a las superficies (planos) coordenadas es la base covariante. En el caso general, son bases separadas y distintas, aunque est án relacionadas, como veremos más adelante. Cada vector tendrá la representación contravariante y covariante

$$\boldsymbol{V} = v^1\boldsymbol{e}_1 + v^2\boldsymbol{e}_2 + v^3\boldsymbol{e}_3 = v_1\boldsymbol{e}^1 + v_2\boldsymbol{e}^2 + v_3\boldsymbol{e}^3 \tag{11.7.1}$$

en función de sus componentes contravariantes v^i y componentes covariantes v_i.

Ejemplo En Geometría Diferencial podemos hacer referencia a un ejemplo claro. Aunque el vector de posición $\boldsymbol{r}$ no es un tensor, porque es dependiente de las coordenadas, su diferencial, el vector desplazamiento $d\boldsymbol{r}$, sí lo es. Y dado que es paralelo a las líneas coordenadas, $d\boldsymbol{r}$ es un vector contravariante. Por otro lado, el gradiente de una función f es el vector $\boldsymbol{\nabla} f$, y es independiente de las coordenadas. Dado que es un vector perpendicular a la superficie $f = \text{cte}$, $\boldsymbol{\nabla} f$ tiene la estructura de un vector covariante, referido a las superficies coordenadas. El producto escalar de estos dos vectores es el escalar *diferencial de f*

$$\boldsymbol{\nabla} f \cdot d\boldsymbol{r} = df \tag{11.7.2}$$

y en el lenguaje tensorial hablamos de la contracción de un vector contravariante con un vector covariante, para dar un escalar (tensor de orden 0). Por su propia definición, cada vector de la base covariante (perpendicular al plano coordenado) debe ser ortogonal a dos vectores de la base contravariante (lineas coordenadas), por ejemplo, $\boldsymbol{e}^1 \perp \boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{e}_3$. Queda entonces libertad para seleccionar el único valor non nulo del producto interior $\boldsymbol{e}^1 \cdot \boldsymbol{e}_1$. Generalmente elegimos que ambos conjuntos de vectores, covariantes y contravariantes, sean recíprocos, esto es, su producto interior sea nulo o igual a la unidad. En función del tensor mixto (1-covariante 1-contravariante) *delta de Kronecker* δ^j_k, la relación entre los vectores covariantes y contravariantes se escribe

$$\boldsymbol{e}^j \cdot \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}^j = \delta^j_k \tag{11.7.3}$$

donde $\delta^1_1 = \delta^2_2 = \delta^3_3 = 1$, y todas las demás combinaciones de índices dan valor nulo $\delta^j_k = 0$. Esto es, el tensor δ^j_k se corresponde con la matriz unidad $\mathcal{I}$.

Representación tensorial Reexaminamos ahora la estructura de una diada, por ejemplo $\mathcal{D} = \boldsymbol{AB}$, en función de las componentes elegidas, covariantes y/o contravariantes, para los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. Así entonces, la misma diada $\mathcal{D}$ admite cuatro representaciones posibles

$$d_{jk} = a_j b_k \tag{11.7.4}$$

$$d_j^k = a_j b^k \tag{11.7.5}$$

$$d_k^j = a^j b_k \tag{11.7.6}$$

$$d^{jk} = a^j b^k \tag{11.7.7}$$

que se denominan 2-covariante, mixta(1-covariante 1-contravariante), mixta(1-contravariante 1-covariante), y 2-contravariante. La diada no cambia por la elección de la representación, incluso aunque los componentes sean distintos en cada caso. De forma análoga, cualquier tensor podrá tener componentes covariantes, contravariantes o mixtas.

11.7.2. Tensor métrico

Vector desplazamiento En coordenadas cartesianas, el vector desplazamiento tiene la expresión

$$d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k} \tag{11.7.8}$$

La cantidad $d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = (dr)^2$ representa el cuadrado de la magnitud de $d\boldsymbol{r}$, que no tiene por qué tener unidades de distancia, siendo tan sólo una distancia de coordenadas. Asumimos que el vector desplazamiento con las unidades correctas puede construirse en la forma

$$d\boldsymbol{u} = \alpha dx\boldsymbol{i} + \beta dy\boldsymbol{j} + \gamma dz\boldsymbol{k} \tag{11.7.9}$$

ó en función de los vectores de la base contravariante

$$\boldsymbol{e}_x = \alpha\boldsymbol{i}, \boldsymbol{e}_y = \beta\boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_z = \gamma\boldsymbol{k} \tag{11.7.10}$$

que llevan la información métrica, definimos entonces

$$d\boldsymbol{u} = dx\boldsymbol{e}_x + dy\boldsymbol{e}_y + dz\boldsymbol{e}_z \tag{11.7.11}$$

La longitud física de longitud del vector desplazamiento se denomina ds, y para determinarlo tomamos el producto escalar

$$(ds)^2 = d\boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{u} = (dx)^2 \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x + (dy)^2 \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y + (dz)^2 \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z \tag{11.7.12}$$

Tensor métrico En notación tensorial, introducimos el tensor métrico $\mathcal{G}$, o tensor fundamental, de forma que podamos escribir

$$(ds)^2 = \mathcal{G} \cdot d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{11.7.13}$$

y por tanto, en coordenadas cartesianas $\mathcal{G}$ tiene la forma matricial diagonal

$$\mathcal{G} = \text{diag}\left(\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z\right) \tag{11.7.14}$$

El tensor métrico contiene la información necesaria para dotar al espacio de coordenadas de una métrica que permite medir longitudes, ángulos,áreas, etc. En el sistema cartesiano, los vectores de la base son ortogonales, y los elementos de la matriz fuera de la diagonal son nulos. En el caso general, $\mathcal{G}$ tiene la forma matricial

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} \tag{11.7.15}$$

Ya que el producto interior es conmutativo, el tensor $\mathcal{G}$ es simétrico, $\mathcal{G}_{ij} = \mathcal{G}_{ji}$.

Componentes covariantes y contravariantes Las componentes del tensor métrico son los productos interiores de vectores no unitarios de la base como los $\boldsymbol{e}^{(j)}$ y $\boldsymbol{e}_{(k)}$ ya introducidos anteriormente. Definimos entonces las componentes contravariantes g^{jk} y covariantes g_{jk} del tensor métrico en la forma

$$g^{jk} = \boldsymbol{e}^{(j)} \cdot \boldsymbol{e}^{(k)} \tag{11.7.16}$$

y

$$g_{jk} = \boldsymbol{e}_{(j)} \cdot \boldsymbol{e}_{(k)} \tag{11.7.17}$$

donde los índices j, k toman los valores 1,2,3. Destacar que el tensor 2-contravariante se construye mediante el producto interior de dos vectores covariantes. Y viceversa, el tensor 2-covariante se construye mediante el producto interior de dos vectores contravariantes. Esta estructura dual tiene su explicación en lo que sigue.
Además de portar la información sobre la métrica del espacio, por su definición el tensor métrico relaciona las componentes contravariantes y covariantes de un vector. Hemos visto que el vector $\boldsymbol{v}$ admite la forma covariante y contravariante

$$\boldsymbol{V} = v_1\boldsymbol{e}^1 + v_2\boldsymbol{e}^2 + v_3\boldsymbol{e}^3 = v^1\boldsymbol{e}_1 + v^2\boldsymbol{e}_2 + v^3\boldsymbol{e}_3 \tag{11.7.18}$$

y por tanto, las componentes covariantes y contravariantes deben estar relacionadas. Realizando el producto interior por el vector contravariante $\boldsymbol{e}_1$,

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{e}_1 = v_1\boldsymbol{e}^1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}^2 \cdot \boldsymbol{e}_1 + v_3\boldsymbol{e}^3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = v^1\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + v^2\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 + v^3\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 \tag{11.7.19}$$

y utilizando $\boldsymbol{e}^j \cdot \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}^j = \delta^j_k$, obtenemos

$$v_1 = g_{11}v^1 + g_{12}v^2 + g_{13}v^3 \tag{11.7.20}$$

De forma análoga, obtenemos

$$v_2 = g_{21}v^1 + g_{22}v^2 + g_{23}v^3 \tag{11.7.21}$$

$$v_3 = g_{31}v^1 + g_{32}v^2 + g_{33}v^3 \tag{11.7.22}$$

Lo mismo sucede con las componentes contravariantes

$$v^1 = g^{11}v_1 + g^{12}v_2 + g^{13}v_3 \tag{11.7.23}$$

$$v^2 = g^{11}v_1 + g^{12}v_2 + g^{13}v_3 \tag{11.7.24}$$

$$v^3 = g^{11}v_1 + g^{12}v_2 + g^{13}v_3 \tag{11.7.25}$$

En notación tensorial, tales relaciones admiten la expresión

$$v_j = g_{jk}v^k \tag{11.7.26}$$

$$v^j = g^{jk}v_k \tag{11.7.27}$$

teniendo en cuenta el convenio de suma en los índices mudos (o, convenio de Einstein). De forma coloquial, estas relaciones muestran que el tensor métrico nos sirve para subir y bajar índices tensoriales. Por ejemplo, en $v_j = g_{jk}v^k$, el tensor del lado izquierdo es 1-covariante, y el tensor del lado derecho se construye con la contracción ($\equiv$ suma en el índice mudo) del tensor 2-covariante g_{jk}, y un tensor 1-contravariante.
Otra propiedad importante del tensor métrico es que el tensor en su versión covariante y contravariante son inversos entre sí. Es decir, en componentes

$$g_{ij}g^{jk} = g^{kj}g_{ji} = \delta^k_i \tag{11.7.28}$$

11.7.3. Cambio de coordenadas. Transformaciones ortogonales

Cambio de coordenadas Queremos examinar ahora el comportamiento de un tensor cuando transformamos nuestro sistema de coordenadas cartesiano, pasando de una base de vectores $\{\boldsymbol{e}_i\}$ a la base de vectores $\{\boldsymbol{e}'_i\}$, con $i = 1, 2, 3$. Recordamos que en el sistema cartesiano no existe distinción entre base covariante y contravariante. El sistema primado procederá en general de una rotación del sistema de coordenadas inicial. Tanto los tensores de todos los órdenes como los escalares (tensores de orden cero) deben ser independientes de la elección de coordenadas. En particular, el vector de posición de un punto P del espacio debe satisfacer

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' \tag{11.7.29}$$

y en componentes

$$x'_j \boldsymbol{e}'_j = x_j \boldsymbol{e}_j \tag{11.7.30}$$

Transformación ortogonal Para aislar las componentes en el sistema primado, basta tomar el producto escalar con el vector de la base $\boldsymbol{e}'_i$, teniendo en cuenta que $\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = \delta_{ij}$. Obtenemos

$$x'_j \delta_{ij} = x_j \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{11.7.31}$$

ó

$$x'_i = a_{ij} x_j \tag{11.7.32}$$

y en notación matricial $\boldsymbol{r}' = \mathcal{A} \cdot \boldsymbol{r}$, donde a_{ij} son las entradas de la llamada matriz de rotación, dadas por $a_{ij} \equiv \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \cos(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}_j)$, que contiene los cosenos de los ángulos formados por los vectores de las bases respectivas. Como $\mathcal{A}$ no está asociada a una base única, no puede ser un tensor. El proceso inverso (tomando el producto escalar con vector de la base $\boldsymbol{e}_i$) nos da las componentes del sistema inicial en función de las componentes del sistema primado

$$x_i = a_{ji} x'_j \tag{11.7.33}$$

ó $\boldsymbol{r} = \mathcal{A}^T \cdot \boldsymbol{r}'$. Aplicando dos veces la transformación y su inversa debemos encontrar la identidad, y por tanto de la ecuación resultante

$$x_i = a_{ji} x'_j = a_{ji} a_{jk} x_k \tag{11.7.34}$$

deducimos que la matriz $\mathcal{A}$ satisface

$$\delta_{ik} = a_{ji} a_{jk} \tag{11.7.35}$$

Y dado que a_{ji} es el elemento de la matriz transpuesta $\mathcal{A}^T$, deducimos que

$$\mathcal{A}^T \cdot \mathcal{A} = \mathcal{I} \tag{11.7.36}$$

ó

$$\mathcal{A}^T = \mathcal{A}^{-1} \tag{11.7.37}$$

luego la matriz $\mathcal{A}$ es ortogonal.

Transformación de la base de vectores Conocida la ley de transformación de las componentes x_i, es fácil derivar la ley de transformación de los vectores de la base. Dado que $x'_i \boldsymbol{e}'_i = x_j \boldsymbol{e}_j$, obtenemos

$$x'_i \boldsymbol{e}'_i = a_{ij} x'_i \boldsymbol{e}_j \tag{11.7.38}$$

y dado que cada componente x'_i es arbitraria, necesariamente

$$\boldsymbol{e}'_i = a_{ij} \boldsymbol{e}_j \tag{11.7.39}$$

ó $\boldsymbol{e}' = \mathcal{A} \cdot \boldsymbol{e}$. La base se transforma de la misma manera como lo hacen las componentes.
Una vez conocida la ley de transformación de los vectores de la base, podemos determinar la ley de transformación de las componentes de un tensor de orden arbitrario.

Tensores y vectores afines El conjunto de cantidades A_k con $\{k = 1, \cdots n\}$ se dice que constituyen las *componentes de un vector afín* si bajo la transformación ortogonal de coordenadas $x'_j = a_{ji}x_i$, las cantidades transformadas están dadas por

$$A'_k = a_{kj}A_j \tag{11.7.40}$$

El vector afín así definido $\boldsymbol{A} = A_k\boldsymbol{e}_k$ con esta propiedad característica, es una entidad completamente nueva superimpuesta a la geometría de puntos del espacio $\mathcal{R}^n$. En general no vemos ninguna distinción entre un punto P en $\mathcal{R}^n$, y el vector de posición $\boldsymbol{r}$ de P en $\mathcal{R}^n$, basándonos en el hecho de que sus propiedades de transformación, como coordenadas y como componentes de un vector respectivamente, son las mismas. Sin embargo, cuando consideremos transformaciones más generales, desaparecerá esta similitud.
Del mismo modo, se definen los *tensores afines*, por ejemplo el tensor de orden 2, $\mathcal{T} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$, como el tensor cuyas componentes T_{ij} satisfacen, bajo una transformación ortogonal de coordenadas, la siguiente relación

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl} \tag{11.7.41}$$

Lo mismo sucede con tensores de mayor orden. En particular, podemos construir tensores de orden arbitrario mediante el producto de componentes tensoriales de menor orden. Así, a partir de los vectores afines $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, puede construirse los tensores afines de orden 2, $\mathcal{T} \equiv \boldsymbol{AB}$ con componentes $T_{jk} = A_jB_k$ y $\mathcal{T} \equiv \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$ con componentes $T_{jk} = A_jB_k - B_jA_k$.
En general, para cualquier r positivo, el conjunto de las n^r cantidades $T_{j_1,j_2,\cdots j_r}$ se denominan las *componentes de un tensor afín de orden k*, si bajo transformaciones ortogonales, las cantidades transformadas satisfacen

$$T'_{i_1i_2\cdots i_r} = a_{i_1j_1}a_{j_2i_2}\cdots a_{i_rj_r}T_{j_1j_2\cdots j_r} \tag{11.7.42}$$

donde cada índice tiene el recorrido $1 \leq i, j \leq n$. Y la expresión matemática completa para el tensor será $\mathcal{T} = T_{i_1i_2\cdots i_r}\boldsymbol{e}_{i_1}\boldsymbol{e}_{i_2}\cdots\boldsymbol{e}_{i_r}$.

11.7.4. Independencia de las coordenadas

Verificamos ahora que las definiciones anteriores para las componentes de un tensor afín, mantienen la independencia tensorial de las coordenadas. Por ejemplo, para un tensor arbitrario $\mathcal{T}$ de orden dos, partimos de su expresión $\mathcal{T} = t_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$. Aplicando la condición de independencia de las coordenadas $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$

$$t'_{ij}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j = t_{kl}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l \tag{11.7.43}$$

y aplicando la ley de transformación a los vectores de la base inicial $\boldsymbol{e} = \mathcal{A}^T \cdot \boldsymbol{e}'$, ó $\boldsymbol{e}_k = a_{ik}\boldsymbol{e}'_i$, obtenemos la igualdad

$$t'_{ij}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j = t_{kl}a_{ik}\boldsymbol{e}'_ia_{jl}\boldsymbol{e}'_j \tag{11.7.44}$$

y por la arbitrariedad de los vectores de la base, se deduce directamente la ley de transformación de las componentes en la forma

$$t'_{ij} = a_{ik}a_{jl}t_{kl} \tag{11.7.45}$$

donde podemos comprobar que la notación por índices da un resultado correcto. El mismo procedimiento se utiliza para un tensor de orden arbitrario. Por ejemplo, para un cuarto orden obtendríamos

$$D'_{ijkl} = a_{ip}a_{jq}a_{kr}a_{ls}D_{pqrs} \tag{11.7.46}$$

donde cada elemento de la matriz $\mathcal{A}$ contiene los pares de índices que se sitúan en la misma posición en la componente del tensor en los dos sistemas de coordenadas, siendo el primer índice en cada par el que corresponde a la componente del tensor en el sistema primado. Recordamos que como venimos explicamos, en el sistema cartesiano de coordenadas no existe distinción entre componentes covariantes y contravariantes, luego estas fórmulas no serán correctas en sistemas de coordenadas curvilíneas, esto es, cuando los vectores de la base dependen de la elección del punto en el espacio. Como podemos ver, la ley de transformación es característica de cada orden tensorial, y por tanto, puede utilizarse como una definición propia de tensor cuando sea conveniente.

11.7.5. Cambio de coordenadas. Transformaciones arbitrarias

Coordenadas curvilíneas Hasta ahora, en esta sección hemos estudiado los *tensores afines* o cartesianos, que se definen respecto a las transformaciones ortogonales de coordenadas, que además son lineales. Tanto si por imperativo práctico utilizamos coordenadas curvilíneas, como si debemos tratar con tensores sobre variedades (p.e. sobre superficies curvadas), necesitaremos leyes de transformación más generales. En física es muy habitual describir diversas magnitudes por medio de *campos* con comportamiento tensorial bien definido (los más habituales son escalares, vectores y tensores de orden 2). Si el dominio espacial tiene cierta *simetría*, el uso de un sistema de coordenadas adaptado a esta geometría simplifica enormemente el tratamiento matemático, por tanto es muy habitual describir estos campos respecto a un sistema de *coordenadas curvilíneas* adaptado a la geometría del problema. No obstante, para preservar la estructura de espacio vectorial que tienen los tensores (i.e. cualquier combinación lineal de tensores de orden dado es tensor de ese mismo orden), debemos mantener el carácter lineal de la ley de transformación en las componentes tensoriales. Y para preservar la estructura algebraica de los tensores (i.e. el producto de tensores también es un tensor), será importante mantener el tipo de relación $\delta^j_k = \left(a^T\right)^j_i a^i_k$ para la matriz de transformación.

Transformación arbitraria Consideremos dos sistemas de coordenadas en el espacio $\mathcal{R}^n$, en su versión contravariante, $\bar{x}^j$ y x^k, cuya relación funcional expresamos en la forma

$$\bar{x}^j = \bar{x}^j\left(x^k\right) \tag{11.7.47}$$

donde $\bar{x}^j$ representa tanto la coordenada como la función, cuando no haya confusión. Los índices (j,k) tienen los valores $(1,\cdots,n)$. Como hemos dicho, no asumimos que las funciones $\bar{x}^j$ sean lineales en x^k, aunque sí se requiere que sean funciones continuas de clase $\mathcal{C}^2$ (i.e. con derivadas continuas hasta segundo orden), y que el jacobiano de la transformación sea no nulo, de forma que exista la transformación inversa

$$x^k = x^k\left(\bar{x}^j\right) \tag{11.7.48}$$

y por tanto, las funciones x^k también son de clase $\mathcal{C}^2$. Aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^k} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^k} \tag{11.7.49}$$

vemos que, al ser $\frac{\partial x^j}{\partial x^k} = \delta^j_k$, las matrices de las derivadas parciales

$$\left(a^T\right)^j_m \equiv \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \tag{11.7.50}$$

y

$$a^m_k \equiv \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^k} \tag{11.7.51}$$

satisfacen las condiciones requeridas, de forma que la ley de transformación tensorial bajo transformaciones generales de coordenadas se expresa mediante la combinación de las derivadas parciales correspondientes. Debemos recordar que al ser x^k un vector contravariante, su diferencial dx^k es un vector contravariante, mientras que el gradiente $\partial/\partial x^k$ actúa como un vector covariante. Si hubieramos definido las coordenadas en su versión covariante x_k, la diferencial dx_k será un vector covariante, y el gradiente $\partial/\partial x_k$ un vector contravariante. Así puede entenderse la naturaleza mixta del tensor $\frac{\partial x^j}{\partial x^k} = \delta^j_k$.

Componentes vectoriales y tensoriales Por tanto, teniendo en cuenta la existencia de una representación matricial para la transformación de coordenadas, podemos hacer una transcripción directa de las definiciones tensoriales del caso afín al caso general, pero con la necesaria distinción entre componentes covariantes y contravariantes. Así el conjunto de cantidades A_k con $k =$

$1, 2 \cdots n$, se dice que constituyen las *componentes de un vector covariante* si bajo la transformación general de coordenadas $\bar{x}^j = \bar{x}^j\left(x^k\right)$, las cantidades transformadas están dadas por

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A_k \equiv \left(a^T\right)_i^k A_k \tag{11.7.52}$$

El vector covariante tiene la expresión completa $\mathcal{A} = A_k \boldsymbol{e}^k$ en función de los vectores $\boldsymbol{e}^k$ de la base covariante.
Así mismo, el conjunto de cantidades B^k con $k = 1, 2 \cdots n$, se dice que constituyen las *componentes de un vector contravariante* si bajo la transformación general de coordenadas $\bar{x}^j = \bar{x}^j\left(x^k\right)$, las cantidades transformadas están dadas por

$$\bar{B}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} B^k \equiv a_k^i B^k \tag{11.7.53}$$

y el vector contravariante está dado por $\mathcal{B} = B^k \boldsymbol{e}_k$, en función de los vectores $\boldsymbol{e}_k$ de la base contravariante. Como ejemplo final, tenemos la ley de transformación de las *componentes de un tensor 2-covariante*

$$\bar{T}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} T_{kl} \equiv \left(a^T\right)_i^k \left(a^T\right)_j^l T_{kl} \tag{11.7.54}$$

para el tensor $\mathcal{T} = T_{ij} \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j$, la ley de transformación de las *componentes de un tensor 2-contravariante*

$$\bar{T}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} T^{kl} \equiv a_k^i a_l^j T^{kl} \tag{11.7.55}$$

para el tensor $\mathcal{T} = T^{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$, y la ley de transformación de las *componentes de un tensor 1-covariante 1-contravariante*

$$\bar{U}_i^j = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} U_k^l \equiv \left(a^T\right)_i^k a_l^j U_k^l \tag{11.7.56}$$

para el tensor $\mathcal{U} = U_i^j \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}_j$. Lo mismo sucede con tensores de mayor orden. En particular, como en el caso afín, podemos construir tensores de orden arbitrario a partir del producto de componentes tensoriales de menor orden. En general, para cualesquiera r y s positivos, el conjunto de las n^{r+s} cantidades $T^{i_1, i_2, \cdots i_s}_{j_1, j_2, \cdots j_r}$ se denominan las *componentes de un tensor de orden* $m = r + s$*, s-contravariante r-covariante*, si bajo la transformación general de coordenadas $\bar{x}^j = \bar{x}^j\left(x^k\right)$, las cantidades transformadas satisfacen

$$\bar{T}^{i_1 i_2 \cdots i_s}_{j_1 j_2 \cdots j_r} = \left(\frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{k_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{k_r}}\right) \left(\frac{\partial x^{l_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \frac{\partial x^{l_2}}{\partial \bar{x}^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{l_r}}{\partial \bar{x}^{j_r}}\right) T^{k_1 k_2 \cdots k_s}_{l_1 l_2 \cdots l_r} \tag{11.7.57}$$

donde cada índice tiene el recorrido $1 \leq i, j, k, l \leq n$. La expresión completa de este tensor s-contravariante r-covariante es $\mathcal{T} = T^{i_1 i_2 \cdots i_s}_{j_1 j_2 \cdots j_r} \boldsymbol{e}_{i_1} \boldsymbol{e}_{i_2} \cdots \boldsymbol{e}_{i_s} \cdot \boldsymbol{e}^{j_1} \boldsymbol{e}^{j_2} \cdots \boldsymbol{e}^{j_r}$.

Cambio de base bajo la transformación de coordenadas Dado un espacio vectorial $\mathbf{V}$, un *campo tensorial* definido en $\mathbf{V}$ es una aplicación que a cada punto de $\mathbf{V}$ le hace corresponder un tensor. De esta manera cada punto del espacio vectorial $\mathbf{V}$ es el origen de otro espacio vectorial ($\mathbf{E}$) llamado *espacio tangente*, el dual al espacio tangente en cada punto ($\mathbf{E}^\star$) se llama *espacio cotangente*, la colección de espacios tangentes (respectivamente cotangentes) con origen en cada punto de $\mathbf{V}$ se llama *fibrado tangente* (respectivamente *fibrado cotangente*). Por ejemplo, el vector velocidad de un fluido en un punto pertenece el espacio tangente en ese punto, y el campo de velocidades del fluido pertenece al fibrado tangente.
Sea $\boldsymbol{r}$ un punto perteneciente al espacio vectorial $\boldsymbol{v}$, descrito por sus componentes cartesianas $\bar{x}^i = \{\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n\}$ respecto de la base cartesiana habitual. Como hemos visto, en general, un sistema de coordenadas curvilíneas ($x^j = \{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$) es una colección de n funciones $x^j = x^j\left(\bar{x}^k\right)$ invertibles de tal manera que la posición de cualquier punto del espacio vectorial

queda unívocamente definida tanto por $\bar{x}^i$ como por x^j. La condición que garantiza que podamos invertir el cambio de coordenadas es que el jacobiano de la transformación sea distinto de cero en todo $\mathbf{V}$. Normalmente las coordenadas x^j serán funciones no lineales de las $\bar{x}^i$ y el jacobiano será una función del punto, por tanto la transformación dada será algo más complicada que un mero cambio de base. En particular, a diferencia de las coordenadas cartesianas $\bar{x}^i$, las coordenadas x^j ni siquiera tendrán dimensiones de longitud, sino que algunas serán longitudes (en determinadas direcciones dependientes del punto) y otras serán, por ejemplo, ángulos.

11.7.6. Álgebra de tensores

Hay cuatro operaciones básicas definidas sobre tensores: multiplicación por escalares, suma, producto tensorial y contracción tensorial. Las dos primeras son obvias: Dado un tensor su producto por un escalar tiene como componentes las del tensor original multiplicadas por el escalar, y dados dos tensores del mismo orden covariante y mismo orden contravariante, su suma tensorial tiene las componentes que resultan de sumar sus componentes una a una. En general, el tensor resultado de sumar dos tensores, o de multiplicar uno por un escalar, tiene el mismo orden covariante y contravariante que los originales. Como las operaciones de suma y producto por escalares para tensores se hacen componente a componente, estas operaciones heredan las correspondientes propiedades que tenían para los números, como son la propiedad distributiva y la propiedad asociativa.

Producto tensorial Dados dos tensores $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de orden (r_1, s_1) y (r_2, s_2) (covariante y contravariante respectivamente), con componentes

$$A^{j_1 j_2 \ldots j_{s_1}}_{i_1 i_2 \ldots i_{r_1}}, \qquad B^{l_1 l_2 \ldots, l_{s_2}}_{k_1 k_2 \ldots k_{r_2}} \tag{11.7.58}$$

su producto tensorial $\mathcal{T} = \mathcal{A}\mathcal{B}$ es un tensor de orden $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$ que tiene como componentes

$$T^{j_1 j_2 \ldots j_{s_1} l_1 l_2 \ldots l_{s_2}}_{i_1 i_2 \ldots i_{r_1} k_1 k_2 \ldots k_{r_2}} \;=\; A^{j_1 j_2 \ldots j_{s_1}}_{i_1 i_2 \ldots i_{r_1}} \; B^{l_1 l_2 \ldots l_{s_2}}_{k_1 k_2 \ldots k_{r_2}} \tag{11.7.59}$$

Contracción de índices Dados los tensores $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ anteriores, formamos el tensor producto tensorial y a continuación hacemos que un índice contravariante (por ejemplo el j_1) y uno covariante (por ejemplo el k_1) sean iguales (a un índice *mudo* m) y sumamos para todos los posibles valores (es decir, desde $m = 1$ hasta la dimensionalidad del espacio $m = n$). El objeto que resulta de esta operación tiene comportamiento tensorial bien definido y se puede comprobar fácilmente que es un tensor de orden $r_1 + r_2 - 1$ covariante y $s_1 + s_2 - 1$ contravariante. Usando el convenio de suma de Einstein este objeto se escribe como

$$T^{j_2 \ldots j_{s_1} l_1 l_2 \ldots l_{s_2}}_{i_1 i_2 \ldots i_{r_1} k_2 \ldots k_{r_2}} \;=\; A^{m j_2 \ldots j_{s_1}}_{i_1 i_2 \ldots i_{r_1}} \; B^{l_1 l_2 \ldots l_{s_2}}_{m k_2 \ldots k_{r_2}} \tag{11.7.60}$$

Para hacerse una idea intuitiva del significado de esta operación, la contracción de índices del caso anterior se puede interpretar como un producto escalar (o de manera más precisa una tabla de productos escalares), aunque el resultado sólo es un escalar si $\mathcal{A}$ es un vector 1-contravariante y $\mathcal{B}$ un vector 1-covariante, en cuyo caso la contracción resulta ser el producto escalar $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$. También es posible contraer dos índices pertenecientes al mismo tensor $\mathcal{A}$ (uno covariante y otro contravariante para que el objeto resultante tenga comportamiento tensorial bien definido). En ese caso la contracción de índices puede considerarse parecido a tomar la *traza*, aunque el resultado sólo es un escalar si $\mathcal{A}$ es una matriz 1-contravariante 1-covariante, en cuyo caso A^m_m es la traza de $\mathcal{A}$.

Criterios de tensorialidad Es conveniente disponer de una definición alternativa de tensor que nos permita verificar su naturaleza tensorial sin recurrir a calcular las leyes de transformación de las componentes tensoriales. De forma resumida, aplicamos el siguiente principio, o *regla del cociente*. Si comprobamos que el producto interno $\mathcal{T} \cdot \boldsymbol{v}$ es un tensor para todos los vectores $\boldsymbol{v}$, entonces $\mathcal{T}$ debe ser un tensor. Otros ejemplos válidos son

- Si $E \equiv U_i V^i$ es un escalar para todo vector contravariante V^i, entonces U_i es un vector covariante.
- Si $U_j \equiv T_{ij} V^i$ es un vector covariante para todo vector contravariante V^i, entonces T_{ij} es un tensor covariante de orden 2.
- Si $E \equiv T_{ij} U^i V^j$ es un escalar para todo vector contravariante V^i, y todo vector contravariante U^i, entonces T_{ij} es un tensor covariante de orden 2.

Estos resultados se generalizan de forma directa a cualesquiera órdenes tensoriales. Desde el punto de vista de los tensores en Física, la importancia de este principio reside en el hecho de que si una ecuación (o identidad) tensorial es cierta en un sistema de coordenadas, lo será también en todo sistema de coordenadas, relacionados con el primero mediante una transformación admisible. Como casos sencillos, que el determinante de un tensor sea nulo, o que el tensor sea invertible son propiedades que se satisfacen en todos los sistemas de coordenadas si se satisface en uno de ellos.

11.7.7. Tensores relativos

Transformación del determinante Introducimos ahora una generalización del concepto de tensor que aparece frecuentemente en la fórmula de integración de los tensores. Responderemos así a cuestiones del tipo si la integral de un escalar será también un escalar. Revisemos las propiedades de transformación del tensor métrico,

$$\widetilde{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \widetilde{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \widetilde{x}^j} g_{kl} \tag{11.7.61}$$

y tomemos su determinante. Por la regla del determinante de un producto de matrices, encontramos la ley de transformación

$$\det\left(\widetilde{g}\right) = \det\left(\frac{\partial x^k}{\partial \widetilde{x}^i}\right) \det\left(\frac{\partial x^l}{\partial \widetilde{x}^j}\right) \det\left(g\right) \tag{11.7.62}$$

Denotamos por J el Jacobiano de la transformación inversa de coordenadas $x^k = x^k\left(\widetilde{x}^i\right)$

$$J = \det\left(\frac{\partial x^k}{\partial \widetilde{x}^i}\right) = \left|\frac{\partial\left(x^1, x^2, \cdots x^n\right)}{\partial\left(\widetilde{x}^1, \widetilde{x}^2, \cdots \widetilde{x}^n\right)}\right| \tag{11.7.63}$$

Entonces, la ley de transformación del determinante del tensor métrico queda

$$\det\left(\widetilde{g}\right) = J^2 \det\left(g\right) \tag{11.7.64}$$

Este resultado indica que el determinante de un tensor 2-covariante no es un escalar, ni un tensor de ningún tipo. De hecho cumple una ley de transformación distinta a la que hemos visto hasta ahora.

Tensores relativos Introducimos la siguiente definición: Una función $\phi\left(x^k\right)$ se dice que representa un *escalar relativo de peso* w, si bajo las transformación de coordenadas $\widetilde{x}^i = \widetilde{x}^i\left(x^k\right)$, su ley de transformación está dada por

$$\widetilde{\phi}\left(\widetilde{x}^i\right) = J^w \phi\left(x^k\right) \tag{11.7.65}$$

Y un escalar relativo de peso unidad recibe el nombre específico de *densidad escalar*. De acuerdo con ésto, el determinante del tensor métrico es un escalar relativo de peso 2, mientras que su raíz cuadrada es un escalar relativo de peso unidad. Finalmente, un escalar invariante por su propia definición será un escalar relativo de peso 0.
Como ejemplo, evaluamos ahora el valor de la integral múltiple

$$I = \int_G f\left(x^k\right) dx^1 dx^2 \cdots dx^n \tag{11.7.66}$$

para la función continua $f\left(x^k\right)$. De acuerdo con la regla de cambio de la variable de integración, el valor de I en el sistema de coordenadas $\widetilde{x}^i$ es

$$\widetilde{I} \equiv \int_G \widetilde{f}\left(\widetilde{x}^i\right) d\widetilde{x}^1 d\widetilde{x}^2 \cdots d\widetilde{x}^n \tag{11.7.67}$$

$$= \int_G \widetilde{f}\left(\widetilde{x}^i\right) |\frac{\partial\left(\widetilde{x}^1, \widetilde{x}^2, \cdots \widetilde{x}^n\right)}{\partial\left(x^1, x^2, \cdots x^n\right)}| dx^1 dx^2 \cdots dx^n = \int_G \widetilde{f}\left(\widetilde{x}^i\right) J^{-1} dx^1 dx^2 \cdots dx^n \tag{11.7.68}$$

De aquí se deduce que aunque la función sea un escalar, $\widetilde{f}\left(\widetilde{x}^i\right) = f\left(x^k\right)$, la integral no será un escalar, $\widetilde{I} = I$, a menos que $J = 1$. Por tanto, en general la integral de un escalar no será un escalar. Esta cuestión es de la mayor importancia en física, ya que la mayoria de los campos físicos, como el electromagnetismo o la gravitación dependen de la construcción de invariantes integrales como la carga elétrica o la masa, de forma que tales cantidades resulten independientes de la elección de coordenadas. Por otro lado, si la función f es una densidad escalar, $\widetilde{f}\left(\widetilde{x}^i\right) J^{-1} = f\left(x^k\right)$, uno obtiene

$$\widetilde{I} = \int_G \widetilde{f}\left(\widetilde{x}^i\right) J^{-1} dx^1 dx^2 \cdots dx^n = \int_G f\left(x^k\right) dx^1 dx^2 \cdots dx^n = I \tag{11.7.69}$$

Se concluye entonces que la condición necesaria y suficiente para que la integral I sea invariante bajo la transformación de coordenadas $\widetilde{x}^i = \widetilde{x}^i\left(x^k\right)$, es que el integrando $f\left(x^k\right)$ sea una densidad escalar.

11.7.8. Símbolos de Christoffel

Tensor métrico para coordenadas arbitrarias Recordamos que respecto a un sistema de coordenadas rectangular $\bar{x}^i$, la longitud u de un vector $\boldsymbol{u}$ viene dada por la expresión

$$|\boldsymbol{u}|^2 \equiv \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = \bar{u}^i \bar{u}^i \tag{11.7.70}$$

y mediante la transformación de coordenadas, respecto al sistema de coordenadas curvilíneo x^i puede escribirse en la forma

$$|\boldsymbol{u}|^2 = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} u^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} u^k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} u^j u^k \tag{11.7.71}$$

Definiendo las componentes g_{jk} del tensor métrico en la forma

$$g_{jk} \equiv \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \tag{11.7.72}$$

obtenemos

$$|\boldsymbol{u}|^2 = g_{jk} u^j u^k \tag{11.7.73}$$

y así demostramos que la longitud de un vector contravariante en P es una forma cuadrática en las componentes del vector, con los coeficientes g_{jk} evaluados en el punto P. De la invertibilidad de la transformación de coordenadas, se sigue que $\det(g_{jk}) \neq 0$, y por tanto, la matriz simétrica posee un inverso, que denotamos por g^{jk} tal que

$$g^{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \tag{11.7.74}$$

tal que

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k \tag{11.7.75}$$

Símbolos de Christoffel Hemos visto que las componente g_{jk} del tensor métrico dependen de las primeras derivadas parciales de las coordenadas. En ocasiones, será necesario evaluar segundas derivadas de las coordenadas bajo transformación. Por ejemplo, al considerar la variación dV^i de las componentes de un vector $\boldsymbol{v}$ cuando varían las coordenadas x^i del sistema, vemos que de la ley de transformación de las componentes del vector

$$\bar{V}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} V^j \tag{11.7.76}$$

se deduce la siguiente ley de tranformación de las componentes de la variación del vector

$$d\bar{V}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dV^j + d\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} V^j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dV^j + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} V^j dx^k \tag{11.7.77}$$

y por tanto, a no ser que la transformación de coordenadas sea afín, esto es, $\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} \equiv 0$, la variación de un vector no tendrá carácter tensorial. En cualquier caso, podremos eliminar las segundas derivadas parciales en términos del tensor métrico, utilizando la relación

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = 2\frac{\partial^2 \bar{x}^l}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} \tag{11.7.78}$$

Para ello, se define las cantidades $[ij,k] \equiv \Gamma_{ijk}$ de tres índices

$$[ij,k] \equiv \Gamma_{ijk} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \tag{11.7.79}$$

denominados *símbolos de Christoffel de primera especie* para el sistema de coordenadas curvilíneo. La notación anterior resalta el hecho de que existe simetría bajo el cambio de pares de índices i por j, y antisimetría bajo los cambios de pares restantes. Además, por su utilidad, se introducen tambié n las cantidades asociadas

$$\Gamma^k_{ij} \equiv \ g^{kl}\Gamma_{ijl} \tag{11.7.80}$$

que son los *símbolos de Christoffel de segunda especie* del sistema de coordenadas curvilíneo. En ambos casos no son cantidades tensoriales, por la presencia en la ley de transformación correspondiente de un té rmino no nulo de derivadas parciales segundas. Con ayuda de los símbolos de segunda especie, podemos obtener la siguiente relación importante para las derivadas parciales segundas

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma^l_{jk}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} - \bar{\Gamma}^i_{lm}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^k} \tag{11.7.81}$$

11.7.9. Derivada absoluta de un tensor

Diferencial de un vector Partimos de las fórmulas para la diferencial de un vector

$$d\boldsymbol{e}_i = \Gamma^k_{ij}\boldsymbol{e}_k dx^j \tag{11.7.82}$$

para los vectores de la base contravariante $\boldsymbol{e}_i$, y

$$d\boldsymbol{e}^i = -\Gamma^i_{kj}\boldsymbol{e}^k dx^j \tag{11.7.83}$$

para los vectores de la base covariante $\boldsymbol{e}^i$. Con ayuda de estas expresiones, escribimos la diferencial de un vector $\boldsymbol{v}$ en sus forma covariante y contravariante, respectivamente

$$d\boldsymbol{v} = d\left(v_i\boldsymbol{e}^i\right) = dv_i\boldsymbol{e}^i + v_i d\boldsymbol{e}^i = dv_i\boldsymbol{e}^i - v_i\Gamma^i_{kj}\boldsymbol{e}^k dx^j \tag{11.7.84}$$

$$d\boldsymbol{v} = d\left(v^i\boldsymbol{e}_i\right) = dv^i\boldsymbol{e}_i + v^i d\boldsymbol{e}_i = dv^i\boldsymbol{e}_i + v^i\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{e}_k dx^j \tag{11.7.85}$$

Ya que no existen índices libres en estas dos expresiones, renombrando sus índices podemos expresar estas diferenciales en la forma

$$d\boldsymbol{v} = \left(dv_i - v_k\Gamma^k_{ij}dx^j\right)\boldsymbol{e}^i \tag{11.7.86}$$

$$d\boldsymbol{v} = \left(dv^i + v^k \Gamma^i_{kj} dx^j\right) \boldsymbol{e}_i \tag{11.7.87}$$

Comprobamos así que ambos casos la diferencial de un vector $\boldsymbol{v}$ es un vector $d\boldsymbol{v}$, cuyas componentes covariante y contravariante son los té rminos que figuran entre paré ntesis, es decir

$$(d\boldsymbol{v})_i \equiv dv_i - \Gamma^k_{ij} v_k dx^j \tag{11.7.88}$$

$$(d\boldsymbol{v})^i \equiv dv^i + \Gamma^i_{kj} v^k dx^j \tag{11.7.89}$$

A partir de estas definiciones, podemos construir dos tipos de derivadas tensoriales, la derivada absoluta y la derivada covariante.

Derivada absoluta de un vector Sea s una función escalar (tensor de orden 0), y ds su diferencial. La derivada absoluta del vector $\boldsymbol{v}$ respecto a s es el vector $d\boldsymbol{v}/ds$, cuyas componentes covariante y contravariante se deducen de las expresiones anteriores

$$\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{ds}\right)_i \equiv \frac{dv_i}{ds} - \Gamma^k_{ij} v_k \frac{dx^j}{ds} \tag{11.7.90}$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{ds}\right)^i \equiv \frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i_{kj} v^k \frac{dx^j}{ds} \tag{11.7.91}$$

Como ejemplo, la aceleración $\boldsymbol{a}$ es la derivada absoluta de la velocidad respecto al tiempo, haciendo $ds = dt$ la diferencial de tiempo, $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$. Y la magnitud a de la aceleración está dada por $a = \sqrt{g^{ij} a_i a_j}$. Como podemos ver, la aceleración no sólo se producirá al variar en el tiempo la componente de la velocidad en el tiempo, sino que tiene contribuciones proporcionales a Γ^i_{kj} y a la variación temporal de las coordenadas del sistema elegido. Estas contribuciones son debidas a la inercia, como la aceleración centrífuga y la aceleración de Coriolis. En un sistema inercial $\Gamma^i_{kj} \equiv 0$, no hay fuerzas de inercia, y estas aceleraciones se anulan idé nticamente.

Expresión tensorial de la ley de Newton En Mecánica clásica se estudia el movimiento de los cuerpos bajo la influencia de fuerzas, aplicando la ley de Newton $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$ tanto para el movimiento del centro de masas, como para el movimiento respecto al centro de masas. El movimiento del cuerpo queda caracterizado por la variación en el tiempo de su vector de posición $\boldsymbol{r}$, respecto al sistema de coordenadas elegido. En este caso, la velocidad del cuerpo es, por definición, el vector

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{11.7.92}$$

y la ley de Newton, $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$, tiene las componentes

$$f^i = ma^i = m\left(\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{kj} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^j}{dt}\right) \tag{11.7.93}$$

En ausencia de fuerzas, el movimiento libre del cuerpo se realiza sobre la curva $\boldsymbol{x}(t)$ solución de la ecuación de movimiento

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{kj} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \tag{11.7.94}$$

y si el sistema de coordenadas es inercial, esta ecuación se reduce a

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = 0 \tag{11.7.95}$$

cuya solución $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}t$, representa un movimiento en línea recta, con velocidad constante.

Componentes *fí sicas* de vectores Desde el punto de vista matemático la derivada del vector respecto del escalar tiempo t está bien definida. Sin embargo, desde el punto de vista físico además debemos tener la certeza de que las ecuaciones obtenidas son dimensionalmente correctas. Si revisamos por ejemplo las componentes contravariantes de la aceleración

$$a^k \equiv \frac{dv^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} v^i \frac{dx^j}{dt} \tag{11.7.96}$$

vemos que dimensionalmente serán correctas si el segundo té rmino tiene unidades de velocidad/tiempo. Para ello, es necesario que Γ^i_{kj} tenga dimensiones del inverso de la longitud. Recordando que dimensionalmente

$$\Gamma^k_{ij} \sim g^{kl} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \tag{11.7.97}$$

vemos que Γ^k_{ij} tendrá dimensión del inverso de longitud siempre que el tensor mé trico sea adimensional. Dado que por definición el elemento diferencial de longitud, ds, está dado por

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{11.7.98}$$

g_{ij} será adimensional cuando las coordenadas del sistema sean coordenadas de longitud.
Hemos visto anteriormente que al pasar de un sistema de coordenadas cartesianas a un sistema de coordenadas curvilíneas los vectores tangentes a las lineas coordenadas proporcionan, en cada punto, una base del espacio tangente, relacionada con la base cartesiana inicial por medio de la matriz jacobiana del cambio de coordenadas.
Desde el punto de vista tensorial esta base resulta aconsejable, ya que conduce a una relación sencilla para el cambio de coordenadas. Por el contrario, desde el punto de vista fí sico la base dada por las tangentes a las lineas coordenadas no es la más aconsejable ya que, en general, las componentes relativas a esta base de un tensor determinado no tienen todas ellas las mismas dimensiones. Esto se debe a que los vectores $\tilde{\boldsymbol{t}}_i$ (aparte de no ser unitarios) no son adimensionales. En general las dimensiones del vector $\boldsymbol{t}_i$ están dadas por

$$\left[\tilde{\boldsymbol{t}}_i\right] = \frac{\mathrm{L}}{[y^i]} \tag{11.7.99}$$

claramente $\boldsymbol{t}_i$ sólo será adimensional en aquellos casos en los que la correspondiente coordenada curvilinea y^i tenga dimensiones de longitud.
Este problema se resuelve tomando como base del espacio tangente, en cada punto, a los vectores tangentes *unitarios* a las lineas coordenadas

$$\hat{\boldsymbol{t}}_i = \frac{\tilde{\boldsymbol{t}}_i}{||\tilde{\boldsymbol{t}}_i||} = \frac{\tilde{\boldsymbol{t}}_i}{h_i} \tag{11.7.100}$$

Las componentes relativas a esta base se denominan *componentes fí sicas*, y se caracterizan por tener las mismas dimensiones que el objeto tensorial que representan. Las leyes de transformación que llevan a estas coordenadas son algo más complicadas que las anteriores, ya que incluyen contracciones con el tensor mé trico y con su inversa. Por este motivo es usual usar las coordenadas respecto de la base $\{\tilde{\boldsymbol{t}}_i\}_{i=1}^n$ para todo lo que son transformaciones de coordenadas y emplear las componentes fí sicas, calculadas en función de las anteriores, sólo cuando ya no se van a realizar más cambios de coordenadas.
Como ejemplo, las componentes que se usan para formular las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos en sistemas de coordenadas curvilineas son siempre las *componentes físicas*.

11.8. Referencias

- Kay, *Cálculo tensorial*, Serie Schaum
- Schouten, *Tensor Analysis for Physicists*

Capítulo 12

Cálculo variacional

12.1. Cálculo variacional

Como ejemplo introductorio característico comenzamos analizando la trayectoria de un haz de luz en un medio homogéneo, dentro del rango de aplicación de la óptica geométrica ($\lambda \ll a$). En este rango la propagación del haz de luz es rectilínea hasta que el haz llega a una superficie de discontinuidad, donde se ve reflejado y refractado de acuerdo con las leyes de Snell. Estas leyes pueden ser deducidas, como demostró Fermat, a partir del denominado *Principio de Tiempo minimo*, que establece que el haz de luz se propaga en todas circunstancias de forma que la duración temporal de su trayectoria sea *mínima*.

12.1.1. Introducción

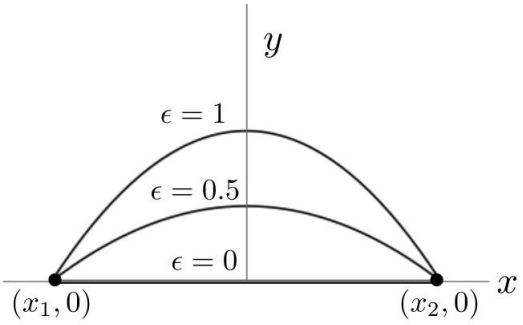
Para la aplicación práctica de este Principio, como de otros muchos adicionales, nos servimos del denominado *cálculo variacional*, que nos permite calcular la solución al problema (la trayectoria de la luz) planteando la condición de extremo (en este caso, un mínimo) para la función característica del problema (en este caso, la duración de la trayectoria).
El cálculo variacional puede ser de dos tipos. El llamado cálculo variacional *directo* cuando conocemos o intuimos por anticipado una forma parámetrica de la solución, y el problema se reduce a determinar los valores óptimos de estos parámetros. Y tendremos que aplicar el denominado cálculo variacional *completo* cuando no tengamos un conocimiento previo sobre las posibles soluciones, y debamos analizar el conjunto completo de soluciones físicamente admisibles.

12.1.2. Ejemplo de cálculo variacional directo

Aplicamos el Principio de Fermat a la propagación de un haz de luz en un medio homogéneo bidimensional entre los dos puntos de la figura, $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$. Para aplicar un cálculo directo reducimos el problema eligiendo arbitrariamente una familia de parábolas $y(x;\epsilon)$ parametrizadas por un único parámetro ϵ en la forma

$$y(x;\epsilon) = \epsilon(x - x_1)(x - x_2) \tag{12.1.1}$$

de forma que ϵ es una medida de la *curvatura* de la parábola, y distingue las distintas curvas de esta familia, como se muestra en los ejemplos de la figura.



Entre todas las posibles trayectorias (cada una de las parábolas de la familia), según el Principio de Fermat la trayectoria real seguida por el haz de luz corresponde a aquella parábola $y(x;\epsilon^*)$ para la cual el tiempo genérico transcurrido $T(\epsilon)$ tenga un valor mínimo, esto es,

$$T'(\epsilon^*) = 0 \quad , \quad T''(\epsilon^*) > 0 \tag{12.1.2}$$

La función tiempo T a lo largo de la trayectoria está dada por la expresión integral

$$T \equiv \int \frac{ds}{v} \tag{12.1.3}$$

siendo v la velocidad de propagación (velocidad de la luz en el medio), con

$$ds \equiv \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1 + \epsilon^2 \left(2x - x_1 - x_2\right)^2}dx \tag{12.1.4}$$

el elemento de longitud de arco sobre la curva parametrizada. Dado que el medio se considera homogéneo, la velocidad de propagación es constante a lo largo de la trayectoria, y por tanto tenemos el tiempo transcurrido en la forma

$$T = \frac{1}{v}\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \epsilon^2 \left(2x - x_1 - x_2\right)^2}dx \tag{12.1.5}$$

Ya que los extremos de la trayectoria no son funciones del parámetro ϵ, podemos derivar esta expresión introduciendo la derivada bajo el signo integral. Esto es, $T'(\epsilon) = 0$ equivale a

$$\frac{dT}{d\epsilon} = \frac{\epsilon}{v}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\left(2x - x_1 - x_2\right)^2}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \left(2x - x_1 - x_2\right)^2}}dx = 0 \tag{12.1.6}$$

con la única solución $\epsilon^* = 0$, que corresponde a la trayectoria rectilínea $y \equiv 0$ entre los puntos inicial y final. Comprobamos además que este valor del parámetro corresponde a un mínimo al ser

$$\frac{d^2T}{d\epsilon^2}(\epsilon^*) = \frac{1}{v}\int_{x_1}^{x_2} \left(2x - x_1 - x_2\right)^2 dx > 0 \tag{12.1.7}$$

Podriamos mejorar este método introduciendo un conjunto numerable infinito de parámetros $(\epsilon_1, \epsilon_2, ..)$ de forma que en la familia de curvas $y(x;\epsilon)$ se encontrasen todas las curvas físicamente admisibles, con lo que la solución al problema consistiría en resolver simultáneamente las condiciones de extremo

$$\frac{\partial T}{\partial \epsilon_i} = 0 \tag{12.1.8}$$

Este método nos daría la solución completa al problema, no solo una solución aproximada en función de la elección afortunada de la familia uniparamétrica, por lo que formalmente es equivalente al desarrollo del cálculo variacional completo, que se expone a continuación.

12.1.3. Ecuación de Euler−Lagrange

Definición de funcional $I[Y]$ El problema que resolvemos en este caso es encontrar la función $y(x)$, entre todas las funciones físicamente admisibles $Y(x)$, que conecta los puntos inicial $(x_1, y(x_1))$ y final $(x_2, y(x_2))$, y que da lugar a un valor estacionario de la integral definida en el problema

$$I[Y] \equiv \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y')dx \tag{12.1.9}$$

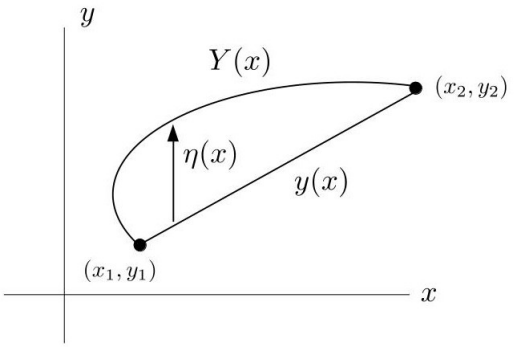
La condición física que debe exigirse es que $Y(x)$ tenga derivada segunda continua, y del mismo modo I debe tener derivadas segundas continuas respecto a sus argumentos, (x, Y, Y'). Esta condición es necesaria para que el problema (cálculo del extremo de la integral) esté bien definido. La diferencia básica con el caso anterior es que la integral I no depende de ningún parámetro, sino que es un *funcional*, es decir, una función $I[Y]$ de una función $Y(x)$, y el método para calcular su extremo se denomina *cálculo de variaciones*, ó cálculo variacional.

Obtención de la función $I(\epsilon)$ Por simplicidad utilizaremos el concepto anterior de familia uniparamétrica, de parámetro ϵ, adaptándolo a la nueva situación, definiendo la familia en la forma

$$Y(x) = y(x) + \epsilon\, \eta(x) \tag{12.1.10}$$

Aquí $y(x)$ es la solución al problema y $\eta(x)$ es una función arbitraria. De esta forma la solución al problema $Y(x) = y(x)$ equivale al valor del parámetro $\epsilon = 0$, y la condición de extremo para la integral $I[Y]$ se reduce a la condición de extremo para la función $I(\epsilon)$ bajo estas condiciones, esto es, $I'(0) = 0$.

Condiciones frontera La función $\eta(x)$, aún siendo arbitraria, debe compartir las mismas propiedades que Y, esto es, debe tener derivada segunda continua. Además ya que Y, y comparten los valores en los puntos inicial y final, $Y(x_1) = y(x_1)$, $Y(x_2) = y(x_2)$, como muestra la figura



las condiciones frontera para la función arbitraria deben ser

$$\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2) \tag{12.1.11}$$

Condición de extremo para $I(\epsilon)$ Una vez definidas las condiciones frontera, pasamos a obtener explícitamente la función $I(\epsilon)$ a partir del funcional $I[Y]$ sabiendo que

$$Y(x) = y(x) + \epsilon\, y(x) \tag{12.1.12}$$

y por tanto

$$Y'(x) = y'(x) + \epsilon\, \eta'(x) \tag{12.1.13}$$

Introduciendo estas expresiones en el integrando de I, obtenemos el resultado

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y(x) + \epsilon\, \eta(x), y'(x) + \epsilon\, \eta'(x)\right) dx \tag{12.1.14}$$

de forma que su derivada, aplicando sucesivamente la regla de la cadena, está definida en la forma

$$I'(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\eta + \frac{\partial F}{\partial Y'}\eta' \right) dx \tag{12.1.15}$$

Recordando que para $\epsilon = 0$ tenemos $Y = y$, la condición de extremo para $\epsilon = 0$ se escribe

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x) \right) dx = 0 \tag{12.1.16}$$

Aparentemente parece que el resultado depende de dos funciones arbitrarias, $\eta(x)$ y $\eta'(x)$. Sin embargo si integramos el segundo término por partes

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' dx = \cancel{\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\Big|_{x_1}^{x_2}}^{0} - \int_{x_1}^{x^2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta dx \tag{12.1.17}$$

aplicando las condiciones frontera de η, llegamos a la expresión

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right) \eta(x) dx = 0 \tag{12.1.18}$$

Ecuación de Euler−Lagrange Dado que $\eta(x)$ es completamente arbitraria salvo su valor en los puntos inicial y final, la condición anterior de extremo será cierta para toda elección de $\eta(x)$ si se satisface idénticamente

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \tag{12.1.19}$$

Esta ecuación es la solución formal al cálculo del extremo del funcional $I[Y]$, de forma que la solución física al problema está dada por la solución $y(x)$ de dicha ecuación.

12.2. Integrales primeras

La solución a la ecuación de Euler−Lagrange puede ser obtenida de forma directa en casos especiales, en términos de las denominadas *integrales primeras*. Por integral primera se entiende una expresión que contiene a la función y sus derivadas en un orden inferior al presente en la ecuación original, y cuya derivada respecto a la coordenada independiente resultar ser nula. En el caso particular del funcional $I = \int F(x, y, y')dx$ son dos las integrales primeras de interés: (1) cuando el integrando F no depende de la variable dependiente y, y (2) cuando el integrando no depende explícitamente de la variable independiente x. En ambos casos, la ausencia de la dependencia en alguna de las variables es indicativo de la existencia de una *simetría* en el sistema (pe, la simetría bajo la traslación en la dirección del eje x), y recíprocamente cada simetría del sistema implica la existencia de una integral primera.

12.2.1. Simetría bajo la traslación en y

Si el integrando es invariante bajo los cambios arbitrarios en y, se debe a que se satisface

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{12.2.1}$$

esto es,

$$F = F(x, y') \tag{12.2.2}$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación de Euler−Lagrange, tenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = C \equiv \text{cte} \tag{12.2.3}$$

donde C es una constante cuyo valor depende en última instancia de las condiciones frontera para la función $y(x)$. Dado que la ecuación original es de segundo orden y esta ley de conservación depende de la derivada de primer orden, hemos obtenido una integral primera del sistema.

12.2.2. Simetría bajo la traslación en x

Si el integrando es invariante bajo los cambios arbitrarios en x, se debe a que se satisface

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{12.2.4}$$

esto es,

$$F = F(y, y') \tag{12.2.5}$$

de forma que

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' \tag{12.2.6}$$

y de acuerdo con la ecuación de Euler−Lagrange, tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \tag{12.2.7}$$

La unión de ambos resultados nos lleva a la expresión

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} y'\right) \tag{12.2.8}$$

de forma que la cantidad

$$F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' = C \equiv \text{cte} \tag{12.2.9}$$

representa una integral primera del sistema, donde C es una constante cuyo valor depende de las condiciones frontera para la función $y(x)$. De nuevo dado que la ecuación original es de segundo orden y esta ley de conservación depende de la derivada de primer orden, podemos confirmar que se trata de una integral primera del sistema.

12.3. Coordenadas ignorables

Podemos extender los resultados anteriores a sistemas en los que el funcional quede definido en función de un conjunto de funciones dependientes, digamos $y_1, y_2, ..$ y sus derivadas, $y_1', y_2', ..$
En este caso, siguiendo los mismos pasos anteriores, la condición de extremo del funcional $I(\epsilon)$, definido por

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F\left(Y_1, Y_2, .., Y_1', Y_2', .., x\right) dx \tag{12.3.1}$$

para el conjunto de trayectorias vecinas

$$Y_i(x) = y_i(x) + \epsilon\, \eta_i(x) \tag{12.3.2}$$

está dado por la condición

$$I'(\epsilon)\Big|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)\right) \eta_i(x) dx = 0 \tag{12.3.3}$$

que debe ser válida para cualquier variación arbitraria $\{\eta_i(x)\}$.
Eligiendo sucesivamente las variaciones como aquellas idénticamente nulas salvo una en particular, digamos $\eta_k(x)$, vemos que se satisface

$$I'(\epsilon)\Big|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_k'}\right)\right) \eta_k(x) dx = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y_k} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_k'}\right) \tag{12.3.4}$$

para todo k. Como conclusión, la resolución del extremo de la integral $I[y]$ da lugar a una ecuación de Euler−Lagrange por cada una de las variables dependientes $y_k(x)$.

Así mismo, la existencia de integrales primeras del sistema se ve reducido a la existencia de integrales primeras en cada uno de las variables dependientes. Por ejemplo

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y_k'} = C_k \equiv \text{cte} \tag{12.3.5}$$

En este caso en particular, cuando

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} = 0 \tag{12.3.6}$$

decimos que q_k es una *coordenada ignorable*, en el sentido que la descripción del sistema es la misma sea cual sea el valor de la coordenada q_k: como ejemplo, para estudiar la dinámica de una partícula libre no necesitamos conocer su localización (su posición es una coordenada ignorable).

12.4. Principios variacionales

12.4.1. Energía potencial mínima

Según nos muestra nuestra experiencia cotidiana, en el ámbito de la física clásica macroscópica, la mayoría de los cuerpos, durante la mayor parte del tiempo, se encuentran en un estado de reposo, ocupando una posición de equilibrio estable (en el *mínimo* de la energía potencial). Y la mayoria de las veces cuando se mueven lo hacen alrededor del punto de equilibrio, o en un dirección hacia un punto de energía potencial mínima.
El denominado *Principio de energía potencial mínima* nos permite obtener la localización de los puntos de equilibrio mecánico de los cuerpos, y como suele suceder con los principios físicos su rango de aplicación puede extenderse a otras situaciones de equilibrio sin un origen mecánico, como por ejemplo el equilibrio en una reacción química, o el equilibrio en la evolución dinámica de un ecosistema.

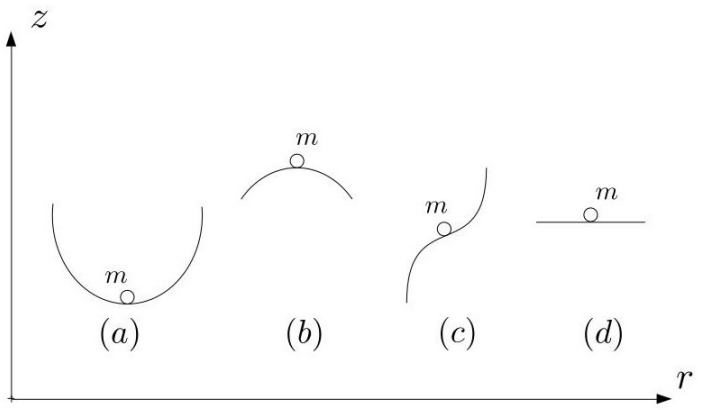
Masa puntual sobre superficie $z(r)$ Consideremos como primer ejemplo el caso de una masa puntual m que está situada sobre la superficie $z(r)$ en presencia de la gravedad, siendo z la coordenada vertical, y r la distancia radial, con $r = r_0$ el eje de simetría de la superficie.
La energía potencial de la masa puntual está dada por

$$U = mgz(r) \tag{12.4.1}$$

tomando como referencia la energía potencial igual a cero en el plano $z = 0$. Los estados de equilibrio que puede tener la masa están dados por la condición de extremo en la energía potencial

$$\frac{dU}{dr} = 0 \to z'(r) = 0 \tag{12.4.2}$$

y corresponde al punto de tangencia horizontal en la gráfica de la función $z(r)$. Como se detalla en la figura adjunta, tal condición queda satisfecha para cuatro tipo de puntos: un mínimo (a), un máximo (b), un punto de inflexión (c), y (d) para un perfil de potencial constante. El punto (a) corresponde a un punto de equilibrio *estable*, los punto (b) y (c) son inestables, y el punto (d) es neutro.



El Principio de energía potencial mínima establece que la masa puntual se encontrará en equilibrio en el punto $r = r_0$ de energía potencial mínima, esto es, se satisface simultáneamente

$$\frac{dU}{dr}\Big|_{r=r_0} = 0 \quad , \quad \frac{d^2U}{dr^2}\Big|_{r=r_0} > 0 \tag{12.4.3}$$

y corresponde, como hemos visto, al punto (a), y su posición no cambia en el tiempo.

De forma general, este Principio establece que un sistema que se encuentra en estado de reposo respecto a un sistema *inercial* de coordenadas, debe estar situado donde la función energía potencial toma un valor estacionario. De esta forma, este Principio queda directamente relacionado con el enunciado de la primera *Ley de Newton*: un cuerpo material se mantiene en estado de reposo, o de movimiento rectilíneo uniforme, mientras no exista una fuerza exterior que lo modifique. Para que exista concordancia, la fuerza exterior debe definirse como la derivada de la energía potencial, por lo que el Principio es más restrictivo que la Ley de Newton, pero por otro lado es de aplicación más general ya que permite definir los estados de equilibrio de sistemas arbitrarios a partir de una función escalar (la energía potencial), y permite por ejemplo analizar sistemas más complejos, aquellos definidos a partir de un conjunto de ligaduras internas, sin entrar en detalle de las fuerzas de ligadura que sí son necesarias en la teoría de Newton.

Punto de equilibrio de un muelle Consideremos como segundo ejemplo una masa puntual m fijada en el extremo libre de un muelle de constante elástica k, colocado en posición vertical, en presencia de la gravedad. La energía potencial total es la suma de la energía potencial elástica del muelle, $\frac{1}{2}kz^2$, y la energía potencial gravitatoria de la masa, $-mgz$, donde z es la elongación del muelle respecto de su longitud natural (digamos ℓ_0), y z es positiva en dirección descedente. Por tanto, el sistema está caracterizado por la energía potencial total

$$U(z) = -mgz + \frac{1}{2}kz^2 \tag{12.4.4}$$

Resolviendo la posición de equilibrio estable del sistema

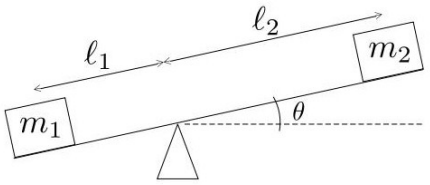
$$\frac{dU}{dz} = 0 \quad , \quad \frac{d^2U}{dz^2} > 0 \tag{12.4.5}$$

encontramos una única solución

$$z = \frac{mg}{k} \tag{12.4.6}$$

Concluimos por tanto, de acuerdo con el Principio de energía potencial mínima, que en ausencia de movimiento, el sistema se encuentra en reposo con la masa m situada a la distancia $z = \frac{mg}{k}$ de la posición de equilibrio del muelle, en ausencia de la masa.

Posición de equilibrio de un balancín Consideremos finalmente el balancín de la figura, con dos masas fijas m_1 y m_2 en sus extremos, que puede pivotar entorno al punto de suspensión. Queremos analizar su punto de equilibrio (el valor del ángulo θ en el equilibrio) considerando que el balancín ha alcanzado un estado de reposo, fruto por ejemplo de la fricción cinética en el punto de suspensión.



En presencia de la gravedad, la energía potencial total será la suma

$$U = -m_1 g \ell_1 \operatorname{sen}\theta + m_2 g \ell_2 \operatorname{sen}\theta \tag{12.4.7}$$

tomando como referencia la posición mostrada en la figura. La condición necesaria para el mínimo de energía potencial se lee

$$\frac{dU}{d\theta} = (-m_1\ell_1 + m_2\ell_2)\, g \cos\theta = 0 \tag{12.4.8}$$

Deducimos entonces en primer lugar que para la configuración concreta tal que $m_1\ell_1 = m_2\ell_2$, la energía potencial es nula, $U(\theta) = 0$, para todo valor de θ, lo que indica que el balancín tiene un estado de equilibrio neutro, independiente del valor de θ.
Por otro lado, si se satisface inicialmente la condición $m_2\ell_2 > m_1\ell_1$, los puntos de equilibrio están dados por las soluciones

$$\cos\theta = 0 \to \theta = \pm\frac{\pi}{2} \tag{12.4.9}$$

Analizando ahora la derivada segunda en estos puntos

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}\Big|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}} = \mp\,(m_2\ell_2 - m_1\ell_1)\, g \lessgtr 0 \tag{12.4.10}$$

concluimos que $\theta = -\frac{\pi}{2}$ corresponde al mínimo del potencial y es un punto de equilibrio estable: el balancín se encontrará en reposo en posición vertical con la masa mayor abajo. De forma análoga concluimos que $\theta = +\frac{\pi}{2}$, con la masa mayor arriba, será una posición de equilibrio inestable.

Tiempo necesario para alcanzar un punto de equilibrio inestable Aunque no es una aplicación directa del Principio de energía potencial mínima, es interesante analizar de forma dinámica el movimiento del sistema en las cercanía del punto de equilibrio inestable. En particular queremos determinar el tiempo que transcurre cuando el valor de la energía E es igual a $U(a)$ (el sistema alcanza el punto de equilibrio con velocidad nula), esto es, el punto inestable es el punto de retorno del movimiento.
Consideremos de forma general un punto de equilibrio inestable en la posición $x = a$ con energía potencial en sus proximidades (aplicando el desarrollo en serie de Taylor)

$$U(x) = U(a) + \cancelto{0}{U'(a)}\,(x-a) + \frac{1}{2}U''(a)\,(x-a)^2 \tag{12.4.11}$$

con $U''(a) < 0$. Aplicando entonces la dinámica (segunda Ley de Newton), obtenemos la ecuación de movimiento en la forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx} = -U''(a)\,(x-a) \tag{12.4.12}$$

ó, dado que

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{x}^2}{dx} \tag{12.4.13}$$

obtener la ecuación diferencial para la velocidad $\dot{x}$

$$\frac{1}{2}\frac{d\dot{x}^2}{dx} = \lambda^2(x-a) \quad , \quad \lambda^2 = -\frac{U''(a)}{m} > 0 \tag{12.4.14}$$

La solución general de esta ecuación diferencial del movimiento, que satisface $\dot{x} = 0$ cuando $x = a$,

$$\dot{x} = \pm\lambda(x-a) \tag{12.4.15}$$

donde el doble signo $\pm$ tiene en cuenta los dos signos posibles de la velocidad (esto es, si nos acercamos o alejamos de $x = a$). Consideremos que partimos de la posición inicial $x_0 > a$ y nos acercamos al punto $x = a$. El signo de la velocidad será negativo y de la solución al movimiento, obtenemos el tiempo de llegada T al punto de retorno

$$\int dt = T = -\frac{1}{\lambda}\int_{x_0}^{a} \frac{dx}{x-a} \to \infty \tag{12.4.16}$$

Como conclusión, necesitaremos un tiempo infinito para que el sistema alcance su punto de equilibrio inestable cuando llega a éste con una velocidad nula. Destacamos también que para obtener este resultado únicamente hemos tenido que analizar la ecuación de movimiento en la vecindad del punto $x = a$.

12.4.2. Sistema con ligaduras

Todo sistema, por sencillo que sea, está formado por partes interconectadas, y usualmente esta interconexión se introduce matemáticamente en la teoría mediante ecuaciones algebraicas. Por ejemplo, la condición $L =$ cte que establece que la longitud del hilo de un pendulo tiene una longitud L constante. Dentro de este planteamiento, podemos introducir en el cálculo variacional el efecto de estas *ligaduras*, y de las *fuerzas de ligadura* asociadas, entendiendo que no necesitamos conocer su origen (en el ejemplo anterior, la fuerza de ligadura es la tensión del hilo, cuyo origen queda desconocido en la resolución del problema).

Multiplicadores de Lagrange Imaginemos que tenemos que determinar una función $U(x, y)$ de dos variables mediante un método variacional, y que debemos aplicar una condición adicional, en la forma algebraica

$$C(x, y) = 0 \tag{12.4.17}$$

para obtener la solución $y(x)$ a nuestro problema. El método más directo sería despejar primero $y(x)$ a partir de $C(x, y) = 0$, e introducir su valor en la función inicial $U(x, y)$ que pasará a ser una función de una única variable x, y a la que podremos aplicar el procedimiento variacional ordinario.
Existe un método equivalente, más versatil, denominado *método de los multiplicadores de Lagrange*. Consiste en definir una función energía potencial ampliada U^*, en la forma

$$U^*(x, y) = U(x, y) + \lambda \cdot C(x, y) \tag{12.4.18}$$

que formalmente es idéntica a $U(x, y)$ al ser $C(x, y) \equiv 0$, aunque muestra una dependencia funcional diferente en las variables del sistema x, y. Aquí, el factor λ se denomina *multiplicador de Lagrange*, y dará cuenta de la *fuerza de ligadura*, la cantidad físicamente responsable de la existencia de la ligadura $C(x, y) = 0$.

Una vez definida la función auxiliar U^*, procedemos a calcular su extremo, aplicando las condiciones usuales para una función dependiente de dos variables

$$\frac{\partial U^*}{\partial x} = 0 = \frac{\partial U^*}{\partial y} \tag{12.4.19}$$

Estas dos ecuaciones junto con la propia definición de ligadura, $C(x, y) = 0$, nos permiten resolver el problema. En particular, para una ligadura en la que podamos despejar la variable y en la ligadura

$$C(x, y) = 0 \to y - f(x) = 0 \tag{12.4.20}$$

tenemos las tres ecuaciones

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \lambda = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda \frac{df}{dx} = 0 \quad , \quad y = f(x) \tag{12.4.21}$$

Eliminando λ de las dos primeras ecuaciones, el resultado es equivalente al método directo de substitución $y = f(x)\,, U(x,y) \equiv U(x, f(x))$, mencionado inicialmente.

Ecuación de la catenaria Como ejemplo característico, analizamos cuál es la forma funcional de la curva $y(x)$ que describe una cuerda con masa, situada en el plano vertical (x, y) bajo la acción de la gravedad, con sus dos extremos fijos en las posiciones, digamos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Para obtener el resultado deberemos aplicar el Principio de energía potencial mínima, el cálculo variacional, y los multiplicadores de Lagrange.

Siendo un cuerpo continuo, la energía potencial gravitatoria (única presente) de la cuerda con masa está definida en la forma funcional

$$U[y] = \int gy \; dm \tag{12.4.22}$$

siendo dm el elemento de masa, g la gravedad, e y la altura respecto al punto de referencia del elemento dm. Conocida como dato la densidad lineal de masa ρ de la cuerda, el elemento de masa es

$$dm = \rho ds \tag{12.4.23}$$

siendo ds el elemento de arco que forma el elemento dm. Siendo $y(x)$ la forma de la curva cuyo elemento es ds, tenemos

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx \tag{12.4.24}$$

de forma que la energía potencial tiene la expresión

$$U[y] = \rho g \int y \sqrt{1 + y'^2} dx \tag{12.4.25}$$

La forma funcional $y(x)$ dependerá de la cantidad de cuerda disponible entre los puntos de sujeción, esto es, dependerá del valor de la longitud total de la catenaria. Debemos por tanto resolver el problema variacional para U exigiendo la ligadura sobre su longitud

$$L \equiv \int ds = \int \sqrt{1 + y'^2} dx = \text{cte} \tag{12.4.26}$$

Aplicando entonces el método de los multiplicadores de Lagrange, definimos la función auxiliar

$$U^*(x, y) = U(x, y) + \lambda \cdot L \tag{12.4.27}$$

esto es,

$$U^*(x, y) = \int (\rho g y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} dx \tag{12.4.28}$$

Pasamos entonces a resolver el problema variacional. Ya que el integrando $f(y, y')$ de la integral U^* es independiente de x, podemos obtener una primera integral del problema en la forma

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = D \equiv \text{cte} \tag{12.4.29}$$

primera integral que se reduce a la forma

$$\frac{\rho g y + \lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = D \tag{12.4.30}$$

Resolviendo entonces esta ecuación para y' en función de y, e integrando de nuevo, obtenemos la solución en la forma

$$y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow \int dx = \int \frac{dy}{y'(y)} \tag{12.4.31}$$

esto es,

$$y(x) = -\frac{\lambda}{\rho g} + \frac{D}{\rho g} \cosh\left(\frac{\rho g x}{D} + F\right) \tag{12.4.32}$$

siendo F una segunda constante de integración (en este caso, la ecuación de Euler−Lagrange es una ecuación de segundo orden para $y(x)$). Dado que y' aparece únicamente como y'^2 en la función U^*, este resultado será válido únicamente para un signo determinado de y', en este caso, $y'(x) > 0$. Asumiendo el otro signo, la integración debe realizarse por separado. En cualquiera de los dos casos, las constantes indeterminadas D, F deben resolverse en función de los datos del problema: las dos condiciones aplicables en los extremos de la cuerda, $y(x_1) \equiv y_1$, $y(x_2) \equiv y_2$.

12.4.3. Condición frontera natural

En relación a este último cálculo es perfectamente posible considerar que uno de los valores frontera, por ejemplo $y(x_2)$, no esté determinado de antemano, es decir, pueda considerarse totalmente arbitrario. Desde el punto de vista variacional, se corresponde con la elección de las familias de trayectorias de forma que, según (12.1.17), obtengamos el resultado ya conocido

$$\cancel{\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\Big|_{x_1}^{x_2}}^{0} = 0 \tag{12.4.33}$$

que determina que el resultado del método variacional (la ecuación de Euler−Lagrange) es independiente de la función arbitraria $\eta(x)$. Cuando el valor frontera está fijo, esto es $y(x_1) = y_1$, debemos exigir que

$$\eta(x_1) \equiv 0 \tag{12.4.34}$$

mientras que si el valor en el otro punto frontera es arbitrario, dado que en este caso el valor de $\eta(x_2)$ no es idénticamente cero, necesitamos aplicar una condición adicional que anule la expresión anterior, en la forma

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_2} = 0 \tag{12.4.35}$$

Una condición de este tipo se denomina *condición frontera natural*, y debemos aplicarla cuando no tengamos información a priori sobre el valor de $y(x)$ en dicho valor frontera.

Elongación de un muelle bajo su propio peso Como un ejemplo con frontera natural, consideremos un muelle en posición vertical, y sujeto en su punto más alto, de forma que cuelga verticalmente por efecto de su peso. Al tener que soportar su peso el muelle se elongará localmente de forma que la fuerza elástica en cada punto equilibrará el peso de la porción restante situada por debajo. Analizamos el sistema en un estado de equilibrio estable.
Tomemos un elemento del muelle situado a una distancia x del punto de suspensión, medido cuando el muelle tiene su longitud natural, y sea dx su longitud en reposo. Sean $y(x)$ y dy los valores correspondientes al estado elongado del muelle. En este proceso de elongación la energía potencial elástica almacenada es

$$dU_e = \frac{\kappa}{2}(dy - dx)^2 \tag{12.4.36}$$

siendo κ la constante elástica del elemento diferencial, y por tanto función de dx.
Desde el punto de vista macroscópico, el material que forma el muelle tiene un determinado *módulo de elasticidad* E, que puede definirse como el cociente entre la fuerza ejercida y la tasa de desplazamiento producido. Por tanto, E tiene las mismas unidades que la fuerza, y su valor puede determinarse a partir de la condición de equilibrio natural del muelle. Si ℓ_0 es la longitud natural

y k la constante elástica del muelle en su conjunto, al ser la tasa de desplazamiento en su estado natural igual a la unidad, $\ell = \ell_0$, tenemos directamente

$$E = F = k\ell_0 \tag{12.4.37}$$

Si consideramos además que el módulo de elasticidad es constante a lo largo de todo el muelle (régimen lineal de elongación), se satisface para el elemento de longitud en reposo dx, con constante elástica κ

$$E = \kappa dx \to \kappa = \frac{k\ell_0}{dx} = \frac{E}{dx} \tag{12.4.38}$$

Utilizando esta definición de la constante elástica κ, la energía potencial elástica del muelle elongado resulta ser

$$U_e = \int dU_e = \frac{1}{2}\int \kappa \left(dy - dx\right)^2 = \frac{E}{2}\int_0^{\ell_0} \left(y' - 1\right)^2 dx \tag{12.4.39}$$

Por otro lado, la energía potencial gravitatoria tiene la expresión usual

$$U_g = -\int dmgy = -\rho_0 g \int_0^{\ell_0} ydx \tag{12.4.40}$$

siendo ρ_0 la densidad de masa del muelle en su estado natural. Obtenemos así la expresión de la energía potencial total del muelle en la forma

$$U = U_e + U_g = \int_0^{\ell_0} \left\{ \frac{E}{2}\left(y' - 1\right)^2 - \rho_0 gy \right\} dx \tag{12.4.41}$$

Nos queda establecer las condiciones frontera para $y(x)$ para poder aplicar el método variacional. Dado que el punto superior está fijo tenemos $y(0) = 0$ mientras que el valor $y(\ell_0)$ es completamente arbitrario (no está supeditado a ninguna condición adicional), por lo que aplicamos la condición frontera natural en $x = \ell_0$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=\ell_0} = 0 \tag{12.4.42}$$

siendo

$$F(y, y') = \frac{E}{2}\left(y' - 1\right)^2 - \rho_0 gy \tag{12.4.43}$$

con lo que esta condición frontera se reduce a

$$y'(\ell_0) = 1 \tag{12.4.44}$$

que corresponde físicamente al hecho de que el extremo inferior no soporta ningún peso y por tanto no está elongado (su energía potencial elástica es nula):

$$dU_e(\ell_0) = 0 \tag{12.4.45}$$

Aplicando finalmente la condición de extremo para la energía potencial total obtenemos la ecuación de Euler−Lagrange del sistema

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \Rightarrow Ey'' = -\rho g \tag{12.4.46}$$

con la solución, dadas las condiciones frontera,

$$y(x) = \left(1 + \frac{\rho g \ell_0}{E}\right) x - \frac{1}{2}\frac{\rho g}{E} x^2 \tag{12.4.47}$$

Una vez obtenida la solución podemos deducir cuál es la longitud ℓ del muelle elongado, al ser $y(\ell_0) = \ell$. Obtenemos el resultado

$$\ell = \ell_0 + \frac{1}{2}\frac{Mg}{k} \tag{12.4.48}$$

siendo M la masa total del muelle, dada por

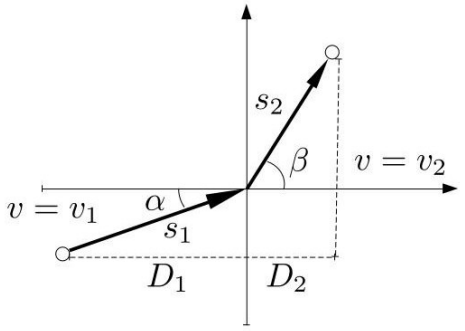
$$M = \int \rho dx = \rho \ell_0 \tag{12.4.49}$$

de forma que el incremento total de longitud $\frac{1}{2}\frac{Mg}{k}$ resulta ser la mitad del incremento que tendría el muelle si toda su masa estuviera concentrada en su extremo libre.

12.4.4. Principio de Jacobi de acción mínima

El Principio de Acción Mínima determina la geometría de la trayectoria de la partícula correspondiente al valor extremo del funcional *acción*. Dado que la acción de la partícula, como veremos, es matemáticamente análoga al camino óptico de la óptica geométrica (rayo de luz), este Principio es análogo al Principio de Fermat, que analizamos en primer lugar.

Principio de Fermat Analizamos el sistema de la figura, donde una partícula de luz viaja libremente con velocidad v_1 hacia el origen de coordenadas, donde sufre el efecto de una discontinuidad, que modifica bruscamente el valor de su velocidad al nuevo valor v_2. Y con este valor se desplaza libremente desde el origen de coordenadas.



Lo que nos interesa es determinar la modificación de la trayectoria (relación entre los ángulos α, β) aplicando el Principio de Fermat (el tiempo total transcurrido es mínimo). Por definición este tiempo total es

$$\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} \tag{12.4.50}$$

del que debe extraerse su valor mínimo considerando la condición adicional de que los puntos inicial y final están fijos. Según la geometría de la figura, tenemos

$$D_1 + D_2 = \text{cte} \quad , \quad D_1 \tan\alpha + D_2 \tan\beta = \text{cte} \tag{12.4.51}$$

la primera condición establece una distancia horizontal constante entre los dos puntos, y la segunda condición la constancia de la separación vertical. Con ello, el problema de extremo en función de los ángulos α, β se reduce al cálculo

$$\frac{D_1}{v_1 \cos\alpha} + \frac{D_2}{v_2 \cos\beta} = \min \quad , \quad D_1 \tan\alpha + D_2 \tan\beta = \text{cte} \tag{12.4.52}$$

Para obtener la trayectoria nos basta tomar las diferenciales de esta expresiones, la primera resultará nula por la condición de mínima, la segunda resultará nula por ser una constante. Obtenemos

$$\frac{D_1 \operatorname{sen}\alpha}{v_1 \cos^2\alpha} d\alpha + \frac{D_2 \operatorname{sen}\beta}{v_1 \cos^2\beta} d\beta = 0 \quad , \quad \frac{D_1}{\cos^2\alpha} d\alpha + \frac{D_2}{\cos^2\beta} d\beta = 0 \tag{12.4.53}$$

Substitiyendo la segunda ecuación en la primera obtenemos la solución al problema en la forma

$$\frac{D_1}{\cos^2\alpha} \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v_1} - \frac{\operatorname{sen}\beta}{v_2} \right) d\alpha = 0 \tag{12.4.54}$$

esto es, se satisface la relación de Snell para el cambio de trayectoria de la partícula por efecto de la discontinuidad

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{v_2} \tag{12.4.55}$$

Acción S El Principio de Fermat es útil para determinar la geometría de las partículas de luz (rayos de luz) considerando que el tiempo transcurrido debe ser mínimo. Pero este Principio no resulta aplicable a las partículas materiales (experimentalmente se comprueba que la desviación de la trayectoria tiene el sentido contrario al marcado por la ley de Snell), por lo que debemos definir la nueva cantidad, la *acción*, respecto a la cual, el cálculo de su extremo determina la trayectoria real de la partícula material. Experimentalmente queda demostrado que en el movimiento material no es el tiempo la variable que debe minimizarse sino la distancia s, o más exactamente, el producto de distancia y velocidad, $v \cdot s$. Para ello definimos la *acción* S como el producto de la masa m, velocidad v y desplazamiento s, y definimos el Principio de Acción Minima, que establece que la trayectoria real corresponde al valor mínimo de la acción total del sistema.
Aplicando este Principio al sistema material que se describiría por la figura anterior, tenemos

$$S = mv_1 s_1 + mv_2 s_2 \tag{12.4.56}$$

Con ello, el problema de extremo en función de los ángulos α, β se reduce al cálculo

$$\frac{D_1 v_1}{\cos\alpha} + \frac{D_2 v_2}{\cos\beta} = \min \quad , \quad D_1 \tan\alpha + D_2 \tan\beta = \text{cte} \tag{12.4.57}$$

Para obtener la trayectoria de nuevo nos basta tomar las diferenciales de esta expresiones, y realizar los mismos pasos anteriores. Obtenemos así la solución al problema mecánico en la forma

$$\frac{D_1}{\cos^2\alpha}\left(v_1 \operatorname{sen}\alpha - v_2 \operatorname{sen}\beta\right) d\alpha = 0 \tag{12.4.58}$$

esto es, la relación mecánica que determina el cambio de trayectoria de la partícula por efecto de la discontinuidad es

$$v_1 \operatorname{sen}\alpha = v_2 \operatorname{sen}\beta \tag{12.4.59}$$

ó

$$mv_1 \operatorname{sen}\alpha = mv_2 \operatorname{sen}\beta \tag{12.4.60}$$

que no es más que la condición de conservación de la componente del momento $p = mv$ a lo largo de la superficie de discontinuidad. Y en este caso, respecto a la componente normal del momento, tenemos la variación

$$\Delta p \equiv mv_1 \cos\alpha - mv_2 \cos\beta \equiv I \tag{12.4.61}$$

que es igual al impulso I que recibe la partícula material al cruzar la discontinuidad, por la presencia de una fuerza de tipo Newtoniana F tal que

$$I = F \cdot \Delta t \tag{12.4.62}$$

siendo Δt el tiempo que tarda la partícula material en atravesar la zona de discontinuidad.

Principio de Jacobi El Principio de Jacobi extiende el resultado anterior al movimiento de partículas en presencia de un potencial conservativo $U(x)$ dependiente de las coordenadas. En este caso, la velocidad de la partícula no es constante, y se obtiene aplicando de la conservación de la energía

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)} \tag{12.4.63}$$

de forma que la acción de la partícula en su trayectoria arbitraria está dada por la integral

$$S = \int mv(x)ds(x) = \int \sqrt{2m\left(E - U(x)\right)}\, ds(x) \tag{12.4.64}$$

siendo $ds(x)$ el elemento de longitud de la trayectoria en la posición x. Por ejemplo, en el caso de que la trayectoria quede descrita por una curva paramétrica arbitraria, definida en términos de una única variable, digamos x, tenemos

$$U(x) \equiv U(x, y(x), z(x)) \quad , \quad ds(x) = \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}\, dx \tag{12.4.65}$$

En cualquier caso, la función acción S pasa a ser, por el Principio de Jacobi, un funcional $S[x]$ de la trayectoria $(x, y(x), z(x))$ seguida por la partícula, y para obtener la trayectoria real $(x, y^*(x), z^*(x))$ debemos aplicar el cálculo de variaciones. Destacamos que el Principio de Jacobi sólo se puede utilizar cuando podemos obtener la velocidad en función de la posición de forma previa al cálculo del extremo, en este caso si existe una conservación de la energía, y que dicho Principio establece únicamente la geometría de la trayectoria, no su dinámica, esto es, no permite obtener la ley de movimiento $(x(t), y(x(t)), z(x(t))$.

Principio de Jacobi para sistemas unidimensionales No obstante, existe una excepción para los sistemas unidimensionales, dado que sus trayectorias geométricas coindicen con las trayectorias recorridas en el tiempo, esto es, el único parámetro definido para la trayectoria del sistema es el tiempo t. Como ejemplo analizamos el movimiento horizontal de una masa puntual m ligada a un muelle de constante k. Tenemos por un lado, de la conservación de la energía

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow v^2(x) = \frac{2E - kx^2}{m} \tag{12.4.66}$$

la dependencia de la velocidad con la coordenada x. Y por otro lado, el Principio de Jacobi en función del parámetro de la curva $x(t)$, con $dx = vdt$

$$S = \int mv(x)dx = m \int v^2(x(t))dt \tag{12.4.67}$$

Aplicando entonces el cálculo variacional, obtenemos la ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v^2}{\partial v}\right) = \frac{\partial v^2}{\partial x} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x \tag{12.4.68}$$

y obtenemos la ley de movimiento del oscilador correspondiente

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{12.4.69}$$

Cálculo de geodésicas Las *geodésicas* son las trayectorias de las partículas libres en el espacio considerado. Como ejemplos, en el espacio euclídeo, que es un espacio plano, las geodésicas son trayectorias rectilíneas, mientras que sobre la superficie de una esfera de radio R (espacio con curvatura) las geodésicas son trayectorias circulares del mismo radio R.
Para obtener las geodésicas de la partícula libre en el espacio dado podemos aplicar el Principio de Jacobi, ya que el resultado que obtenemos es directo. En la región del espacio donde la partícula es libre, su potencial U por definición es una constante, de forma que la velocidad, por la conservación de la energía, tiene valor constante. Con ello el funcional acción toma la expresión

$$S = \int mv(x)ds(x) = mv \int ds(x) = \min \tag{12.4.70}$$

Por tanto la trayectoria que hace mínima la acción es la misma trayectoria que hace mínima la longitud de arco recorrida entre los puntos inicial y final (geodésica).

Como ejemplo práctico, determinamos la geodésica sobre la superficie de un cilindro. Eligiendo por comodidad las coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) sobre el cilindro de radio R, la trayectoria

parametrizada γ, tomando ϕ como parámetro, puede definirse en la forma $\gamma \equiv (R, \phi, z(\phi))$, y tiene el elemento de arco

$$ds(\phi) = \sqrt{R^2 d\phi^2 + dz^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2}\, d\phi \tag{12.4.71}$$

de forma que el funcional acción sobre la trayectoria γ queda expresado como

$$S[\gamma] = mv \int \sqrt{R^2 + z'^2}\, d\phi = \min \tag{12.4.72}$$

Dado que existe una única variable dependientee $z(\phi)$ el cálculo del extremo da lugar a la ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = \frac{\partial F}{\partial z} \Rightarrow \frac{d}{d\phi}\left(\frac{z'}{R^2 + z'^2}\right) = 0 \tag{12.4.73}$$

Dado que F no depende de z, de la segunda ecuación podemos extraer la integral primera

$$\frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}} = C \equiv \text{cte} \tag{12.4.74}$$

de cuya integración obtenemos

$$z' = D \equiv \text{cte} \quad , \quad z(\phi) = D\phi \tag{12.4.75}$$

y la trayectoria real de la partícula (geodésica) resulta ser la hélice a lo largo de la superficie del cilindro

$$(r^*, \phi^*, z^*) \equiv \gamma^* = (R, \phi, D\phi) \tag{12.4.76}$$

12.4.5. Sistemas disipativos

Dado que el Principio de Jacobi se aplica a los sistemas conservativos (aquellos en los que puede definirse un potencial del que derivan las fuerzas del sistema), quedan fuera de su rango de aplicación los sistemas disipativos. Estos sistemas, por la presencia de una fuerza disipativa (derivada de la fricción, viscosidad, etc), no conservan la energía.

Dada la relevancia del Principio de Jacobi y la sencillez de su uso, resulta de interés estudiar qué modificaciones serían necesarias para que fuera aplicable también a los sistemas disipativos.

Existe una primera dificultad de muy difícil resolución en la práctica. A diferencia de los sistemas conservativos, los sistemas disipativos no son sistemas aislados que puedan estudiarse de forma independiente al medio que les rodea. En un sistema disipativo es la interacción con el medio ambiente (medio exterior) la que produce la modificación de la energía del sistema. Teniendo en cuenta esto, podremos analizar el sistema completo (sistema + medio) con el Principio de Jacobi, si definimos previamente la energía total en la forma

$$E = E_s + E_m + E_d \tag{12.4.77}$$

siendo E_s la energía del sistema disipativo, que tendrá la expresión habitual $E_s = T + V$, siendo T la energía cinética y la V la energía potencial, E_m es la energía del medio que lo rodea y con el que interacciona, y E_d la energía transferida del sistema al medio, esto es, la energía disipada.

Por simplicidad podemos suponer que el sistema disipativo es mucho menor en extensión que el medio exterior, en el sentido que la interacción entre ellos no modifica substancialmente el medio exterior, aunque sí modifica el sistema. De esta forma E_m es una constante en el problema.

Una vez analizado este punto, el siguiente paso es la modificación del Principio de Jacobi para describir la trayectoria del sistema completo con energía constante $E = T + U + E_d$. A pesar de esta expresión conjunta la naturaleza de $T + U$ y E_d es totalmente diferente. La energía mecánica $T + U$, aunque sea variable, es una característica instantánea del sistema, definida por su velocidad y posición. Y su variación dependerá de la variación de la velocidad y posición del sistema a medida que evoluciona. Por otro lado, E_d no determina la energía disipada en el momento

de tiempo dado, sino la energía disipada *hasta* el momento de tiempo dado. Es decir, E_d es una cantidad que no depende sólo de los valores locales, sino que depende de toda la trayectoria pasada desde el inicio del movimiento. Desde el punto de vista puramente mecánico, esta disipación puede provenir de la acción continuada de una fuerza disipativa F_d, ésta sí, con la dependencia local $F_d(t) = F_d(t, x(t), v(t))$, a lo largo de la trayectoria. Esta relación queda expresada en la forma integral del trabajo disipado

$$E_d[x(t)] \equiv -\int_{x_0}^{x(t)} F_d(\tau, x(\tau), v(\tau))dx(\tau) \quad , \quad \tau \in [0, t) \tag{12.4.78}$$

Esto es, la energía disipada es un funcional de la trayectoria del sistema, y a partir de esta definición, podemos deducir la fuerza de fricción instantánea

$$F_d(t) \equiv F_d(t, x(t), v(t)) = -\frac{dE[x(t)]}{dx(t)} \tag{12.4.79}$$

Sistema disipativo de masa puntual ligada a muelle Como verificación de este método, analizamos el movimiento horizontal de una masa puntual ligada a un muelle, y en presencia de una fuerza de fricción F_d no nula. Hemos visto anteriormente que para $F_d = 0$ la ley de movimiento, deducida del Principio de Jacobi, se lee

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{12.4.80}$$

Teniendo en cuenta que para $F_d \neq 0$ la ley Newtoniana de movimiento se escribe

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_d(t) \tag{12.4.81}$$

recordando que en la teoría Newtoniana la fuerza ejerce una acción instantánea. Comparando ambas ecuaciones podemos deducir que el Principio modificado debe tener la estructura

$$S[x(t)] \equiv \int mv(x(t))dx(t) + E_d[x(t)] = \int mv^2(x(t))dt + E_d[x(t)] = \min \tag{12.4.82}$$

dado que en este caso la ecuación de Euler−Lagrange da lugar a la expresión correcta ya que se satisface

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{\partial v^2}{\partial v}\right) - \frac{m\partial v^2}{\partial x} + \frac{dE_d[x]}{dx} = 0 \Rightarrow m\ddot{x}(t) + kx(t) - F_d(t) = 0 \tag{12.4.83}$$

Con este ejemplo sencillo vemos que es posible la descripción variacional de los sistemas disipativos, aunque con mayor complejidad, ya que la modificación del Principio de Jacobi suele implicar la introducción de cantidades no locales que describen la interacción responsable de la disipación de energía del sistema hacia su medio ambiente. En todo caso, las modificaciones son puramente fenomenológicas en el sentido de que se buscan métodos variacionales con los que se reproduzcan los resultados conocidos, y dejando como cuestión secundaria su contenido físico.

12.5. Ejercicios resueltos

12.5.1. Curva braquistocrona

Un alambre forma una curva suave en el plano (x, y) conectando un punto inicial $(0, 0)$ con un punto final (a, b), situado por debajo del primero. A lo largo del alambre desliza sin rozamiento, por efecto de la gravedad, una masa puntual insertada. Considere que durante el deslizamiento se conserva la energía mecánica, y tome el eje y en dirección vertical hacia abajo.

(1) Demuestre que el tiempo que transcurre para que la masa realice su trayectoria desde el punto inicial en reposo al punto final está dado por

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y'}} dx \tag{12.5.1}$$

(2) Dado que el integrando en la expresión anterior no depende de x, demuestre que la trayectoria de la partícula, determinada por la función parametrizada $y(x)$ que corresponde al valor extremo del tiempo T, satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c - y}{y}} \tag{12.5.2}$$

donde c es una constante. Demuestre que la solución a esta ecuación diferencial puede darse en la forma paramétrica

$$x = \frac{c}{2}(\tau - \operatorname{sen}\tau) \quad , \quad y = c \operatorname{sen}^2\left(\frac{\tau}{2}\right) \tag{12.5.3}$$

indicando cuál debe ser el rango de valores del parámetro τ.

Esta solución describe lo que se conoce como *cicloide*, que en el contexto presente se denomina *curva braquistocrona*, la curva para la cual el tiempo transcurrido entre dos puntos es mínimo.

(1) Como indica el enunciado la energía mecánica de la masa se conserva, esto es,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgy \tag{12.5.4}$$

donde recordamos que la coordenada y se define en la dirección de la gravedad g. De aquí podemos despejar la velocidad de la masa a lo largo del alambre

$$v = \sqrt{\frac{2(E + mgy)}{m}} \tag{12.5.5}$$

Podemos obtener el valor de la energía E, aplicando la condición de partida en reposo en la posición inicial $y = 0$, y de esta forma obtenemos el valor $E = 0$, y la expresión de la velocidad en la forma

$$v = \sqrt{2gy} \tag{12.5.6}$$

Esta velocidad es tangente a la curva formada por el alambre, y su módulo satisface

$$v = \frac{ds(x)}{dt} \quad , \quad ds(x) = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}dx \tag{12.5.7}$$

siendo $ds(x)$ el elemento de arco a lo largo de la curva en la posición $(x, y(x))$.
Aplicando estas definiciones el tiempo transcurrido a lo largo de la trayectoria está dado por la

expresión integral

$$T = \int_0^T dt = \int \frac{ds(x)}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx \tag{12.5.8}$$

(2) Exigiendo la condición de valor mínimo de T

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx = \min \tag{12.5.9}$$

el cálculo del extremo determina la ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} \quad , \quad F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} \tag{12.5.10}$$

Además, dado que F no depende explícitamente de x, tenemos la integral primera

$$F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' = C \equiv \text{cte} \tag{12.5.11}$$

que da lugar a la ecuación diferencial de primer orden para $y(x)$

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{(1+y'^2)\, y}} = C \Rightarrow \frac{1}{C^2} = y\left(1+y'^2\right) \tag{12.5.12}$$

Despejando y' obtenemos la ecuación solicitada

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c-y}{y}} \quad , \quad c = \frac{1}{C^2} \equiv \text{cte} \tag{12.5.13}$$

Comprobamos la solución paramétrica ofrecida por el enunciado. Obtenemos en primer lugar la dependencia en τ

$$y = c\,\text{sen}^2\left(\frac{\tau}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{\frac{c-y}{y}} = \sqrt{\frac{\cos^2\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{\tau}{2}\right)}} = \cot\left(\frac{\tau}{2}\right) \tag{12.5.14}$$

$$y = c\,\text{sen}^2\left(\frac{\tau}{2}\right) \Rightarrow dy = c\,\text{sen}\left(\frac{\tau}{2}\right)\cos\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau \tag{12.5.15}$$

y con ello a partir de la ecuación diferencial para y en la forma

$$\sqrt{\frac{c-y}{y}} = \frac{dy}{dx} \equiv \frac{dy}{d\tau}\frac{1}{dx/d\tau} \tag{12.5.16}$$

deducimos la ecuación diferencial para $x(\tau)$,

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau}\sqrt{\frac{y}{c-y}} = c\,\text{sen}^2\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{2}c\,(1-\cos\tau) \tag{12.5.17}$$

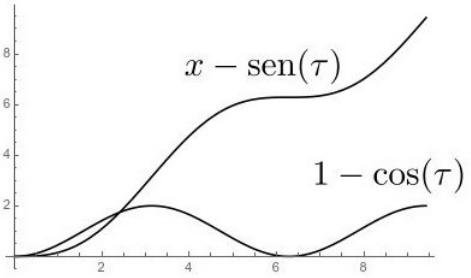
con la integral directa

$$x(\tau) = \frac{1}{2}c\,(\tau - \text{sen}\,\tau) \tag{12.5.18}$$

Comprobamos finalmente el rango de valores del parámetro τ. Para el punto inicial $(0,0)$ tenemos $\tau = 0$, y para el punto final (a,b) se satisface simultáneamente

$$a = x(\tau) = \frac{c}{2}\,(\tau - \text{sen}\,\tau) \quad , \quad b = y(\tau) = \frac{c}{2}\,(1-\cos\tau) \tag{12.5.19}$$

que tiene una única solución que debe obtenerse numéricamente, más la solución $\tau = 0$ en el origen $x = 0, y = 0$, como muestra la figura siguiente



12.5.2. Superficie mínima

Cuando una curva contenida en el plano xy, parametrizada por la función $y(x)$, con sus extremos en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), se rota alrededor del eje y se genera una *superficie de revolución* cuya área está determinada por la expresión integral [a]

$$A = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx \tag{12.5.20}$$

Demuestre que la curva $y(x)$ entre los extremos dados que genera la superficie de revolución con área mínima está dada por la expresión

$$y(x) = C_1 \cosh^{-1}\left(\frac{x}{C_1}\right) + C_2 \tag{12.5.21}$$

donde las constantes C_1 y C_2 quedan determinadas en términos de los valores de los extremos de la curva.

[a] Mathematica-SurfaceofRevolution

Aplicando el cálculo variacional para calcular el valor extremo

$$A = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = \min \tag{12.5.22}$$

derivamos la ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} \quad , \quad F = 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} \tag{12.5.23}$$

Dado que la función F no depende explícitamente de la variable dependiente y, tenemos la integral primera

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = C \equiv \text{cte} \tag{12.5.24}$$

con la expresión

$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 \equiv \frac{C}{2\pi} \tag{12.5.25}$$

Despejando la función $y'(x)$ e integrando el resultado, obtenemos la solucion al problema en la forma

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y = \int y'(x)dx + C_2 \tag{12.5.26}$$

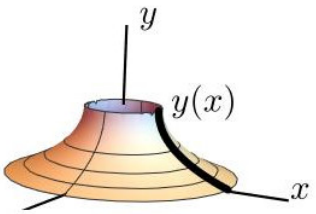
y al ser

$$y'(x) = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 - C_1^2}} \tag{12.5.27}$$

tenemos directamente el resultado pedido

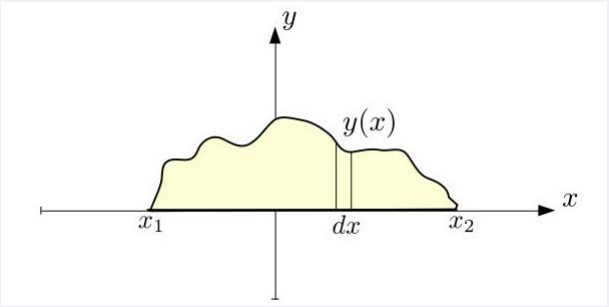
$$y(x) = \int \frac{C_1}{\sqrt{x^2 - C_1^2}} dx + C_2 = C_1 \cosh^{-1}\left(\frac{x}{D}\right) + C_2 \tag{12.5.28}$$

descrito gráficamente en la figura siguiente



12.5.3. Área de figura plana

Sea área plana de la figura, contenida en el plano xy, y limitada por el eje $y = 0$ y la curva $y(x) > 0$ con dos puntos de corte sobre el eje $y = 0$, en los puntos x_1 y x_2.



La longitud de la curva está dada por la expresión integral de su longitud de arco

$$\ell = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx \tag{12.5.29}$$

(1) Demuestre que para un valor fijo de ℓ, la curva $y(x)$ que maximiza el área encerrada por la figura, esto es,

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx = \max \tag{12.5.30}$$

resulta ser un arco de círcunferencia. Determine para ello el valor de su radio y de su cuerda $x_2 - x_1$.

(2) Demuestre que la relación existente entre la longitud ℓ de la curva $y(x)$, el multiplicador de Lagrange λ y la cuerda $x_2 - x_1$ está definida por la fórmula

$$\frac{x_2 - x_1}{2\lambda} = \operatorname{sen} \frac{\ell}{2\lambda} \tag{12.5.31}$$

de forma que se satisface la cota $\frac{x_2 - x_1}{2} \leq \lambda$, y donde $0 \leq \frac{\ell}{2\lambda} \leq \frac{\pi}{2}$.

(3) Determine la forma funcional $A_{\max}(\lambda, \ell)$ del área máxima de la figura plana en función del multiplicador λ y de la longitud ℓ de la curva. A partir de esta expresión, obtenga el valor máximo del área máxima.

(1) Dado que el cálculo variacional debe realizarse asumiendo la ligadura $\ell = \text{cte}$, debemos introducir el término adicional

$$A + \lambda \cdot \ell = \max \tag{12.5.32}$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange. En forma integral la condición de extremo se lee

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(y(x) + \lambda \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)} \right) dx = \max \tag{12.5.33}$$

El cálculo variacional da lugar a la ecuación de Euler−Lagrange para la función $y(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} \quad , \quad F = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2} \tag{12.5.34}$$

con la expresión

$$\lambda \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 1 \tag{12.5.35}$$

que podemos integrar directamente para obtener el valor de la función $y'(x)$ en la forma

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{x}{\lambda} + C \Rightarrow y'(x) = -\frac{B(x)}{\sqrt{1 - B(x)^2}} \quad , \quad B(x) \equiv \frac{x}{\lambda} + C \tag{12.5.36}$$

Y a partir de la definición de y', integrar el resultado para obtener $y(x)$ en la forma

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y = \int y'(x)dx + C_1 \tag{12.5.37}$$

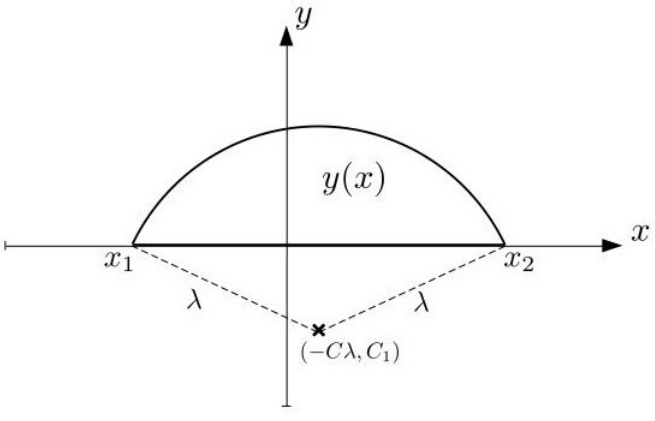
con el resultado final, por integración directa

$$y(x) = -\int \frac{B(x)}{\sqrt{1 - B(x)^2}} dx = \lambda\sqrt{1 - B(x)^2} + C_1 \tag{12.5.38}$$

que podemos escribir en la forma

$$(y - C_1)^2 + (x + C\lambda)^2 = \lambda^2 \tag{12.5.39}$$

ecuación de la circunferencia de radio λ y centro $(-C\lambda, C_1)$, como muestra la figura



Los dos puntos de corte de la circunferencia con el eje $y = 0$ están dados por los valores

$$y = 0 \Rightarrow x_{1,2} + C\lambda = \pm\sqrt{\lambda^2 - C_1^2} \tag{12.5.40}$$

de forma que la cuerda tiene el valor

$$x_2 - x_1 = 2\sqrt{\lambda^2 - C_1^2} \tag{12.5.41}$$

(2) De la solución obtenida para $y(x)$, deducimos que

$$\sqrt{1-y'^2} = \frac{y'(x)}{B(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-B(x)^2}} \tag{12.5.42}$$

de cuya integración en x obtenemos la relación pedida

$$\ell = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1-y'^2}\, dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{1-B(x)^2}} dx \tag{12.5.43}$$

Esto es, mediante una integración directa

$$\ell = \lambda \,\text{arcsen} B(x)\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{12.5.44}$$

Aplicando ahora las condiciones en los extremos

$$B(x_{1,2}) = \frac{x_{1,2} + C\lambda}{\lambda} = \pm\frac{\sqrt{\lambda^2 - C_1^2}}{\lambda} \tag{12.5.45}$$

vemos que

$$\text{arcsen} B(x_1) = -\text{arcsen} B(x_2) \tag{12.5.46}$$

de forma la relación anterior toma la forma

$$\ell = 2\lambda \,\text{arcsen} B(x_2) \Rightarrow \text{sen}\,\frac{\ell}{2\lambda} = B(x_2) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - C_1^2}}{\lambda} \tag{12.5.47}$$

que finalmente en función de la cuerda $x_2 - x_1 = 2\sqrt{\lambda^2 - C_1^2}$, toma la expresión indicada en el enunciado

$$\text{sen}\,\frac{\ell}{2\lambda} = \frac{x_2 - x_1}{2\lambda} \tag{12.5.48}$$

Finalmente verificamos las cotas para $x_2 - x_1$ y para ℓ. Por su definición,

$$x_2 - x_1 = 2\sqrt{\lambda^2 - C_1^2} \leq 2\lambda \Rightarrow 0 \leq \frac{x_2 - x_1}{2\lambda} \leq 1 \tag{12.5.49}$$

Dado que ℓ es la longitud de la circunferencia de radio λ, tenemos la cota geométrica

$$\ell \leq \pi\lambda \Rightarrow 0 \leq \frac{\ell}{2\lambda} \leq \frac{\pi}{2} \tag{12.5.50}$$

Aquí hemos tenido en cuenta que la curva de la circunferencia por encima del eje $y = 0$ debe ser univaluada (la curva consiste únicamente en un tramo o la totalidad de la mitad superior de la circunferencia) y por tanto la longitud máxima de la circunferencia está limitada por el valor $\pi\lambda$.

(3) El área máxima corresponde a la figura formada por el tramo de circunferencia y el eje $y = 0$. Para obtener su valor basta introducir en su definición

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx \tag{12.5.51}$$

la curva $y(x)$ correspondiente a dicho tramo de circunferencia, y que está dada por la ecuación

$$y(x) = C_1 + \lambda\sqrt{1 - B(x)^2} \tag{12.5.52}$$

Integrando por tanto en x entre los extremos de la cuerda, el resultado es

$$A_{\max}(\lambda, \ell) = \int_{x_1}^{x_2} \left(C_1 + \lambda\sqrt{1 - B(x)^2}\right) dx \tag{12.5.53}$$

$$= C_1(x_2 - x_1) + \frac{\lambda^2}{2}\left(B(x)\sqrt{1 - B(x)^2} + \text{arcsen}\, B(x)\right)\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{12.5.54}$$

Introduciendo los valores obtenidos anteriormente, llegamos al resultado

$$A_{\max}(\lambda,\ell) = \frac{\lambda}{2}\left(\ell + \lambda \operatorname{sen}\frac{2\ell}{\lambda}\right) \tag{12.5.55}$$

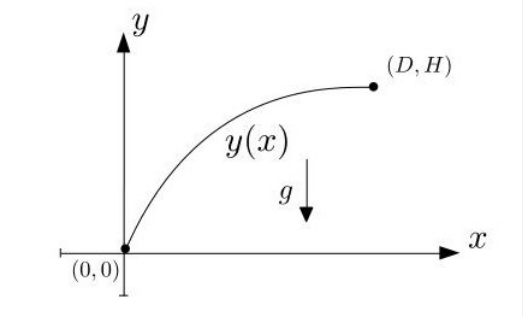
Fijado el valor del radio (multiplicador λ), y definiendo la variable $X \equiv \frac{\ell}{\lambda}$, vemos que la función $A_{\max}(X)$ tiene un máximo local en el intervalo $[0,\pi)$ pero alcanza su máximo global en el extremo del intervalo, $X = \pi$, con el valor esperado

$$A_{\max}\Big|_{X=\pi} = \frac{\lambda^2}{2}\pi \tag{12.5.56}$$

que corresponde a la curva formada por la semicircunferencia de radio λ.

12.5.4. Trayectoria de un proyectil

Utilice el Principio de Jacobi para determinar geométricamente la trayectoria de un proyectil en el plano (x, y) de la figura, en presencia de la gravedad, y que une los puntos inicial $(0, 0)$ y final (D, H), tal que la trayectoria tiene tangente horizontal en $x = D$, esto es, $y'(D) = 0$. Físicamente corresponde a un punto final de altura máxima, $y = H$.



Aplicamos el Principio de Jacobi según la expresión

$$S = \int mv(x, y(x))ds(x) \quad , \quad ds(x) = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{12.5.57}$$

siendo v la velocidad, dada por la conservación de la energía

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U \quad , \quad v(x) = \sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}} \tag{12.5.58}$$

Definimos la energía potencial gravitatoria en la forma

$$U(x) \equiv U(y(x)) = mgy(x) \tag{12.5.59}$$

Con esto, el Principio tiene la expresión

$$S[y(x)] = \sqrt{2m}\int_{x=0}^{x=D} \sqrt{E - mgy(x)}\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = \min \tag{12.5.60}$$

donde hemos elegido x como el parámetro de la trayectoria $y(x)$. Aplicando la condición de extremo, obtenemos la ecuación de Euler−Lagrange para la función $y(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} \quad , \quad F = \sqrt{E - mgy}\sqrt{1 + y'^2} \tag{12.5.61}$$

Ya que la función F no depende explícitamente de x, tenemos la integral primera, según hemos visto en la sección 12.2.2,

$$F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' = C \equiv \text{cte} \Rightarrow \sqrt{\frac{E - mgy}{1 + y'^2}} = C \tag{12.5.62}$$

ó

$$\sqrt{\frac{E - mgy}{1 + y'^2}} = \sqrt{E - mgH} \tag{12.5.63}$$

donde el valor de la constante C resulta de la aplicación de la condición frontera en el punto final: $y' = 0$ cuando $x = D$ e $y = H$. Esta ecuación diferencial de primer orden para $y(x)$ puede resolverse de forma directa por cuadraturas despejando el valor funcional de y'

$$\frac{dy}{dx} = y' = \sqrt{\frac{E - mgy}{E - mgH} - 1} = \sqrt{\frac{mg(H - y)}{E - mgH}} \tag{12.5.64}$$

ó

$$\int_0^H \frac{dy}{\sqrt{H - y}} = \sqrt{\frac{mg}{E - mgH}} \int_0^D dx \tag{12.5.65}$$

que da por integración la ecuación geométrica de la parábola (trayectoria del proyectil)

$$y(x) = 2\frac{H}{D} x \left(1 - \frac{x}{2D}\right) \tag{12.5.66}$$

12.6. Ejercicios de Autoevaluación

12.6.1. Ecuación de Euler−Lagrange

Resolviendo la ecuación de Euler−Lagrange correspondiente, obtenga la función $y(x)$ que cumple las condiciones frontera $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, para la cual la integral $\int_0^1 \left(y'^2 + yy' + y^2\right) dx$ tiene un valor estacionario.

Sol: $y(x) = \frac{\text{senh}(x)}{\text{senh}(1)}$

12.6.2. Método variacional frente a método directo

(a) Obtenga la función $y^*(x)$ que conecta los puntos $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$, para la cual la integral

$$I[y(x)] = \int_0^1 \left(y'^2(x) - \frac{\pi^2 y^2(x)}{4} \right) dx \tag{12.6.1}$$

tiene un valor estacionario. Resuelva para ello la ecuación de Euler−Lagrange correspondiente.

(b) Determine una integral primera del sistema, y a partir de ella, determine de nuevo la solución al problema de extremo, y verifique que se obtiene la misma función que en el apartado (a).

(c) Utilice como función prueba la función parametrizada

$$y(x; a) = (1 - a)\, x + a x^2 \tag{12.6.2}$$

siendo a el parámetro. Obtenga el valor de la integral $I[y(x; a)]$ y determine su valor estacionario, correspondiente al valor del parámetro a^*.

(d) Obtenga el error cuadrático medio E de la aproximación paramétrica $y(x; a^*)$ frente al valor real $y^*(x)$, definido por

$$E^2 \equiv \frac{\int_0^1 \left(y^*(x) - y(x; a^*) \right)^2 dx}{\int_0^1 y^{*\,2}(x) dx} \tag{12.6.3}$$

Sol:
(a) $y^*(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
(b) $y^*(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
(c) $a^* = -\frac{5\pi^2}{2(40-\pi^2)}$
(d) $E = 0{,}02$ $(2\,\%)$

12.6.3. Catenaria simétrica

Aplicando la descripción de la catenaria vista en la sección 12.4.2, se plantea el siguiente problema.
Una catenaria de longitud ℓ se cuelga desde dos sujeciones colocadas simétricamente en las posiciones $(-k, h)$ y (k, h) de forma que la curva tiene tangente horizontal en su punto central, esto es, $y'(0) = 0$.

(a) Obtenga la ecuación $y^*(x, \lambda)$ para esta disposición simétrica de la catenaria realizano el cálculo de extremo para la energía potencial gravitatoria con la condición de ligadura $\ell = \text{cte}$. Utilice la condición de simetría para eliminar las constantes de integración en su resultado.

(b) Establezca la relación existente entre el multiplicador de Lagrange λ, la longitud ℓ de la catenaria y la altura inicial h.

Sol:
(a) $y^*(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{\rho g}\right) \left(\cosh\left(\frac{\rho g x}{\ell}\right) - 1\right)$
(b) $h^2 + \frac{2h\lambda}{\rho g} = \frac{\ell^2}{4}$

12.7. Referencias

- D. Lemons, *Perfect Form. Variational principles, Methods, and Applications in elementary physics*
- C. Lanczos, *The variational principles of mechanics*
- V. Berdichevsky, *Variational principles of continuum mechanics. Fundamentals*
- D. Cline, *Variational principles in classical mechanics*
- H. Rund, *The Hamilton−Jacobi theory in the calculus of variations*

Capítulo 13

Simetrías y ecuaciones diferenciales ordinarias

13.1. Introducción

En este capítulo nos dedicamos a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), desde un punto de vista puramente matemático, e independientemente de la naturaleza física del problema que da lugar a dicha ecuación.
Desde este punto de vista matemático, el objetivo siempre es encontrar la solución de forma analítica, bien por via directa o mediante la aplicación de una transformación que la simplifique a una forma resoluble (por ejemplo, cualquier método de linealización). Consideremos por ejemplo la siguiente EDO de orden dos

$$y'' = (x-y)y'^3 \quad , \quad y' \equiv \frac{dy}{dx} \; , \; y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{13.1.1}$$

El procedimiento de resolución usual es aplicar una transformación que de lugar a una nueva ecuación diferencial ordinaria para una nueva función que pertenezca a un conjunto (pe, las EDO lineales) cuyas soluciones sean bien conocidas. Otra opción es consultar directamente las EDO con solución integral publicadas en la literatura, que coincidan con la EDO de partida, o en su defecto puedan obtenerse a partir de una transformación conocida. O en último caso, tratar con métodos *adhoc* si se conocen posibles formas funcionales de la solución buscada. Cuando todo falla, no queda otra solución que recurrir a la integración numérica de la EDO para obtener una solución aproximada, y quedarse con la sensación de no haber sido capaz de localizar, por falta de información o de conocimiento, la solución buscada por estas vias ordinarias.
En realidad, en la mayoria de los casos en los que sí existe una solución exacta o analítica a la EDO planteada, ésta se puede obtener apelando a las propiedades de simetría subyacentes de la ecuación. De aquí en adelante, tratamos con el método de Lie para encontrar dichas simetrías y a partir de ellas obtener la solución de la EDO.

13.2. Transformaciones puntuales de Lie y sus generadores

13.2.1. Transformaciones puntuales

Nuestro objetivo se centra, por tanto, en analizar las simetrías de una ecuación diferencial para obtener su solución. Como punto de partida debemos establecer qué se entiende por simetría, y para ello introducimos los conceptos de transformaciones puntuales y sus generadores.
Una *transformación puntual* es una transformación de la variable dependiente e independiente de la forma

$$\bar{x} = \bar{x}(x,y) \quad , \quad \bar{y} = \bar{y}(x,y) \tag{13.2.1}$$

siendo $(\bar{x},\bar{y})$ funciones continuas con inversas continuas (homeomorfismos) que aplican los puntos (x,y) en los puntos $(\bar{x},\bar{y})$, y de ahí su nombre.

Transformaciones continuas En el contexto específico de las simetrías *continuas*, las transformaciones puntuales que las representan deben tener las propiedades adicionales:

- Dependencia de la transformación en al menos un parámetro ε

$$\bar{x} = \bar{x}(x, y; \varepsilon) \quad , \quad \bar{y} = \bar{y}(x, y; \varepsilon) \tag{13.2.2}$$

  con valores continuos. Por ejemplo, la simetría bajo la rotación respecto a un eje, digamos z, permite sumar al ángulo φ del sistema cualquier cantidad arbitraria ε, de forma que φ y $\varphi + \varepsilon$ representan el mismo estado físico.

- Contiene la transformación identidad para $\varepsilon = 0$, esto es, se cumple

$$\bar{x}(x, y; 0) = x \quad , \quad \bar{y}(x, y; 0) = y \tag{13.2.3}$$

- Las transformaciones son invertibles, esto es, la transformación inversa $(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (x, y)$ también es función continua en el parámetro ε.

Estas propiedades determinan que las transformaciones de simetría continua tengan la estructura de *grupo de Lie* uniparamétrico: la transformación depende de forma continua de un parámetro, el producto de dos transformaciones de simetría también es una transformación de simetría, existe elemento inverso, y existe elemento identidad.

Transformaciones discretas Existen otro tipo de simetrías, las simetrías *discretas*, que no dependen de ningún parámetro, como por ejemplo la simetría bajo la inversión espacial

$$x \rightarrow -x \quad , \quad y \rightarrow y \tag{13.2.4}$$

En general, las simetrías discretas son mucho más difíciles de detectar en relación a las simetrías continuas. La diferencia clave reside en que las transformaciones continuas permiten reducir el análisis a un entorno de la transformación identidad ($\varepsilon = 0$), entorno en el que son válidas las aproximaciones lineales de las ecuaciones. Para las simetrías discretas aplicando una adecuada función prueba (*ansatz*) podemos obtener un conjunto de ellas, pero no tenemos garantizado obtener *todas* las simetrías discretas de la EDO. Incluso pueden existir casos con simetrías discretas *ocultas*, cuando la simetría sólo se cumple para la solución general de la EDO, pero queda oculta para los casos particulares, por ejemplo al aplicar determinadas condiciones frontera que acotarán el tipo de soluciones. Esta reducción hace inviable el análisis de la simetría únicamente a partir de las soluciones particulares.

13.2.2. Generadores de la transformación continua

Dada la estructura de grupo de las transformaciones continuas, cualquier transformación de simetría para un ε dado puede definirse como una secuencia consecutiva de transformaciones partiendo de la transformación identidad, para $\varepsilon = 0$. Y dado que el valor ε es arbitrario, dentro de su rango, podemos deducir que las propiedades de la transformación cerca de la identidad ($\varepsilon = 0$) son aplicables para cualquier otro valor finito ε.

Generador $\boldsymbol{X}$ En particular, para definir estas propiedades se introduce el denominado *generador* de la transformación $\boldsymbol{X}$, en la forma

$$\boldsymbol{X}(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\bar{x}(x, y; \varepsilon), \bar{y}(x, y; \varepsilon)) - (x, y)}{\varepsilon} \tag{13.2.5}$$

Este operador $\boldsymbol{X}$ ya contiene todas las propiedades esenciales de la transformación, en el sentido de que es válido localmente el desarrollo de Taylor en ε

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y) + \varepsilon \boldsymbol{X}(x, y) = (\boldsymbol{I} + \varepsilon\ \boldsymbol{X})(x, y) \tag{13.2.6}$$

siendo $\boldsymbol{I}$ el operador identidad. Y en el mismo grado de aproximación podemos escribir directamente

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \mathcal{G}\,(x, y) \quad , \quad \mathcal{G} \equiv e^{\varepsilon \boldsymbol{X}} \tag{13.2.7}$$

siendo ahora $\mathcal{G}$ un elemento del grupo de las transformaciones. Esta relación exponencial entre el elemento del grupo ($\mathcal{G}$) y el generador del grupo ($\boldsymbol{X}$) se denomina *aplicación exponencial*, y es fundamental en la teoría de los grupos de Lie. Determina igualmente, como hemos indicado, que resulta suficiente conocer el generador para conocer la acción completa del grupo (esto es, del conjunto de sus elementos).

Cálculo de $\boldsymbol{X}$ Consideremos para ello una transformación infinitesimal ($\varepsilon \to 0$), para la que tendremos en general

$$\bar{x}(x, y; \varepsilon) = x + \varepsilon\, \xi(x, y) + .. \quad , \quad \bar{y}(x, y; \varepsilon) = y + \varepsilon\, \eta(x, y) + .. \tag{13.2.8}$$

donde los puntos suspensivos denotan términos de orden ε^2 o mayor. Además ξ, η serán funciones de (x, y) dadas por el término de orden 0

$$\xi(x, y) = \left.\frac{\partial \bar{x}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \quad , \quad \eta(x, y) = \left.\frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \tag{13.2.9}$$

Para obtener la expresión general del (operador) generador, resulta suficiente aplicar la identificación

$$\varepsilon\, \xi(x, y) = \varepsilon \boldsymbol{X} x \Rightarrow \xi(x, y) = \boldsymbol{X} x \Rightarrow \boldsymbol{X} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + .. \tag{13.2.10}$$

$$\varepsilon\, \eta(x, y) = \varepsilon \boldsymbol{X} y \Rightarrow \eta(x, y) = \boldsymbol{X} y \Rightarrow \boldsymbol{X} = \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + .. \tag{13.2.11}$$

donde los puntos suspensivos denotan términos idénticamente nulos en cada caso. Reuniendo los dos resultados parciales concluimos que la expresión general del generador es de la forma

$$\boldsymbol{X} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \tag{13.2.12}$$

Ejemplo 1. Rotación Tomemos como primer caso la transformación de *rotación* de ángulo φ en el plano (x, y), esto es,

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \mathcal{G}(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{G}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{13.2.13}$$

y la correspondiente transformación uniparamétrica de ángulo infinitesimal ε

$$\bar{x} = x \cos\varepsilon - y \operatorname{sen}\varepsilon \approx x - \varepsilon\, y \tag{13.2.14}$$

$$\bar{y} = y \cos\varepsilon + x \operatorname{sen}\varepsilon \approx y + \varepsilon\, x \tag{13.2.15}$$

válida para $\varepsilon \to 0$. A partir de aquí es directo obtener el correspondiente generador $\boldsymbol{X}$ en la forma

$$\boldsymbol{X} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \tag{13.2.16}$$

Podemos obtener una expresión del generador mucho más sencilla utilizando las coordenadas polares (r, φ), más convenientes para describir el resultado de la rotación. Teniendo en cuenta las ecuaciones de la transformación de coordenadas

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} \tag{13.2.17}$$

llegamos a la acción del generador sobre las nuevas coordenadas

$$\boldsymbol{X} r = -y \frac{\partial r}{\partial x} + x \frac{\partial r}{\partial y} = -2 \frac{yx}{r} + 2 \frac{xy}{r} = 0 \tag{13.2.18}$$

$$\boldsymbol{X}\varphi = \cos^2\varphi\left(-y\frac{\partial\tan\varphi}{\partial x}+x\frac{\partial\tan\varphi}{\partial y}\right)=\cos^2\varphi\left(1+\tan^2\varphi\right)=1 \tag{13.2.19}$$

De esta forma, siendo (r,φ) dos coordenadas independientes, deducimos de la acción del generador su expresión general, en la forma

$$\boldsymbol{X}r=0\Rightarrow\boldsymbol{X}=0\frac{\partial}{\partial r}+.. \tag{13.2.20}$$

$$\boldsymbol{X}\varphi=1\Rightarrow\boldsymbol{X}=\frac{\partial}{\partial\varphi}+.. \tag{13.2.21}$$

donde los puntos suspensivos indican términos que se anulan idénticamente. Reuniendo ambos resultados obtenemos la expresión para $\boldsymbol{X}$ en coordenadas polares

$$\boldsymbol{X}=\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{13.2.22}$$

Este resultado es generalizable. Siempre existe una coordenada preferente (en este caso φ) , digamos en general s, que se *ajusta* de forma perfecta a la acción del grupo uniparamétrico de transformaciones, en el sentido de que el generador admite la denominada *forma normal*

$$\boldsymbol{X}=\frac{\partial}{\partial s} \tag{13.2.23}$$

Lo que subyace en la forma normal es que las *curvas integrales* de $\boldsymbol{X}$, esto es, las curvas formadas por los puntos $(\bar{x},\bar{y})$ en el plano (x,y), soluciones de

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial\varepsilon}=\xi(\bar{x},\bar{y})\quad,\quad\frac{\partial\bar{y}}{\partial\varepsilon}=\eta(\bar{x},\bar{y}) \tag{13.2.24}$$

con las condiciones iniciales (x,y) para $\varepsilon=0$, son curvas parametrizadas por la coordenada s. Es decir, el conjunto de puntos alcanzados con la aplicación sucesiva de la transformación continua es una curva de parámetro s, con el resto de coordenadas con valor constante. En el caso de la rotación, φ será el parámetro de cada curva integral, cada una con un valor constante r.

Para finalizar este ejemplo, aprovechamos la forma normal del generador $\boldsymbol{X}$ para verificar de forma rápida la exactitud de la expresión exponencial del elemento de grupo $\mathcal{G}=e^{\varphi\boldsymbol{X}}$. Por definición la exponencial tiene el desarrollo completo

$$e^{\varphi\boldsymbol{X}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\varphi^n\boldsymbol{X}^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\varphi^n\left(\frac{\partial}{\partial\varphi^*}\right)^n_{\varphi^*=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\varphi^n\left(\frac{\partial^n}{\partial\varphi^{*n}}\right)_{\varphi^*=0} \tag{13.2.25}$$

donde debe quedar claro que φ es el ángulo finito y arbitrario de la transformación, y mientras que la condición $\varphi^*=0$ se refiere al parámetro φ^* de la transformación infinitesimal que determina la expresión del generador. Aplicamos entonces este operador al punto genérico de partida

$$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\cos\left(\varphi_0+\varphi^*\right)\\\operatorname{sen}\left(\varphi_0+\varphi^*\right)\end{pmatrix} \tag{13.2.26}$$

y dado que

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial\varphi^{*n}}\right)_{\varphi^*=0} r\begin{pmatrix}\cos\left(\varphi_0+\varphi^*\right)\\\operatorname{sen}\left(\varphi_0+\varphi^*\right)\end{pmatrix} \tag{13.2.27}$$

$$=r\begin{pmatrix}(-1)^n\cos\varphi_0\\(-1)^n\operatorname{sen}\varphi_0\end{pmatrix}\ \text{con n par}+r\begin{pmatrix}-(-1)^n\operatorname{sen}\varphi_0\\(-1)^n\cos\varphi_0\end{pmatrix}\ \text{con n impar} \tag{13.2.28}$$

$$=\begin{pmatrix}(-1)^n x_0\\(-1)^n y_0\end{pmatrix}\ \text{con n par}+\begin{pmatrix}-(-1)^n y_0\\(-1)^n x_0\end{pmatrix}\ \text{con n impar} \tag{13.2.29}$$

y teniendo en cuenta los desarrollos de Taylor de la función seno y coseno

$$\operatorname{sen}\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad,\quad\cos\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}\tag{13.2.30}$$

llegamos a la expresión general

$$e^{\varphi\boldsymbol{X}}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\,\cos\varphi-y_0\,\operatorname{sen}\varphi\\x_0\,\operatorname{sen}\varphi+y_0\,\cos\varphi\end{pmatrix}\equiv\mathcal{G}(\varphi)\cdot\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\Rightarrow\mathcal{G}(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\operatorname{sen}\varphi\\\operatorname{sen}\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}\tag{13.2.31}$$

que coincide efectivamente con el elemento arbitrario $\mathcal{G}(\varphi)$ del grupo de transformación de la rotación.

Ejemplo 2. Traslación Una traslación es el desplazamiento del origen de coordenadas de x en una cantidad arbitraria. Infinitesimalmente tenemos

$$\bar{x}=x+\varepsilon\quad,\quad\bar{y}=y\tag{13.2.32}$$

de donde, con los conocimientos ya adquiridos, deducimos directamente la expresión del generador

$$\boldsymbol{X}x=1\quad,\quad\boldsymbol{X}y=0\;\Rightarrow\boldsymbol{X}=\frac{\partial}{\partial x}\tag{13.2.33}$$

de forma que x es la coordenada normal, y las trayectorias en el espacio (x,y) son curvas parametrizadas por x, con $y=$ cte.
Así mismo podemos comprobar de forma directa la expresión exponencial del elemento del grupo de traslaciones, al ser

$$e^{a\boldsymbol{X}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\boldsymbol{X}^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial\varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0}\tag{13.2.34}$$

siendo a el parámetro de la traslación finita. Aplicando este operador a la posición de partida, encontramos

$$e^{a\boldsymbol{X}}\begin{pmatrix}x_0+\varepsilon\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+a\\y_0\end{pmatrix}\equiv\mathcal{G}(a)\cdot\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\tag{13.2.35}$$

Ejemplo 3. Transformación de escala Aplicando el mismo procedimiento en sentido inverso, podemos obtener la ley de transformación asociada a un generador dado. Consideremos el caso del generador

$$\boldsymbol{X}=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\tag{13.2.36}$$

y analicemos a qué grupo de transformaciones corresponde. Para ello únicamente tenemos que resolver las curvas integrales de este operador, es decir, la dependencia $(\bar{x},\bar{y};\varepsilon)$ con la aplicación sucesiva de las transformaciones. Dicha curva integral será la solución de

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial\varepsilon}=\bar{x}\quad,\quad\frac{\partial\bar{y}}{\partial\varepsilon}=\bar{y}\tag{13.2.37}$$

La solución para los datos iniciales x,y en $\varepsilon=0$ es

$$\bar{x}=xe^{\varepsilon}\quad,\quad\bar{y}=ye^{\varepsilon}\tag{13.2.38}$$

que representa una transformación de escala en la que todas las variables quedan multiplicadas por el mismo factor constante.

13.3. Simetrías puntuales para ecuaciones diferenciales ordinarias

13.3.1. Extensión de los generadores $\boldsymbol{X}$

Para poder aplicar las transformaciones de simetría a las EDOs, dado que éstas se construyen con las derivadas de orden arbitrario de la variable dependiente y respecto a la variable independiente, necesitamos *extender* la noción del generador para incluir las variaciones de las derivadas en cuestión. Anteriormente el generador establecía el cambio únicamente en $(\bar{x}, \bar{y})$ bajo la transformación dada, y ahora necesitamos que incluya los cambios en $\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y'}, \bar{y''}, ..\right)$. No se trata de un generador distinto ya que el grupo de transformación es el mismo, se trata de incorporar nuevos términos en el generador ya conocido, y que sean proporcionales a

$$\frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial y''}, .. \tag{13.3.1}$$

El procedimiento es directo. A partir de esta expresión inicial ya conocida para $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = x + \varepsilon\xi(x,y) + .. \equiv x + \varepsilon \boldsymbol{X} x + .. \tag{13.3.2}$$

$$\bar{y} = y + \varepsilon\eta(x,y) + .. \equiv y + \varepsilon \boldsymbol{X} y + .. \tag{13.3.3}$$

con

$$\boldsymbol{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{13.3.4}$$

podemos derivar sucesivamente respecto a x para obtener las leyes de transformación de las derivadas de y.

Primera derivada En particular, para la primera derivada se satisface

$$\bar{y'} = y' + \varepsilon\chi(x,y,y') + .. \equiv y' + \varepsilon \boldsymbol{X} y' + .. \tag{13.3.5}$$

donde las nuevas funciones $\chi, ..$ deben obtenerse de forma recursiva. Las consideraciones que deben tenerse en cuenta en el proceso son:

- La función derivada $\bar{y'}$ es por definición $d\bar{y}/d\bar{x}$, siendo $y' = dy/dx$.
- Las derivadas respecto a x en las expresiones anteriores son derivadas totales, por lo que habrá que aplicar la regla de la cadena allí donde sea necesario.

Como aplicación práctica analizamos en detalle la obtención de la extensión del generador para la derivada primera. Partimos de

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{d\left(y + \varepsilon\eta(x,y) + ..\right)}{d\left(x + \varepsilon\xi(x,y) + ..\right)} = \frac{dy + \varepsilon d\eta + ..}{dx + \varepsilon d\xi + ..} = \frac{y' + \varepsilon\eta' + ..}{1 + \varepsilon\xi' + ..} \tag{13.3.6}$$

y el mismo orden de aproximación en ε esta expresión equivale a

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \left(y' + \varepsilon\eta'\right)\left(1 - \varepsilon\xi'\right) + .. = y' + \varepsilon\left(\eta' - y'\xi'\right) + .. \tag{13.3.7}$$

Habiendo llegado a este desarrollo ya podemos identificar la contribución de este término al generador, en la forma

$$\varepsilon\chi(x,y,y') = \varepsilon \boldsymbol{X} y' \Rightarrow \boldsymbol{X} = \chi(x,y,y')\frac{\partial}{\partial y'} + .. \tag{13.3.8}$$

siendo

$$\chi(x,y,y') \equiv \eta' - y'\xi' = \frac{\partial\eta}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) - {y'}^2\frac{\partial\xi}{\partial y} \tag{13.3.9}$$

Derivadas superiores Ya indicamos anteriormente que el cálculo de las funciones para las distintas derivadas era recursivo. Escribiendo la expresión para la primera derivada en la forma

$$\boldsymbol{X} = \chi(x,y,y')\frac{\partial}{\partial y'} + .. \quad , \quad \chi(x,y,y') \equiv \frac{d\eta}{dx} - y'\frac{d\xi}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\eta - y'\xi\right) + y''\xi \tag{13.3.10}$$

podemos ver que para las derivadas superiores la contribución al generador

$$\varepsilon\lambda\left(x,y,y',..,y^{(n)}\right) = \varepsilon\boldsymbol{X}y^{(n)} \Rightarrow \boldsymbol{X} = \alpha\left(x,y,y',..,y^{(n)}\right)\frac{\partial}{\partial y^{(n)}} \tag{13.3.11}$$

satisface la recursión

$$\alpha\left(x,y,y',..,y^{(n)}\right) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\eta - y'\xi\right) + y^{(n+1)}\xi \tag{13.3.12}$$

donde por comodidad en la notación aparece explícita en el lado derecho la derivada de orden $n+1$ aunque en realidad su dependencia queda anulada idénticamente.

13.3.2. Definición de simetría de una EDO

Introducción Hasta ahora hemos analizado las transformaciones puntuales, discretas o continuas, y las hemos identificado con las simetrías del sistema, sin hacer explícito a qué se refiere el concepto de *simetría*. La simetría en general es la propiedad del sistema de ser *invariable* bajo una transformación dada, que resultará ser en ese caso una transformación de simetría. La invariabilidad dependerá del contexto en el que trabajamos. Por ejemplo una cantidad escalar, digamos f, será simétrica (invariable) frente a las transformaciones de las coordenadas. Esto no quiere decir que f no pueda cambiar funcionalmente, sí que se satisface en cada punto $f(x) = \bar{f}(\bar{x})$, siendo $\bar{f}$ la función transformada, y $\bar{x}$ la coordenada transformada.
La simetría en una EDO satisface una noción similar, con algunas diferencias. En primer lugar la solución $y(x)$ de la EDO no es en general una función escalar, $y(x) \neq \bar{y}(\bar{x})$. Por ello no podemos definir una solución simétrica como aquella que bajo la transformación de simetría se transforma en sí misma. En general lo que tendremos es una solución que bajo la transformación de simetría se transforma en otra solución de la EDO. La utilidad de esta definición es que nos aporta las propiedades comunes de todas las soluciones de la EDO. Por ejemplo, la siguiente EDO

$$y'^2 = \alpha \quad , \quad \alpha > 0 \tag{13.3.13}$$

tiene simetría bajo la inversión espacial $x \to -x$, ya que si $y(x)$ es solución también lo será $y(-x)$. En particular, tenemos las dos ramas de soluciones

$$y_1(x) = \sqrt{\alpha}x + c \quad , \quad y_2(x) = -\sqrt{\alpha}x + c \tag{13.3.14}$$

de forma que

$$y_1(-x) = -\sqrt{\alpha}x + c \equiv y_2(x) \tag{13.3.15}$$

En contraposición, la EDO

$$y' = \alpha \quad , \quad \alpha > 0 \Rightarrow y(x) = \alpha x + c \tag{13.3.16}$$

no tiene esa simetría, ya que $y(-x) = -\alpha x + c \neq y(x)$.

Conviene destacar por separado un aspecto general de las EDO relacionado con la paridad, pero que no forma parte de la simetría bajo paridad. Consideremos la EDO

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right) y(x) = 0 \tag{13.3.17}$$

Al ser el operador $d^2/dx^2 - 1$ un operador *par* bajo la inversión espacial, esto es,

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right) = \left(\frac{d^2}{d\,(-x)^2} - 1\right) \tag{13.3.18}$$

todas las soluciones podrán heredar la propiedad de paridad, y podrán dividirse en soluciones pares $y(x) = y(-x)$ y soluciones impares $y(x) = -y(-x)$. Esto no quiere decir que no haya soluciones sin paridad definida, sino que las soluciones pueden construirse siempre usando la paridad. En particular, su solución general es la de forma

$$y(x) = Ae^{x} + Be^{-x} = C\cosh x + D\,\mathrm{senh}\, x \tag{13.3.19}$$

donde en el primer conjunto de soluciones e^{x}, e^{-x} son funciones sin paridad definida, y en el segundo $\cosh x$ es una función par y $\mathrm{senh}\, x$ una función impar.

Definición de simetría Nos quedamos por tanto con la definición conceptual de que la simetría de una EDO transforma soluciones $y(x)$ en soluciones $\bar{y}(\bar{x})$. Y de esta forma su expresión general (tomemos como base una EDO de orden n) no cambia, esto es,

$$H\left(x, y, y', .., y^{(n)}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; H\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', .., \bar{y}^{(n)}\right) = 0 \tag{13.3.20}$$

Debe recordarse que esta definición es independiente de las variables (x, y) elegidas: si realizamos una transformación puntual sólo cambiará la forma explícita de la transformación de simetría pero no su contenido.
Pasamos ahora a obtener la expresión analítica de estas propiedades, reduciendo el análisis por simplicidad a las transformaciones continuas uniparamétricas, de parámetro ε. Siendo ε el parámetro de la transformación, tanto la EDO como sus soluciones cuando son simétricas son independientes del valor de ε, esto es, la forma funcional anterior H no depende explícitamente de ε. Además sabemos que el estudio de las propiedades de transformación puede reducirse a un entorno de la transformación identidad ($\varepsilon = 0$) haciendo uso de los generadores de la transformación, nuestra condición analítica para la simetría se escribe

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0 \tag{13.3.21}$$

Desarrollando esta expresión aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial H}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \frac{\partial H}{\partial y}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \frac{\partial H}{\partial y'}\left(\frac{\partial \bar{y}'}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + .. = 0 \tag{13.3.22}$$

donde hemos tomado en el primer factor de cada sumando la expresión correspondiente para $\varepsilon = 0$, esto es,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}\right)_{\varepsilon=0} = \frac{\partial H}{\partial x}\ ,\ .. \tag{13.3.23}$$

al ser $\bar{x} = x, ..$ cuando $\varepsilon = 0$.
Introduciendo ahora la expresión general del generador $\boldsymbol{X}$ de la transformación

$$\boldsymbol{X} = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial \bar{y}'}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\frac{\partial}{\partial y'} + .. \tag{13.3.24}$$

la condición analítica que estamos buscando se reduce a

$$\boldsymbol{X}H = 0 \tag{13.3.25}$$

que por otro lado es el valor esperado: al ser $\boldsymbol{X}$ el generador de la simetría, la condición $\boldsymbol{X}H = 0$ indica que la EDO $H = 0$ permanece invariable en la transformación.

Ejemplo Consideremos como primer ejemplo la EDO lineal

$$H\left(x, y, y', y''\right) \equiv y'' + y = 0 \tag{13.3.26}$$

Analizamos en primer lugar las posibles simetrías. Una de ellas sería la traslación $\bar{x} = x+\varepsilon$, $\bar{y} = y$, para la cual ya conocemos que $\boldsymbol{X} = \partial/\partial x$. Con ello podemos verificar que se satisface efectivamente la condición equivalente $\boldsymbol{X}H = 0$:

$$\boldsymbol{X}H = \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{13.3.27}$$

ya que H no depende explícitamente de x.
Una segunda simetría consiste en multiplicar la función y y sus derivadas por un factor constante, esto es,

$$\bar{x} = x \quad , \quad \bar{y} = y + \varepsilon\, y = (1+\varepsilon)\, y \tag{13.3.28}$$

junto con

$$\bar{y}' = (1+\varepsilon)\, y' \quad , \quad \bar{y}'' = (1+\varepsilon)\, y'' \tag{13.3.29}$$

El generador de la transformación está dado por la expresión extendida

$$\boldsymbol{X} = y\frac{\partial}{\partial y} + y'\frac{\partial}{\partial y'} + y''\frac{\partial}{\partial y''} \tag{13.3.30}$$

y obtenemos la condición

$$\boldsymbol{X}H = y'' + y = 0 \tag{13.3.31}$$

ya que el propio H se anula idénticamente, $H = 0$. Esta relación tan directa entre $\boldsymbol{X}H$ y el propio H es debida al carácter homogéneo de grado 1 de H en todas sus variables.

13.4. Aplicaciones

13.4.1. Introducción

En general, en las aplicaciones prácticas la EDO queda escrita en función de la derivada ordinaria de mayor orden, esto es, tenemos la expresión funcional para H

$$H \equiv y^{(n)} - \omega\left(x, y, y', .., y^{(n-1)}\right) = 0 \tag{13.4.1}$$

y dada cualquier simetría, el generador tendrá la expresión extendida hasta la derivada de orden $(n-1)$.

$$\boldsymbol{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + .. + \chi\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} \tag{13.4.2}$$

Esta reducción hasta la derivada de orden $n-1$ se debe a la expresión explícita de la EDO, de forma que si se asegura la simetría de las funciones hasta la derivada de orden $n-1$, implícitamente se está asegurando la simetría de la derivada última de orden n, ya que depende funcionalmente de ellas. En este caso, la condición de simetría $\boldsymbol{X}H = 0$ se reduce a

$$\boldsymbol{X}\omega = \alpha \tag{13.4.3}$$

donde α está dado por el término recursivo general

$$\alpha\left(x, y, y', .., y^{(n-1)}\right) = \left(\frac{d^n}{dx^n}\left(\eta - y'\xi\right) + y^{(n+1)}\xi\right)_{y^{(n)}=\omega} \tag{13.4.4}$$

y donde por comodidad en la notación aparece explícita en el lado derecho la derivada de orden $n+1$ aunque su dependencia queda anulada idénticamente.

La cuestión clave es que si además la EDO tiene una *integral primera*, esto es, existe una función f que satisface

$$f = f\left(x, y, y', .., y^{(n-1)}\right) \quad , \quad \frac{df}{dx} = 0 \tag{13.4.5}$$

es decir, que mantiene un valor constante a lo largo de las soluciones $y(x)$, podemos obtener una vía alternativa más práctica para analizar las simetrias del sistema.

Partimos para ello de la ecuación que satisface esta integral primera f, que debe leerse, aplicando la regla de la cadena e identificando la derivada de mayor orden $y^{(n)}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + .. + y^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{A} f = 0 \tag{13.4.6}$$

siendo $\boldsymbol{A}$ el operador

$$\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + .. + \omega \left(x, y, y', .., y^{(n-1)} \right) \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} \tag{13.4.7}$$

Comparando esta expresión con la expresión para $\boldsymbol{X}$ vemos que ambos operadores están actuando el mismo espacio funcional y que tiene una estructura similar, en particular el operador $\boldsymbol{A}$ también es lineal.
Vista esta similitud nos interesará obtener la condición de simetría $\boldsymbol{X} H = 0$ en función de ambo operadores. Dado que actúan en el mismo espacio, podemos definir un tercer operador, su *conmutador*, según la expresión general

$$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}] \equiv \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \tag{13.4.8}$$

de forma que aplicado al conjunto de las n integrales primeras $\{f_\alpha\}$ del sistema, que son soluciones de la EDO reducida, y por tanto tendrán la misma simetría, llegamos al resultado

$$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}] f_\alpha = \boldsymbol{X} \left(\boldsymbol{A} f_\alpha \right) - \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{X} f_\alpha \right) = 0 - 0 = 0 \tag{13.4.9}$$

dado que por definición $\boldsymbol{A} f_\alpha = 0$, y por simetría $\boldsymbol{X} f_\alpha = c_\alpha g_\alpha$, esto es, será combinación lineal de soluciones (integrales primeras), que satisfacen $\boldsymbol{A} g_\alpha = 0$. Revisando este resultado vemos que sobre las soluciones de la EDO reducida el operador $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}]$ se comporta como el operador $\boldsymbol{A}$, y por tanto debe existir la proporcionalidad

$$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}] = \lambda \left(x, y, y', ..., y^{(n-1)} \right) \boldsymbol{A} \tag{13.4.10}$$

siendo λ una función arbitraria por determinar. Para hallar su valor basta igual los coeficientes del primer término, proporcional a $\partial/\partial x$, de la igualdad anterior:

$$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}] = -\boldsymbol{A}\xi \frac{\partial}{\partial x} + .. = \lambda \frac{\partial}{\partial x} + .. = \lambda \left(x, y, y', ..., y^{(n-1)} \right) \boldsymbol{A} \tag{13.4.11}$$

Esto es, y dado que la primera función ξ sólo depende de (x, y):

$$\lambda = \lambda(x, y, y') = -\boldsymbol{A}\xi = -\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + y' \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \tag{13.4.12}$$

13.4.2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

Ecuación de primer orden $y' = \omega(x, y)$ Para es tipo de EDO la condición de simetría se lee

$$\boldsymbol{X}\omega = \alpha \tag{13.4.13}$$

teniendo $\boldsymbol{X}$ la expresión no extendida

$$\boldsymbol{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \tag{13.4.14}$$

y donde α está dado por el término de orden 1

$$\alpha\,(x, y) = \left(\frac{d}{dx} \left(\eta - y'\xi \right) + y''\xi \right)_{y'=\omega} = \frac{d\eta}{dx} - \omega \frac{d\xi}{dx} \tag{13.4.15}$$

y la derivada total respecto a x tiene el desarrollo

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \omega \frac{\partial}{\partial y} \tag{13.4.16}$$

Con todo ello, la condición de simetría se escribe

$$\xi\omega_{,x} + \xi_{,x}\omega + \xi_{,y}\omega^2 = \eta_{,x} + \eta_{,y}\omega - \eta\omega_{,y} \tag{13.4.17}$$

donde los subíndices $,x$ ó $,y$ denotan la derivación parcial respecto a x e y respectivamente. Esta ecuación determina cuáles son las funciones ξ, η que dan lugar a una simetría, ya que la función $\omega(x, y)$ es conocida de antemano. Con ello podemos fijar cualquier función ξ a nuestra conveniencia y obtener η integrando la ecuación en derivadas parciales resultante, o viceversa. Este procedimiento genera un conjunto infinito de soluciones posibles, lo que nos lleva a concluir que una EDO de primer orden, cualquiera de ellas, tiene un número infinito de simetrías. Este hecho aparentemente peculiar no tiene más fondo que ser un resultado puramente geométrico: al ser $\boldsymbol{X}$ función exclusiva de (x, y) resulta ser un campo vectorial, un vector en cada punto (x, y)). Basta elegir entonces $\boldsymbol{X}$ como el vector de separación entre dos soluciones de la EDO infinitesimalmente próximas para obtener las simetrías de la EDO. Además dada una simetría (un vector $\boldsymbol{X}$) el nuevo vector $\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{T}$ siendo $\boldsymbol{T}$ el campo vectorial en la dirección tangente a las soluciones seguirá siendo una simetría (seguirá transformando soluciones en soluciones). De ahí que el número de simetrías de la EDO de primer orden sea ilimitado.

Ejemplo detallado

$$y' = -\frac{y + 2x}{x} \equiv \omega(x, y) \tag{13.4.18}$$

con la solución particular de la condición de simetría

$$\eta \equiv 0 \quad , \quad \xi\omega_{,x} + \xi_{,x}\omega + \xi_{,y}\omega^2 = 0 \Rightarrow \xi = \frac{1}{y + 2x} \tag{13.4.19}$$

esto es,

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{y + 2x}\frac{\partial}{\partial x} \tag{13.4.20}$$

A partir de este generador obtenemos las ecuaciones de la transformación en la forma

$$\bar{x} = x + \varepsilon \boldsymbol{X}x = x + \varepsilon\frac{1}{y + 2x} \quad , \quad \bar{y} = y + \varepsilon \boldsymbol{X}y = y \tag{13.4.21}$$

de forma que si $y(x)$ es solución $\bar{y}(\bar{x})$ también es solución, esto es,

$$y' = -\frac{y + 2x}{x} \;\Leftrightarrow\; \bar{y}' = -\frac{\bar{y} + 2\bar{x}}{\bar{x}} \tag{13.4.22}$$

para soluciones infinitesimalmente vecinas (esto es, en el límite $\varepsilon \to 0$).

Además de aplicar la condición directa $\boldsymbol{X}H = 0$ podemos analizar la condición asociada a la existencia de integrales primeras f: $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}] = \lambda\boldsymbol{A}$, con $\boldsymbol{A}f = 0$. Dicha integral primera, única dado que la EDO es de primer orden, estará dada por la solución general de la EDO:

$$y(x) = -x + \frac{D}{x} \tag{13.4.23}$$

siendo D una constante, que podemos identificar con la función f

$$f = x(y + x) \equiv D = \text{cte} \tag{13.4.24}$$

De la condición $df/dx = 0$ obtenemos la expresión general del operador $\boldsymbol{A} \equiv d/dx$, tal que $\boldsymbol{A}f = 0$,

$$\boldsymbol{A} \equiv \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} + \omega\frac{\partial}{\partial y} \tag{13.4.25}$$

Tenemos por tanto la condición para la simetría generada por $\boldsymbol{X}$

$$\Big[\frac{1}{y+2x}\frac{\partial}{\partial x},\frac{d}{dx}\Big]=\lambda\frac{d}{dx} \tag{13.4.26}$$

que podemos escribir en la forma

$$\Big[\frac{1}{y+2x}\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y},\frac{d}{dx}\Big]=\lambda\frac{d}{dx} \tag{13.4.27}$$

forma que se reduce a

$$\Big[\frac{1}{y+2x}\frac{d}{dx},\frac{d}{dx}\Big]=\lambda\frac{d}{dx} \tag{13.4.28}$$

al ser

$$\Big[\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y},\frac{d}{dx}\Big]\equiv 0 \tag{13.4.29}$$

Como paso final para obtener el valor de la función λ basta igualar el término proporcional a d/dx en ambos lados de la ecuación anterior con el resultado

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y+2x}\right)\frac{d}{dx}=\lambda\frac{d}{dx}\Rightarrow\lambda=-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y+2x}\right)_{y'=-\frac{y+2x}{x}} \tag{13.4.30}$$

13.4.3. Ecuación diferencial de segundo orden

Ecuación de segundo orden $y''=\omega(x,y,y')$ Para este tipo de EDO la condición de simetría se escribe

$$\boldsymbol{X}\omega\equiv\left(\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\chi\frac{\partial}{\partial y'}\right)\omega=\frac{d^2}{dx^2}\left(\eta-y'\xi\right)+y^{(3)}\xi \tag{13.4.31}$$

donde reiteramos que en la expresión del lado derecho no hay dependencia en la derivada $y^{(3)}$, sólo se utiliza esta notación por ser más sencilla. Desarrollando esta ecuación término a término encontramos

$$\omega\left(\eta_{,y}-2\xi_{,x}-3y'\xi_{,y}\right)-\omega_{,x}\xi-\omega_{,y}\eta-\omega_{,y'}\left(\eta_{,x}+y'\left(\eta_{,y}-\xi_{,x}\right)-{y'}^2\xi_{,y}\right) \tag{13.4.32}$$

$$+\eta_{,xx}+y'\left(2\eta_{,xy}-\xi_{,xx}\right)+{y'}^2\left(\eta_{,yy}-2\xi_{,xy}\right)-{y'}^3\xi_{,yy}=0 \tag{13.4.33}$$

La resolución de esta ecuación en derivadas parciales nos dará las funciones $\xi(x,y)$ y $\eta(x,y)$, conocida la función $\omega(x,y,y')$. Dicha ecuación es una identidad respecto a sus variables x,y,y', que se consideran variables independientes. Por ello podemos tratar por separado cada una de las partes que resulten independientes respecto a cada una de estas variables.

Ejemplo detallado Sea la EDO de segundo orden

$$y''=(x-y){y'}^3\equiv\omega(x,y,y') \tag{13.4.34}$$

Igualando a cero los términos independientes de y' y los términos lineales en y' en la condición de simetría resolvemos por separado

$$\eta_{,xx}=0\Rightarrow\eta(x,y)=\alpha(y)x+\beta(y) \tag{13.4.35}$$

y

$$2\eta_{,xy}-\xi_{,xx}=0\Rightarrow\xi(x,y)=\alpha'(y)x^2+\gamma(y)x+\delta(y) \tag{13.4.36}$$

La anulación de los coeficientes de las restantes potencias de y' dan lugar a las condiciones restantes

$$\alpha''+\alpha=0 \tag{13.4.37}$$

$$2\gamma'-\beta''-3y\alpha=0 \tag{13.4.38}$$

$$2\beta' + \gamma'' - \alpha = 0 \tag{13.4.39}$$

$$\delta'' + \delta + y\left(\gamma - 2\beta'\right) - \beta = 0 \tag{13.4.40}$$

La estrategia de resolución será determinar paso a paso y de forma consecutiva cada una de las funciones $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Cada una de ellas satisface una EDO de segundo orden por lo que dependerá de dos constantes de integración. Así la simetría completa dependerá de ocho constantes independientes, esto es, las transformaciones de simetría pertecerán a un grupo $8-$paramétrico de Lie. Entre estas ocho podemos encontrar dos de forma sencilla por simple inspección. Haciendo $\gamma = \alpha \equiv 0$ y tomando $\beta = \delta = a \equiv$ cte llegamos a

$$\boldsymbol{X} = a\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{13.4.41}$$

y por otro lado tomando $\alpha = \beta \equiv 0$ y $\gamma = -\delta' = b \equiv$ cte, obtenemos

$$\boldsymbol{X} = b(x - y)\frac{\partial}{\partial x} \tag{13.4.42}$$

Ejemplo $y'' = 0$ Podemos verificar la existencia de este conjunto de 8 simetrías de forma más directa utilizando la EDO de segundo orden más sencilla

$$y'' = 0 \tag{13.4.43}$$

Para esta EDO la condición de simetría da lugar a las cuatro ecuaciones en derivadas parciales

$$0 = \eta_{,xx} = 2\eta_{,xy} - \xi_{,xx} = \eta_{,yy} - 2\xi_{,xy} = \xi_{,yy} \tag{13.4.44}$$

fáciles de resolver con el resultado

$$\boldsymbol{X} = \left(a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(a_6 + a_7 x + a_8 y + a_5 xy + a_4 y^2\right)\frac{\partial}{\partial y} \tag{13.4.45}$$

Adicionalmente se puede demostrar que el número máximo posible de simetrías de una EDO general de segundo orden es precisamente ocho. Sin entrar en este detalle, lo que se demuestra por construcción es que si $\boldsymbol{X}$ tiene nueve componentes independientes, o más, toda la estructura geométrica de las curvas integrales permanece invariable lo que equivale a que la transformación sea la identidad, y por tanto $\boldsymbol{X} \equiv 0$, lo que entraría en contradicción con la hipótesis de partida. Y por otra parte el número de simetrías no está acotado por debajo, es decir, pueden existir EDO de segundo orden que no tengan ninguna simetría, por ejemplo, $y'' = xy + \cosh y'$.

13.4.4. Procedimiento de integración de las soluciones

EDO de primer orden Consideremos una EDO de primer orden

$$y' = \omega(x, y) \tag{13.4.46}$$

cuya ecuación asociada para la integral primera f se lee

$$\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x} + \omega\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \boldsymbol{A}f = 0 \tag{13.4.47}$$

y para la cual sabemos que tiene una simetría con generador

$$\boldsymbol{X} = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{13.4.48}$$

Lo que nos planteamos ahora es cómo de útil es este conocimiento para obtener la solución a la EDO, en particular, si podemos establecer un procedimiento partiendo de estas definiciones que nos permita obtener por una via directa la solución de la EDO.

Consideremos para ello una solución particular ϕ de las integrales primeras $\boldsymbol{A}f = 0$. Por definición, al ser las integrales primeras valores constantes, cualquier otra integral primera dependerá también de ϕ. Además ya que $\boldsymbol{X}$ es el generador de una simetría, transforma soluciones (incluidas todas las f) en soluciones. En conjunto tenemos por tanto para ϕ

$$\boldsymbol{X}\phi = \bar{\phi} \equiv F(\phi) \tag{13.4.49}$$

y siendo $\boldsymbol{X}$ un operador lineal, podemos normalizar esta ecuación con una adecuación elección de la integral primera

$$\boldsymbol{X}\varphi = 1 \quad , \quad \frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{1}{F(\phi)} \tag{13.4.50}$$

Por tanto, la simple existencia de una simetría de la EDO asegura que existe una solución φ única, integral primera, que satisface

$$\boldsymbol{X}\varphi = 1 \quad , \quad \boldsymbol{A}\varphi = 0 \tag{13.4.51}$$

La ventaja de esta elección común, que determina valores constantes en los lados derechos, es que permite integrar de forma directa la función φ en términos de las funciones conocidas ξ, η y ω. Para ello desarrollando cada una de las ecuaciones

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X}\varphi = \xi(x,y)\varphi_{,x} + \eta(x,y)\varphi_{,y} = 1 \\ &\boldsymbol{A}\varphi = \varphi_{,x} + \omega(x,y)\varphi_{,y} = 0 \end{aligned} \tag{13.4.52}$$

el sistema siempre tendrá solución mientras $\boldsymbol{X}$ no sea múltiplo de $\boldsymbol{A}$, lo que es cierto ya que $\boldsymbol{X}$ es una simetría. Entonces la solución para φ satisface por separado

$$\varphi_{,x} = -\frac{\omega}{\eta - \omega\xi} \quad , \quad \varphi_{,x} = \frac{1}{\eta - \omega\xi} \tag{13.4.53}$$

y por tanto se obtiene la solución general con la integración ya directa de ambas ecuaciones

$$\varphi = \int \varphi_{,x} dx + \int \varphi_{,y} dy = \int \frac{dy - \omega(x,y)dx}{\eta(x,y) - \omega(x,y)\xi(x,y)} \tag{13.4.54}$$

y a partir de esta solución general para la integral primera se obtiene de forma implícita a través de esta integral de línea la solución general de la EDO

$$\varphi(x,y) = \int \frac{dy - \omega dx}{\eta - \omega\xi} = \varphi_0 \equiv \text{cte} \tag{13.4.55}$$

Este procedimento para las EDO de primer orden es complétamente análogo a la integración directa de la EDO utilizando un factor integrante, siendo en este caso $M \equiv (\eta - \omega\xi)^{-1}$ dicho factor.

Ejemplo detallado Para la EDO de primer orden

$$y' = 1 + \frac{\tan(x-y)}{x} \tag{13.4.56}$$

tenemos la simetría

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{x\cos(x-y)}\frac{\partial}{\partial y} \tag{13.4.57}$$

y la integración de la integral primera φ

$$\varphi = \int \Big(x\cos(x-y)dy - (x\cos(x-y) + \operatorname{sen}(x-y))\, dx \Big) = -x\operatorname{sen}(x-y) \equiv \varphi_0 \tag{13.4.58}$$

da lugar a la solución general

$$y = x + \operatorname{arc\,sen}\frac{\varphi_0}{x} \tag{13.4.59}$$

EDO de mayor orden Consideremos la EDO general de orden n

$$y^{(n)} = \omega\left(x, y, y', .., y^{(n-1)}\right) \tag{13.4.60}$$

siendo la ecuación asociada para las integrales primeras

$$\boldsymbol{A}f = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + .. + \omega\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}\right) f = 0 \tag{13.4.61}$$

Asumamos además que la EDO satisface una simetría con el generador

$$\boldsymbol{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + .. + \chi(x,y)\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} \tag{13.4.62}$$

Analizamos de nuevo si podemos establecer un procedimiento partiendo de estas definiciones que nos permita obtener por una via directa la solución de la EDO. Partimos del hecho de que siempre es posible escribir el generador en una forma normal, digamos

$$\tilde{\boldsymbol{X}} = \frac{\partial}{\partial s} \tag{13.4.63}$$

mediante la transformación adecuada en el espacio (x, y) que podría ser por ejemplo

$$\tilde{x} = t(x,y) \quad , \quad \tilde{y} = s(x,y) \tag{13.4.64}$$

Para estas nuevas coordenadas, la condición de simetría exige que

$$0 = \tilde{\boldsymbol{X}}\tilde{\omega} = \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial s} \tag{13.4.65}$$

de forma que la ecuación diferencial resultante es independiente de s (al serlo $\tilde{\omega}$),

$$s^{(n)} = \tilde{\omega}\left(t, s', .., s^{(n-1)}\right) \tag{13.4.66}$$

que no deja de ser una EDO de orden $n-1$ para la variable s'. Por tanto, con la modificación del generador hemos conseguido reducir la EDO de orden n a una EDO de orden $n-1$ para una cuadratura para la función s

$$s = \int s'(t)dt \tag{13.4.67}$$

La única cuestión pendiente es entonces cómo determinar las funciones $t(x, y)$ y $s(x, y)$. Para ello partimos de las dos condiciones que resultan de la expresión normal del generador

$$\tilde{\boldsymbol{X}} = \tilde{\boldsymbol{X}}(t)\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\boldsymbol{X}}(s)\frac{\partial}{\partial s} \equiv \frac{\partial}{\partial s} \tag{13.4.68}$$

esto es,

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{X}}(t) = 0 &\Rightarrow\ \xi(x,y)t_{,x} + \eta(x,y)t_{,y} = 0 \\ \tilde{\boldsymbol{X}}(s) = 1 &\Rightarrow\ \xi(x,y)s_{,x} + \eta(x,y)s_{,y} = 1 \end{aligned} \tag{13.4.69}$$

Como segundo paso, vemos por la estructura normal de $\tilde{\boldsymbol{X}}$ que sus curvas integrales corresponden a valores constantes de t, esto es, se satisface

$$0 = dt = t_{,x}dx + t_{,y}dy \tag{13.4.70}$$

que junto con la ecuación anterior $\tilde{\boldsymbol{X}}(t) = 0$ determina que las curvas integrales estén dadas por la integral de línea

$$\int\left(\xi(x,y)dy - \eta(x,y)dx\right) = t \equiv \text{cte} \tag{13.4.71}$$

expresión matemática de la función $t = t(x, y)$. Y como punto final, para obtener s a partir de la ecuación restante $\tilde{\boldsymbol{X}}(s) = 1$, utilizamos como coordenadas independientes t e y por ejemplo, en cuyo caso

$$\tilde{\boldsymbol{X}} = \tilde{\boldsymbol{X}}(t)\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\boldsymbol{X}}(y)\frac{\partial}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial s} \tag{13.4.72}$$

se reduce a

$$\tilde{\boldsymbol{X}} = \eta(t, y)\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial s} \equiv \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y} \tag{13.4.73}$$

que equivale a la cuadratura

$$\eta(t, y)\frac{\partial s}{\partial y} = 1 \Rightarrow s(t, y) = \int \frac{dy}{\eta(t, y)} + g(t) \tag{13.4.74}$$

Obteniendo así $s(t, y)$ basta reemplazar t por la función ya conocida $t(x, y)$ para obtener finalmente la coordenada normal $s(x, y)$.
Con esto, como hemos indicado, hemos reducido el orden de la EDO en una unidad más una cuadratura, y el mismo procedimiento de reducción puede aplicarse a la nueva EDO analizando las posibles simetrías, de nuevo en su forma normal.

Ejemplo detallado En el caso de que ω sea independiente de x, esto es,

$$y^{(n)} = \omega\left(y, y', .., y^{(n-1)}\right) \tag{13.4.75}$$

la coordenada normal es x, el generador $\boldsymbol{X} = \partial/\partial x$, y la transformación se escribe

$$t = y \quad , \quad s = x \quad , \quad y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} \tag{13.4.76}$$

para la nueva EDO de orden $n - 1$

$$s^{(n)} = \tilde{\omega}\left(t, s', .., s^{(n-1)}\right) \tag{13.4.77}$$

y la cuadratura

$$s = \int s'(t)dt \tag{13.4.78}$$

Ejemplo detallado Para la EDO de orden dos

$$y'' = (x - y)y'^3 \tag{13.4.79}$$

una de sus muchas simetrías es

$$\boldsymbol{X} = (x - y)\frac{\partial}{\partial x} \tag{13.4.80}$$

Al ser en este caso $\boldsymbol{X}(y) = 0$ tenemos la transformación

$$t = y \quad , \quad s(x, y) = \int \frac{dx}{\xi(x, y)} = \ln(x - y) + g(y) \tag{13.4.81}$$

y la transformación inversa

$$y = t \quad , \quad x = t + h(t)e^s \tag{13.4.82}$$

que transforma la ecuación diferencial inicial en

$$s' + s'^2 + 1 = 0 \quad , \quad s' = \frac{ds}{dt} \tag{13.4.83}$$

EDO de orden uno que puede integrarse fácilmente ya que tiene simetrías adicionales.

Sistemas Lagrangianos Finalizamos con un pequeño apunte sobre los sistemas Lagrangianos, para los cuales las ecuaciones diferenciales se derivan del Lagrangiano L en la forma

$$\frac{\partial L}{\partial y}+\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{i}\left(\frac{\partial L}{\partial y^{(i)}}\right)=0 \quad , \quad L=L(x,y,y',..,y^{(n)}) \tag{13.4.84}$$

Este tipo de sistemas pueden tener una simetría adicional a las simetrías del grupo de transformaciones puntuales de Lie, que deja invariante la acción $S\equiv\int Ldt$, y que se denomina simetría de *Noether*. Esto es, el sistema tiene un generador $\boldsymbol{X}$ de simetría tal que

$$\boldsymbol{X}\int Ldx=0 \tag{13.4.85}$$

Cuando sucede ésto, el procedimiento de reducción de orden resulta en una reducción de *dos*. Podemos verlo en el caso general asumiendo que el generador tiene la forma normal $\boldsymbol{X}=\partial/\partial y$. En este caso L no depende explícitamente de y, por lo que tenemos una integral primera

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{i}\left(\frac{\partial L}{\partial y^{(i)}}\right)=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{i-1}\left(\frac{\partial L}{\partial y^{(i)}}\right)=\text{cte} \tag{13.4.86}$$

tras una integración en x. Esta ecuación diferencial reducida tampoco depende explícitamente de y, por no depender L, por lo que $\boldsymbol{X}=\partial/\partial y$ será ahora una simetría puntual de Lie, y podemos aplicar el procedimiento estándar para reducir el orden de una unidad más.

13.5. Álgebras de Lie

13.5.1. Propiedades generales

Grupos multiparamétricos de transformaciones Ya hemos visto que en bastantes ocasiones las EDO presentan más de una simetría. Dado que cada simetría tiene asociada un grupo uniparamétrico de transformaciones, de parámetro ε, podemos decir que la simetría completa de la EDO tiene asociada un grupo multiparamétrico de transformaciones, de parámetros $\varepsilon_1,\varepsilon_2,..$, con generadores respectivos $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,..$, y cuyo generador completo tendrá la expresión

$$\boldsymbol{X}=\sum_i a_i\boldsymbol{X}_i \quad , \quad a_i=\text{cte} \tag{13.5.1}$$

La razón principal por la que utilizamos los generadores (infinitesimales) frente a las transformaciones finitas es que los generadores son operadores lineales (de ahí el sentido de la suma anterior). En esta expresión lineal, la independencia del orden en el que se añaden los generadores, $a_1\boldsymbol{X}_1+a_2\boldsymbol{X}_2=a_2\boldsymbol{X}_2+a_1\boldsymbol{X}_1$, etc, es indicación de que las transformaciones infinitesimales que representan conmutan entre sí.
Sin embargo, las transformaciones finitas no conmutan entre sí, como puede verse por ejemplo en las rotaciones tridimensionales: dos rotaciones respecto a dos ejes distintos no conmutan entre sí, ya que dan un resultado diferente en función de su orden de aplicación. En particular, utilizando la expresión exponencial $e^{\varepsilon\boldsymbol{X}}$ del elemento del grupo, vemos que en general

$$e^{\varepsilon_1\boldsymbol{X}_1}e^{\varepsilon_2\boldsymbol{X}_2}\neq e^{\varepsilon_2\boldsymbol{X}_2}e^{\varepsilon_1\boldsymbol{X}_1} \tag{13.5.2}$$

pero en el límite infinitesimal $\varepsilon\to 0$ sí se produce la conmutación al ser

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon_1\boldsymbol{X}_1}e^{\varepsilon_2\boldsymbol{X}_2} &\simeq (\boldsymbol{I}+\varepsilon_1\boldsymbol{X}_1)(\boldsymbol{I}+\varepsilon_2\boldsymbol{X}_2) \\ &\simeq \boldsymbol{I}+\varepsilon_1\boldsymbol{X}_1+\varepsilon_2\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{I}+\varepsilon_2\boldsymbol{X}_2+\varepsilon_1\boldsymbol{X}_1\simeq e^{\varepsilon_1\boldsymbol{X}_1}e^{\varepsilon_2\boldsymbol{X}_2} \end{aligned} \tag{13.5.3}$$

Propiedades de conmutación Este comportamiento general de no conmutación de los elementos del grupo tiene su efecto también en las propiedades de conmutación de los generadores, y da lugar a las denominadas *álgebras de Lie*.
Las propiedades generales para entender este tipo de álgebras son las siguientes:

- El *conmutador* de dos campos vectoriales $\boldsymbol{X}_a, \boldsymbol{X}_b$ es el campo vectorial definido por

$$\Big[\boldsymbol{X}_a, \boldsymbol{X}_b\Big] \equiv \boldsymbol{X}_a\boldsymbol{X}_b - \boldsymbol{X}_b\boldsymbol{X}_a \tag{13.5.4}$$

  Con esta definición, se satisface siempre la denominada *identidad de Jacobi*

$$\Big[\boldsymbol{X}_a, \Big[\boldsymbol{X}_b, \boldsymbol{X}_c\Big]\Big] + \Big[\boldsymbol{X}_c, \Big[\boldsymbol{X}_a, \boldsymbol{X}_b\Big]\Big] + \Big[\boldsymbol{X}_b, \Big[\boldsymbol{X}_c, \boldsymbol{X}_a\Big]\Big] = 0 \tag{13.5.5}$$

- En el caso de los generadores de simetría

$$\boldsymbol{X}_a \equiv \xi_a \frac{\partial}{\partial x} + \eta_a \frac{\partial}{\partial y} + .. \tag{13.5.6}$$

  el conmutador de dos generadores admite el desarrollo

$$\Big[\boldsymbol{X}_a, \boldsymbol{X}_b\Big] = (\boldsymbol{X}_a\xi_b + \boldsymbol{X}_b\xi_a)\frac{\partial}{\partial x} + (\boldsymbol{X}_a\eta_b + \boldsymbol{X}_b\eta_a)\frac{\partial}{\partial y} + .. \tag{13.5.7}$$

  y con ello puede verse que también es un generador de simetría. Este resultado también puede demostrarse aplicando las condiciones de simetría en términos del operador $\boldsymbol{A}$ de las integrales primeras para cada uno de los generadores:

$$\Big[\boldsymbol{X}_a, \boldsymbol{A}\Big] = \lambda_a \boldsymbol{A} \quad , \quad \Big[\boldsymbol{X}_b, \boldsymbol{A}\Big] = \lambda_b \boldsymbol{A} \Rightarrow \Big[\Big[\boldsymbol{X}_a, \boldsymbol{X}_b\Big], \boldsymbol{A}\Big] = \lambda \boldsymbol{A} \tag{13.5.8}$$

- Dado que todas las simetrías quedan descritas por el generador completo del sistema, cualquier conmutador de dos generadores, siendo también un generador, admitirá el desarrollo

$$\Big[\boldsymbol{X}_a, \boldsymbol{X}_b\Big] = C_{ab}^c \boldsymbol{X}_c \tag{13.5.9}$$

  donde C_{ab}^c son constantes, denominadas *constantes de estructura* del grupo de transformaciones dado.

Álgebras de Lie El conjunto de todos los generadores $\{\boldsymbol{X}_a\}$ más el conjunto de las constantes de estructura (esto es, los valores de todos los conmutadores posibles de cada par de generadores), constituyen el *álgebra de Lie*. La ventaja fundamental de este tipo de estructuras algebraicas es que no dependen de la representación (en este caso, vectorial) elegida para los generadores. Por ejemplo, si hubieramos elegido una representación matricial de los generadores, las relaciones de conmutación (constantes de estructura) serían las mismas substituyendo el operador vectorial $\boldsymbol{X}_a\boldsymbol{X}_b$ por su correspondiente expresión matricial como producto de dos matrices X_aX_b. En este sentido, la estructura del álgebra de Lie es universal y sólo depende de las propiedades de transformación del grupo y no de su representación.

13.5.2. Ejemplos de álgebras de Lie

Traslaciones en el espacio (x, y) Los dos generadores de las traslaciones en el espacio (x, y)

$$\boldsymbol{X}_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \boldsymbol{X}_y \equiv \frac{\partial}{\partial y} \tag{13.5.10}$$

conmutan entre sí

$$\Big[\boldsymbol{X}_x, \boldsymbol{X}_y\Big] = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} = 0 \tag{13.5.11}$$

por lo que las constantes de estructura son idénticamente nulas. Los grupos de transformaciones que tiene esta propiedad se denominan *abelianos*, y todas las transformaciones, sean infinitesimales o finitas, conmutan entre sí.

EDO $y'' = x^{-5}y^2$ El generador completo de las simetrías de esta EDO está dado por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} &= \left(ax^2 + bx\right)\frac{\partial}{\partial x} + y\left(ax + 3b\right)\frac{\partial}{\partial y} \\ &= a\left(x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}\right) + b\left(x\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial y}\right) \equiv a\boldsymbol{X}_1 + b\boldsymbol{X}_2\end{aligned} \tag{13.5.12}$$

Evaluando su conmutador encontramos

$$\Big[\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\Big] = \Big[x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial y}\Big] = -x^2\frac{\partial}{\partial x} - xy\frac{\partial}{\partial y} \equiv -\boldsymbol{X}_1 \tag{13.5.13}$$

que es nuevo un generador, por lo que tenemos un álgebra de Lie con la constante de estructura

$$C^1_{12} = -1 \tag{13.5.14}$$

siendo todas las demás C^a_{bc} idénticamente nulas, con $a, b, c = 1, 2$. En todo caso, al ser C^a_{bc} una cantidad antisimétrica en los índices inferiores, sólo es necesario identificar las constantes para índices bc distintos.

Traslaciones en (x, y) **más transformación de escala en** y Para este grupo de transformaciones, los generadores son

$$\boldsymbol{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \boldsymbol{X}_2 = \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \boldsymbol{X}_3 = y\frac{\partial}{\partial y} \tag{13.5.15}$$

que dan lugar al álgebra de Lie

$$\Big[\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\Big] = 0 \quad , \quad \Big[\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_3\Big] = 0 \quad , \quad \Big[\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3\Big] = \boldsymbol{X}_2 \tag{13.5.16}$$

Traslación en x **más rotación en plano** (x, y) Para este grupo de transformaciones los generadores son

$$\boldsymbol{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \boldsymbol{X}_2 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \tag{13.5.17}$$

y analizando su conmutador vemos que

$$\Big[\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\Big] = \frac{\partial}{\partial y} \tag{13.5.18}$$

que no corresponde a ninguna combinación lineal de los generadores anteriores. Esto nos indica que por sí solos $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ no pueden formar un álgebra de Lie, y que debemos añadir la traslación en y

$$\boldsymbol{X}_3 = \frac{\partial}{\partial y} \tag{13.5.19}$$

para obtener el álgebra de Lie correspondiente

$$\Big[\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\Big] = \boldsymbol{X}_3 \quad , \quad \Big[\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_3\Big] = 0 \quad , \quad \Big[\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3\Big] = \boldsymbol{X}_1 \tag{13.5.20}$$

13.6. Simetrías dinámicas

13.6.1. Transformaciones dinámicas

Definición general De forma sencilla, las transformaciones dinámicas (y las correspondientes simetrías dinámicas) son las que tienen generadores que dependen de las derivadas de la función y. Para una EDO de primer orden, el generador de la transformación puntual es en este caso

$$\boldsymbol{X} = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{13.6.1}$$

y por definición no depende de y' por lo que para estas EDO las transformaciones dinámicas y puntuales coinciden. Para un EDO de segundo orden, el generador más general de la transformación dinámica está dado por

$$\boldsymbol{X} = \xi(x,y,y')\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y,y')\frac{\partial}{\partial y} + \chi(x,y,y')\frac{\partial}{\partial y'} \tag{13.6.2}$$

Condición de simetría Fijándonos en esta EDO de segundo orden

$$y'' = \omega(x,y,y') \tag{13.6.3}$$

el operador $\boldsymbol{A}$ que define las integrales primeras se escribe

$$\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + \omega(x,y,y')\frac{\partial}{\partial y'} \tag{13.6.4}$$

y la condición de simetría $\big[\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\big] = \lambda\boldsymbol{A}$ da lugar a las ecuaciones por separado para cada uno de los coeficientes del desarrollo

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}: \quad \lambda = -\boldsymbol{A}\xi \\
&\frac{\partial}{\partial y}: \quad \chi = \boldsymbol{A}\eta - y'\boldsymbol{A}\xi \\
&\frac{\partial}{\partial y'}: \quad \xi\omega_{,x} + \eta\omega_{,y} + \Big[\boldsymbol{A}\eta - y'\boldsymbol{A}\xi\Big]\omega_{,y'} - \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}\eta\right) + y'\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}\xi\right) + 2\omega\boldsymbol{A}\xi = 0
\end{aligned} \tag{13.6.5}$$

De estas tres ecuaciones, las dos primeras constituyen las definiciones para las funciones λ y χ respectivamente, y la tercera es la *única* ecuación en derivadas parciales que debe resolverse para obtener las funciones ξ,η desconocidas, dado que conocemos ω y el operador $\boldsymbol{A}$. Dado que sólo tenemos una ecuación y dos funciones incógnitas el sistema siempre tiene solución, e incluso podriamos exigir que una de ellas sea nula, por ejemplo $\xi = 0$.

Ejemplo detallado Consideremos la EDO de segundo orden del oscilador armónico

$$y'' = -y \tag{13.6.6}$$

La condición de simetría para ξ,η se lee

$$\eta + \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}\eta\right) - y'\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}\xi\right) + 2y\boldsymbol{A}\xi = 0 \quad , \quad \boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial y'} \tag{13.6.7}$$

Algunas soluciones sencillas son

$$\begin{aligned}
&\xi = yy' \quad , \quad \eta = -y^3 \quad , \quad \chi = -\left(2y^2 + y'^2\right)y' \\
&\xi = y'\operatorname{sen}x \quad , \quad \eta = -y^2\operatorname{sen}x \quad , \quad \chi = -yy'\operatorname{sen}x - \left(y^2 + y'^2\right)\cos x \\
&\xi = y'\cos x \quad , \quad \eta = -y^2\cos x \quad , \quad \chi = -yy'\cos x + \left(y^2 + y'^2\right)\operatorname{sen}x
\end{aligned} \tag{13.6.8}$$

13.6.2. Significado de las simetrías dinámicas

Elección gauge Podemos deducir del análisis anterior que el número de simetrías dinámicas de una EDO es ilimitado, ya que tenemos una única ecuación a resolver para las dos funciones incógnita ξ,η. La razón estriba en que la condición de simetría $\big[\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\big] = \lambda\boldsymbol{A}$ establece que si $\boldsymbol{X}$ es simetría dinámica también lo será el operador

$$\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X} + \rho(x,z)\boldsymbol{A} \tag{13.6.9}$$

siendo ρ cualquier función arbitraria de x y de $z \equiv (y,y',..)$. Recordando la definición de $\lambda = -\boldsymbol{A}\xi$ podemos prescindir de estas infinitas soluciones con la *elección gauge* $\xi \equiv 0$, lo que equivale a $\lambda = 0$ y $\big[\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\big] = 0$.

Integrales primeras φ como variables Si además elegimos a las integrales primeras, soluciones de

$$\boldsymbol{A}\varphi \equiv \frac{d}{dx}\varphi = 0 \tag{13.6.10}$$

como las variables dependientes del sistema, en lugar de las variables $z \equiv (y, y', ..)$, vemos que en este caso

$$\boldsymbol{A} \equiv \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{d\overbrace{\varphi}^{0}}{dx}\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial x} \tag{13.6.11}$$

y la condición de simetría para el gauge $\xi = 0$ se reduce a

$$\boldsymbol{X} \equiv \phi(x,\varphi)\frac{\partial}{\partial \varphi} \Rightarrow \Big[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}\Big] = \Big[\phi\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial x}\Big] = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \tag{13.6.12}$$

luego

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{X} \equiv \phi(\varphi)\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{13.6.13}$$

Base de generadores En este sentido, si $\{\varphi^k\}$ es el conjunto de las n integrales primeras de la EDO de orden n, con $k = 1, .., n$, los n generadores

$$\boldsymbol{X}_k \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi^k}, \quad k = 1, .., n \tag{13.6.14}$$

forman una base de los generadores de las simetrías dinámicas del sistema, con elemento genérico

$$\boldsymbol{X} \equiv a^k(\varphi)\frac{\partial}{\partial \varphi^k} \tag{13.6.15}$$

La construcción de esta base dependerá del conjunto de integrales primeras elegido, y tiene la propiedad de que todos los elementos de la base $\boldsymbol{X}_k$ conmutan entre sí, y por la condición de simetría conmutan con $\boldsymbol{A}$.
Además dados dos generadores arbitrarios $\boldsymbol{X}_a, \boldsymbol{X}_a$, su conmutador también es un generador de simetría dinámica, y admite el desarrollo

$$\Big[\boldsymbol{X}_a, \boldsymbol{X}_b\Big] = C^k_{ab}(\varphi)\boldsymbol{X}_k \tag{13.6.16}$$

A diferencia de las transformaciones puntuales de Lie donde las constantes de estructura C^c_{ab} eran por definición constantes, y los generadores formaban el álgebra de Lie correspondiente, ahora los términos $C^k_{ab}(\varphi)$ no son constante, dependen de las integrales primeras, y los generadores no forman un álgebra de Lie.

Significado de las simetrías dinámicas Dado que la solución general de la EDO de orden n puede escribirse como

$$y = y(x, \varphi) \tag{13.6.17}$$

donde φ es el conjunto de las n constantes de integración, la acción de cada uno de los generadores de la base

$$\boldsymbol{X}_k \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \tag{13.6.18}$$

consiste en cambiar la constante φ^k. Ya que este cambio general de las constantes de integración aplica soluciones en soluciones de la EDO, definen una transformación de simetría, que a simple vista parecería complicada de determinar si hubieramos escrito las integrales primeras en función de y y sus derivadas.

13.7. Referencias

- Stephani H. *Differential equations. Their solutions using symmetries*

Capítulo 14

Método de Lagrange en Mecánica y Ondas

14.1. Lagrangiano

Se define como la diferencia entre la energía cinética del sistema T y su energía potencial V

$$L = T - V \tag{14.1.1}$$

y será función en general de las coordenadas x, de las velocidades $\dot{x}$, y del tiempo t. Aquí x representa el conjunto de coordenadas necesario para definir de forma unívoca la posición del sistema, y no siempre corresponden a coordenadas de longitud.

14.2. Integral de acción S

Se define como la integral respecto al tiempo del Lagrangiano

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t)dt \tag{14.2.1}$$

Es una funcional (función de funciones) de la trayectoria del sistema $x(t)$. Para cada trayectoria particular, la integral de acción entre los tiempos considerados, tiene un valor determinado.

14.3. Principio de Mínima acción

Establece que la trayectoria real del sistema, entre todas las trayectorias compatibles con las condiciones frontera $x(t_1) = x_1$ y $x(t_2) = x_2$, es aquella que corresponde al valor mínimo de la funcional acción. Es decir, la variación de la acción es nula para la trayectoria real

$$\delta S = 0 \tag{14.3.1}$$

14.4. Ecuaciones del movimiento

En la formulación de Lagrange, la ecuación que caracteriza la evolución del sistema es la ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{14.4.1}$$

con

$$L = T - V \tag{14.4.2}$$

de forma que existe una ecuación de Euler−Lagrange para cada coordenada (independiente) del sistema.

14.5. Evaluación de la energía cinética

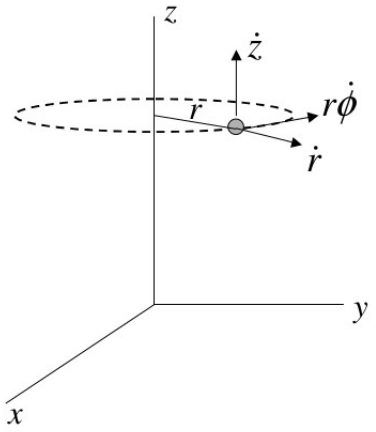
En la mayoría de los casos,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{14.5.1}$$

por lo que la dificultad estriba en determinar v^2 en función de las derivadas temporales de las coordenadas del sistema. En coordenadas cartesianas es fácil y directo

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \tag{14.5.2}$$

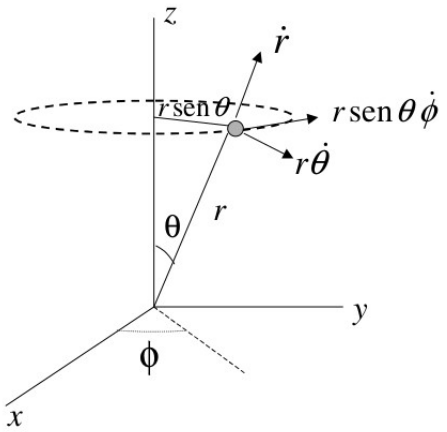
En coordenadas cilíndricas, la velocidad tiene tres componentes, $\dot{z}$ en la dirección vertical, $\dot{r}$ en la dirección radial y $r\dot{\phi}$ en la dirección tangente al círculo de radio r,



con lo cual

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 \tag{14.5.3}$$

En coordenadas esféricas, la velocidad lineal de rotación en torno al eje z es $r\text{sen}\theta\dot{\phi}$, la velocidad lineal de rotación respecto al eje perpendicular al eje z es $r\dot{\theta}$, y la velocidad radial es $\dot{r}$



con lo cual

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\text{sen}^2\theta\ \dot{\phi}^2 \tag{14.5.4}$$

Por último, destacar que en el caso de un cuerpo continuo en movimiento, la energía cinética será la suma de la energía cinética de rotación y de la energía cinética de traslación.

14.6. Evaluación de la energía potencial

Si F es la fuerza ejercida sobre el sistema en la dirección del eje x, la energía potencial en la posición x viene dada por

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F dx \tag{14.6.1}$$

integrando desde un punto arbitrario x_0 tal que $V(x_0) \equiv 0$. Si la coordenada del sistema es un ángulo de giro θ la energía potencial satisface

$$V = -\int_{\theta_0}^{\theta} Fr\, d\theta \tag{14.6.2}$$

14.7. Fuerzas de ligadura

Las ligaduras son las condiciones adicionales que deben satisfacer las coordenadas del sistema, y que limitan el número de coordenadas independientes del sistema. Por ejemplo, una partícula de masa m que se mueve por el interior de un aro de radio R tiene dos coordenadas (r, θ), una ligadura $r = R$ y una sola coordenada independiente, θ.
A su vez, las fuerzas de ligadura λ son las fuerzas que obligan al sistema a seguir una ligadura. Por ejemplo, en un péndulo es la tensión T del hilo la fuerza de ligadura que hace que la masa se sitúe a una distancia fija (la longitud del hilo) del punto de suspensión.

14.8. Metodología

- Si no nos interesa conocer las fuerzas de ligadura, desde un principio escribimos el Lagrangiano en función sólo de las coordenadas independientes y resolvemos las ecuaciones del movimiento.

- Si nos interesa conocer las fuerzas de ligadura, escribimos el Lagrangiano como función de todas las coordenadas (sean independientes o no) del sistema, y definimos el Lagrangiano modificado

  $$L' \equiv L + \lambda \cdot (\textit{ligadura}) \tag{14.8.1}$$

  donde λ es la fuerza de ligadura que multiplica a la ecuación de la ligadura expresada en una forma que sea idénticamente nula, esto es, $\textit{ligadura} \equiv 0$. Con esto el Lagrangiano modificado es estrictamente igual al Lagrangiano inicial. Entonces, la condición de acción mínima exigiendo el cumplimiento de la ligadura da lugar a las ecuaciones de Euler−Lagrange para el Lagrangiano modificado L', más la condición

  $$\frac{\partial L'}{\partial \lambda} = 0 \tag{14.8.2}$$

  que no es más que la ecuación de la ligadura aplicada, $\textit{ligadura} = 0$. Así resolvemos de forma acoplada las ecuaciones de movimiento y la fuerza de ligadura. Es método es análogo al cálculo de extremos condicionados en Análisis.

- Como regla general, λ debe multiplicar a la ecuación de ligadura resuelta para las coordenadas, y no por ejemplo para el cuadrado de las coordenadas. Es decir, si la ligadura es $x^2 + y^2 \equiv a^2$, el Lagrangiano modificado se escribe

  $$L' = L + \lambda \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right) \tag{14.8.3}$$

  y así λ tiene las dimensiones correctas de fuerza, y está dirigida en la dirección creciente de $\sqrt{x^2 + y^2}$.

14.9. Apéndice. Formulación Hamiltoniana

Para describir el estado físico de un sistema no es necesario escoger las coordenadas rectangulares usuales. Es posible escoger cualquier conjunto de parámetros que especifiquen de forma completa el estado del sistema. Estas cantidades no tienen por qué tener dimensión de longitud, ya que dependiendo del problema puede ser más adecuado elegir algún parámetro sin dimensión, como puede ser un ángulo. Por *coordenadas generalizadas* se entiende dicho conjunto de parámetros que describe completamente el estado del sistema. La finalidad que se busca al elegir uno u otro conjunto de coordenadas es obtener las ecuaciones de movimiento resultantes en la forma más simple posible, y que permita una interpretación del movimiento lo más sencillamente posible.
Se definen los *momentos generalizados* según la fórmula

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \tag{14.9.1}$$

con lo cual, las ecuaciones de Euler−Lagrange pueden escribirse en la forma

$$\frac{d}{dt}p = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{14.9.2}$$

Una consecuencia directa es que si el Lagrangiano no depende de la coordenada generalizada x, su momento generalizado p se conserva constante en el tiempo.
La descripción del movimiento utilizando las coordenadas generalizadas y sus momentos asociados de forma independiente se denomina *formulación Hamiltoniana*. Con esto el estado del sistema queda descrito no sólo por su posición sino también por el conjunto de velocidades generalizadas que definen su movimiento. Se introduce el Hamiltoniano del sistema en la forma

$$H(x, p, t) = \dot{x}p - L(x, \dot{x}, t) \tag{14.9.3}$$

donde debe entenderse que las velocidades generalizadas se introducen como funciones de x, p y t. Es decir, de la ecuación $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, se despejan las velocidades generalizadas respecto de las coordenadas y momentos generalizados.
Calculando ahora la diferencial total del Hamiltoniano, se obtiene

$$dH = \dot{x}dp + pd\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial x}dx - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}d\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{14.9.4}$$

y en virtud de las ecuaciones de Euler−Lagrange y de la definición de momento generalizado, quedo reducido a la expresión

$$dH = \dot{x}dp - \dot{p}dx - \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{14.9.5}$$

de donde se obtienen de forma directa, mediante la identificación de términos, las *ecuaciones del movimiento en la formulación Hamiltoniana*

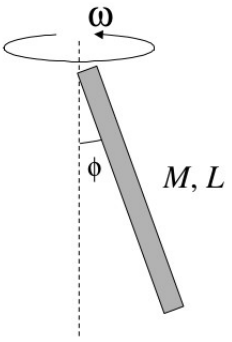
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad , \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{14.9.6}$$

La última ecuación expresa el hecho de que si el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, el Hamiltoniano se conserva constante en el tiempo.

14.10. Ejercicios resueltos

14.10.1. Varilla rígida en rotación uniforme

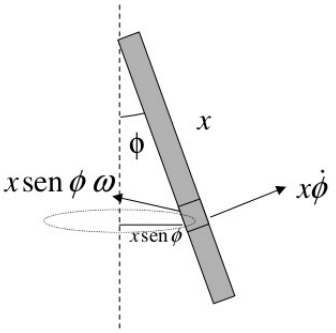
Determinar por el método Lagrangiano la posición de equilibrio de una varilla rígida de masa M y longitud L, con un extremo fijo a un eje vertical que gira con velocidad angular constante ω.



Sea ϕ el ángulo que forma la varilla con el eje vertical. Definimos x como la coordenada de posición de un elemento de masa dm a lo largo de la varilla, respecto del punto fijo. La energía cinética de la varilla es

$$T = \frac{1}{2}\int v^2(x)dm \tag{14.10.1}$$

siendo $v(x)$ la velocidad del elemento de masa dm. Dicha velocidad tiene dos componentes,



una perpendicular a la varilla con valor $x\dot{\phi}$, en la dirección creciente del ángulo ϕ, y otra en dirección horizontal, tangente a la trayectoria circular de dm, con valor $\omega r = \omega x \text{sen}\phi$, siendo $r = x\text{sen}\phi$ el radio de giro del elemento dm. La primera componente se debe al giro de la varilla sobre el punto fijo, y la segunda al giro de la varilla respecto al eje vertical. Por tanto,

$$v^2(x) = \left(x\dot{\phi}\right)^2 + (\omega x \text{sen}\phi)^2 = x^2\left(\dot{\phi}^2 + \omega^2 \text{sen}^2\phi\right) \tag{14.10.2}$$

Por ser la varilla un cuerpo homogéneo, el elemento de masa lineal es $dm = \frac{M}{L}dx$, con lo cual, la energía cinética toma el valor

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L x^2\left(\dot{\phi}^2 + \omega^2 \text{sen}^2\phi\right)dx \tag{14.10.3}$$

$$= \left(\dot{\phi}^2 + \omega^2 \text{sen}^2\phi\right)\frac{1}{2}\int_0^L x^2 dx = \frac{1}{6}ML^2\left(\dot{\phi}^2 + \omega^2 \text{sen}^2\phi\right) \tag{14.10.4}$$

Medimos la energía potencial gravitatoria respecto de la posición horizontal de la varilla ($\phi = 90°$)

$$V = \int gydm = g\int ydm = Mgy_{cm} \tag{14.10.5}$$

siendo y_{cm} la posición vertical del centro de masas respecto del plano horizontal de referencia,

$$y_{cm} = -\frac{L}{2}\cos\phi \tag{14.10.6}$$

con lo cual

$$V = -Mg\frac{L}{2}\cos\phi \tag{14.10.7}$$

El Lagrangiano de la varilla es

$$L = T - V = \frac{1}{6}ML^2\left(\dot{\phi}^2 + \omega^2\text{sen}^2\phi\right) + Mg\frac{L}{2}\cos\phi \tag{14.10.8}$$

y la ecuación de Euler−Lagrange resulta ser

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\phi} \tag{14.10.9}$$

ó

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}ML^2\dot{\phi}\right) = \frac{1}{3}ML^2\omega^2\text{sen}\phi\cos\phi - \frac{1}{2}MgL\text{sen}\phi \tag{14.10.10}$$

y para la posición de equilibrio, $\ddot{\phi} = 0$, obtenemos la condición

$$\frac{1}{3}ML^2\omega^2\text{sen}\phi\cos\phi = \frac{1}{2}MgL\text{sen}\phi \tag{14.10.11}$$

con dos soluciones, una estable

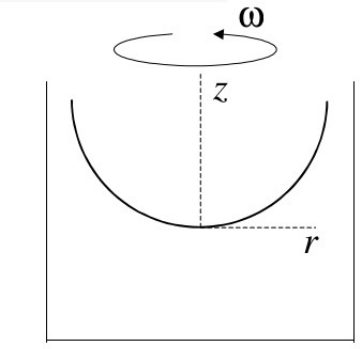
$$\cos\phi = \frac{3}{2}\frac{g}{L\omega^2} \tag{14.10.12}$$

y otra inestable

$$\text{sen}\phi = 0 \tag{14.10.13}$$

14.10.2. Superficie libre de un líquido

Determinar la forma que adquiere la superficie libre de un líquido dentro de una vasija cilíndrica en rotación.



Por simetría, la forma será $z = f(r)$, donde z es la altura de un punto material de la superficie libre y r su distancia radial al eje de giro. Sin tener en cuenta la ligadura, la velocidad de un elemento génerico del fluido de masa m situado en su superficie tiene tres componentes perpendiculares entre sí, una componente radial $dotr$, una componente vertical $dotz$, y una componente en la dirección tangente a la circunferencia de radio r, de valor ωr.Entonces,

$$v^2 = \dot{r}^2 + \dot{z}^2 + \omega^2 r^2 \tag{14.10.14}$$

y la energía cinética del elemento de masa es

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + \omega^2 r^2\right) \tag{14.10.15}$$

y su energía potencial respecto de la posición de equilibrio (el fondo del recipiente, $z = 0$) es

$$V = mgz \tag{14.10.16}$$

Para tener en cuenta la ligadura, definimos el Lagrangiano modificado

$$L' = L + \lambda \cdot (z - f(r)) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + \omega^2 r^2\right) - mgz + \lambda\left(z - f(r)\right) \tag{14.10.17}$$

Las ecuaciones de Euler−Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial r} = 0 \quad \longrightarrow \quad m\ddot{r} = m\omega^2 r - \lambda f'(r) \tag{14.10.18}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial z} = 0 \quad \longrightarrow \quad m\ddot{z} = \lambda - mg \tag{14.10.19}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda} = 0 \quad \longrightarrow \quad z = f(r) \tag{14.10.20}$$

Para calcular ahora la posición de equilibrio del elemento de masa, basta tomar las condiciones $\ddot{z} = 0 = \ddot{r}$ en las ecuaciones anteriores. Obtenemos la solución

$$m\omega^2 r = \lambda f'(r) \tag{14.10.21}$$

$$\lambda = mg \tag{14.10.22}$$

$$z = f(r) \tag{14.10.23}$$

De las dos primeras, eliminando la fuerza de ligadura λ, encontramos la pendiente de la curva de equilibrio

$$f'(r) = \frac{\omega^2 r}{g} \tag{14.10.24}$$

Integrando esta última ecuación con la condición $z = 0$ si $r = 0$z, es decir, $f(0) = 0$, obtenemos

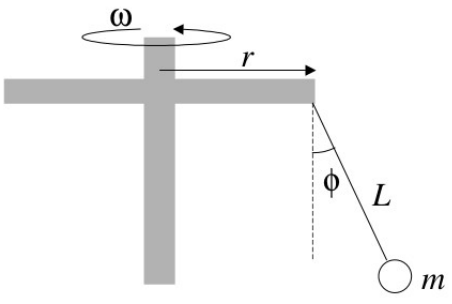
$$f(r) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 r^2}{g} \tag{14.10.25}$$

y la forma de la superficie libre resulta ser la de un paraboloide

$$z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 r^2}{g} \tag{14.10.26}$$

14.10.3. Masa puntual ligada a volante en rotación

Determinar la posición de equilibrio de una masa m unida a una cuerda de longitud L, a su vez unida a un volante de radio r que gira con velocidad angular constante ω.



La velocidad de la masa m tiene dos componentes perpendiculares entre sí, $L\dot{\phi}$, en dirección perpendicular a la cuerda y $\omega\left(r+L\text{sen}\phi\right)$ en dirección tangente a la circunferencia de giro en el plano horizontal de radio $r+L\text{sen}\phi$. Con esto, la energía cinética de la masa m es

$$T=\frac{1}{2}m\left(L^2\dot{\phi}^2+\omega^2\left(r+L\text{sen}\phi\right)^2\right) \tag{14.10.27}$$

y la energía potencial respecto al plano horizontal ($\phi=90°$) es

$$V=-mgL\cos\phi \tag{14.10.28}$$

El Lagrangiano del sistema es

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left(L^2\dot{\phi}^2+\omega^2\left(r+L\text{sen}\phi\right)^2\right)+mgL\cos\phi \tag{14.10.29}$$

y la ecuación del movimiento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right)=\frac{\partial L}{\partial\phi} \tag{14.10.30}$$

resulta ser

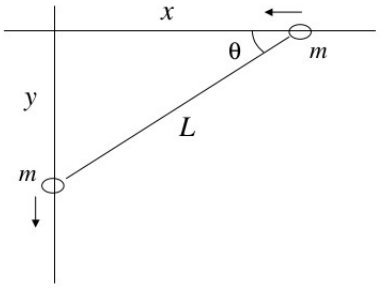
$$mL^2\ddot{\phi}=mL\left(r+L\text{sen}\phi\right)\omega^2\cos\phi-mgL\text{sen}\phi \tag{14.10.31}$$

Para el equilibrio, $\ddot{\phi}=0$, obtenemos

$$\tan\phi=\frac{\omega^2}{g}\left(r+L\text{sen}\phi\right) \tag{14.10.32}$$

14.10.4. Dos masas ligadas a cuerda inextensible

Determinar la ecuación del movimiento de un sistema formado por una cuerda de longitud L, con una masa m en cada extremo, de forma que una de ellas se mueve sobre el eje x, y la otra sobre el eje y. Inicialmente la cuerda se encuentra en la posición horizontal ($\theta=0$).



Si no tenemos en cuenta la ligadura del sistema, la única coordenada del sistema es el ángulo θ que forma la cuerda con el eje x. La energía cinética del sistema es

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2 \tag{14.10.33}$$

donde

$$x=L\cos\theta\quad,\quad y=L\text{sen}\phi \tag{14.10.34}$$

y de aquí, derivando respecto del tiempo, encontramos

$$\dot{x}=-L\dot{\theta}\,\text{sen}\theta\quad,\quad\dot{y}=L\dot{\theta}\cos\theta \tag{14.10.35}$$

con lo cual la energía cinética tiene la expresión

$$T=\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 \tag{14.10.36}$$

La energía potencial respecto a la posición de equilibrio horizontal ($\theta = 0$) es igual a la energía potencial de la masa que desliza por el eje y

$$V = -mgy = -mgL \operatorname{sen}\theta \tag{14.10.37}$$

El Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL \operatorname{sen}\theta \tag{14.10.38}$$

y la ecuación de movimiento resultante es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \longrightarrow \quad mL^2\ddot{\theta} = mgL\cos\theta \tag{14.10.39}$$

ó

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L}\cos\theta \tag{14.10.40}$$

14.10.5. Fuerza de ligadura masas ligadas a cuerda inextensible

Determinar la fuerza de ligadura en el caso anterior.

Las variables del sistema son (x, y) y la ligadura $L^2 \equiv x^2 + y^2$. El Lagrangiano modificado es

$$L' = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgy + \lambda\left(\sqrt{x^2+y^2} - L\right) \tag{14.10.41}$$

siendo λ la fuerza de ligadura. La novedad que nos encontramos aquí, respecto a problemas anteriores, es la que fuerza de ligadura no será una constante, y dependerá en principio de las coordenadas, esto es, $\lambda = \lambda(x, y)$.

En este caso, las ecuaciones de Euler−Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad m\ddot{x} = \lambda\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2} - L\right) \tag{14.10.42}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial y} = 0 \quad \longrightarrow \quad m\ddot{y} = mg + \lambda\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2} - L\right) \tag{14.10.43}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda} = 0 \quad \longrightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = L \tag{14.10.44}$$

Utilizando la tercera ecuación (ecuación de ligadura) vemos que los términos proporcionales a $\partial\lambda/\partial x$ y $\partial\lambda/\partial y$ se anulan, y las dos primeras ecuaciones quedan

$$m\ddot{x} = \lambda\frac{x}{L} \tag{14.10.45}$$

$$m\ddot{y} = mg + \lambda\frac{y}{L} \tag{14.10.46}$$

Para integrar estas ecuaciones, nos ayudamos de una ecuación adicional, de conservación de la energía

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mgy \tag{14.10.47}$$

y como inicialmente la cuerda está en reposo horizontalmente, E = 0 . Tenemos así las tres ecuaciones

$$m\ddot{x} = \lambda\frac{x}{L} \tag{14.10.48}$$

$$m\ddot{y} = mg + \lambda\frac{y}{L} \tag{14.10.49}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2gy \tag{14.10.50}$$

de donde podremos obtener la fuerza de ligadura. Multiplicando la primera por x, la segunda por y, sumando el resultado, obtenemos

$$m\left(x\ddot{x}+y\ddot{y}\right)=\lambda L+mgy \tag{14.10.51}$$

Derivando dos veces la condición de ligadura $L^2=x^2+y^2$, encontramos

$$x\ddot{x}+y\ddot{y}=-\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) \tag{14.10.52}$$

con lo cual, con ayuda de la conservación de energía, la ecuación anterior queda en la forma

$$-m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\lambda L+mgy \tag{14.10.53}$$

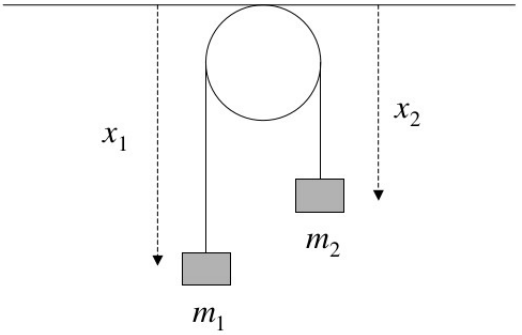
de forma que

$$\lambda\equiv\lambda(y)=-3mg\frac{y}{L}=-3mg\,\text{sen}\theta \tag{14.10.54}$$

Con este resultado, hemos comprobado de forma directa cómo se puede calcular la fuerza de ligadura, incluso cuando depende de las coordenadas. Ésta es una característica de las denominadas *ligaduras holónomas*, que tienen la forma $f(q,t)=0$, es decir, dependen únicamente de las coordenadas, y posiblemente del tiempo.

14.10.6. Máquina de Atwood

Determinar la tensión de la cuerda y la aceleración de caída de las masas en una máquina de Atwood simple, mediante el método Lagrangiano.



La tensión de la cuerda es la fuerza de ligadura que mantiene unidas las masas a la cuerda de longitud L. Tomamos nuestro origen de coordenadas en el punto más alto de la trayectoria. Sean (x_1,x_2) las coordenadas de ambas masas respecto del punto de referencia. La energía cinética del sistema es

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \tag{14.10.55}$$

la energía potencial se mide respecto al punto de referencia resultando ser

$$V=-m_1gx_1-m_2gx_2 \tag{14.10.56}$$

Por último, la ecuación de la ligadura es

$$x_1+x_2=L \tag{14.10.57}$$

El Lagrangiano modificado es

$$L'=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+m_1gx_1+m_2gx_2+\lambda\left(x_1+x_2-L\right) \tag{14.10.58}$$

y las ecuaciones de Euler−Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L'}{\partial x_1} = 0 \quad \longrightarrow \quad m_1\ddot{x}_1 = m_1 g + \lambda \tag{14.10.59}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L'}{\partial x_2} = 0 \quad \longrightarrow \quad m_2\ddot{x}_2 = m_2 g + \lambda \tag{14.10.60}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda} = 0 \quad \longrightarrow \quad x_1 + x_2 = L \tag{14.10.61}$$

De la condición de ligadura obtenemos $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$. Restando las dos primeras ecuaciones obtenemos la aceleración de caída de las masas

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)\,g \tag{14.10.62}$$

ó

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \tag{14.10.63}$$

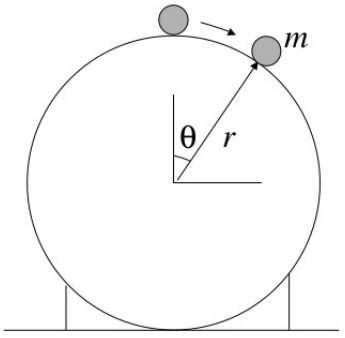
Entonces, de la primera ecuación se obtiene la fuerza de ligadura, la tensión de la cuerda,

$$T = \lambda = -\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \tag{14.10.64}$$

El signo menos indica que la tensión está dirigida en el sentido contrario al aumento de las coordenadas x_1, x_2, esto es, dirigida verticalmente hacia arriba en los dos tramos de la cuerda a ambos lados de la polea.

14.10.7. Masa puntual sobre superficie esférica

Una masa puntual m se encuentra en reposo en el punto más alto de un esfera fijada al suelo de radio R. Determinar por el método Lagrangiano la ecuación de su movimiento de caída cuando se separa ligeramente del punto de equilibrio, y establecer el punto en el que la masa se separa de la superficie esférica.



La fuerza que mantiene a la masa sobre la superficie esférica es igual a la reacción normal N de la esfera sobre ella. Tomamos coordenadas polares centradas en el origen de la esfera en el plano de la trayectoria de caída. Las coordenadas de la masa m serán (r, θ). La energía cinética de la masa m está dada por

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \tag{14.10.65}$$

La energía potencial respecto de la posición de equilibrio ($\theta = 0^\circ$) está dada por

$$V = -mg\,(R - r\cos\theta) \tag{14.10.66}$$

y la condición de ligadura es

$$r = R \tag{14.10.67}$$

El Lagrangiano modificado es

$$L' = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mg\left(R - r\cos\theta\right) + N\left(r - R\right) \tag{14.10.68}$$

y la ecuaciones de Euler−Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial r} = 0 \quad \longrightarrow \quad m\ddot{r} = -mg\cos\theta + N + mr\dot{\theta}^2 \tag{14.10.69}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial \theta} = 0 \quad \longrightarrow \quad mr\ddot{\theta} = mgr\,\text{sen}\theta \tag{14.10.70}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda} = 0 \quad \longrightarrow \quad r = R \tag{14.10.71}$$

Con ayuda de la condición de ligadura, de la segunda ecuación obtenemos la ecuación del movimiento para la trayectoria de caída

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\text{sen}\theta \tag{14.10.72}$$

y de aquí, para la primera ecuación obtenemos

$$N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 \tag{14.10.73}$$

por lo que necesitamos encontrar primero $\dot{\theta}$ en función de θ. Partimos de la relación cinemática

$$\ddot{\theta} \equiv \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \tag{14.10.74}$$

con lo cual, la ecuación de movimiento puede escribirse

$$\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{R}\text{sen}\theta \tag{14.10.75}$$

Realizamos la integral con la condición inicial, $\dot{\theta} = 0$ si $\theta = 0$, resultando

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{R}\left(\cos\theta - 1\right) \tag{14.10.76}$$

con lo cual

$$mR\dot{\theta}^2 = 2mg\left(\cos\theta - 1\right) \tag{14.10.77}$$

y así, la normal adquiere el valor

$$N = 3mg\cos\theta - 2mg \tag{14.10.78}$$

La partícula abandona la superficie de la esfera cuando la normal se haga cero. Esto es, en la posición angular

$$N = 0 \quad \longrightarrow \quad \theta = \text{arc}\cos\frac{2}{3} \tag{14.10.79}$$

14.10.8. Partícula en superficie interior de un cilindro

Consideramos una partícula de masa m que se mueve sobre la superficie interior del cilindro vertical $x^2+y^2 = R^2$, de radio R. La partícula sufre la acción de una fuerza central dirigida hacia el origen de coordenadas, $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$. Determinar las ecuaciones del movimiento utilizando el método Hamiltoniano.

En coordenadas cilíndricas, tomando el eje z en la dirección del eje del cilindro, la velocidad de la masa m satisface

$$v^2 = R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 \tag{14.10.80}$$

puesto que la coordenada radial siempre es constante, $r = R$. La energía cinética del sistema es, por tanto

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) \tag{14.10.81}$$

Por otro lado, la energía potencial de la partícula en presencia de la fuerza central es

$$V = -\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}k\boldsymbol{r}^2 = \frac{1}{2}k\left(R^2 + z^2\right) \tag{14.10.82}$$

con lo cual, el Lagrangiano del sistema queda escrito en la forma

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(R^2 + z^2\right) \tag{14.10.83}$$

Las coordenadas generalizadas que describen completamente el estado del sistema son ϕ y z. Los momentos generalizados son, respectivamente

$$p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2\dot{\phi} \quad , \quad p_z \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \tag{14.10.84}$$

de donde deben despejarse las velocidades generalizadas, obteniéndose

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mR^2} \quad , \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m} \tag{14.10.85}$$

Finalmente el Hamiltoniano está definido en la forma

$$H = \dot{\phi}p_\phi + \dot{z}p_z - L = \frac{p_\phi^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}k\left(R^2 + z^2\right) \tag{14.10.86}$$

Las ecuaciones del movimiento correspondientes a este Hamiltoniano son cuatro

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad , \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz \tag{14.10.87}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mR^2} \quad , \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \tag{14.10.88}$$

La solución completa es

$$p_\phi = mR^2\dot{\phi} = \text{cte} \tag{14.10.89}$$

por lo que el momento angular alrededor del eje z es constante. Este hecho estaba asegurado por ser el eje z el eje de simetría del sistema. Por otro lado, la ecuación de movimiento para la coordenada z

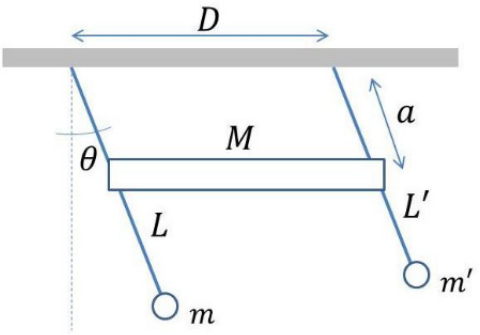
$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0 \tag{14.10.90}$$

representa un movimiento armónico simple.

14.11. Ejercicios de Autoevaluación

14.11.1. Dos péndulos de varilla (M)

Sea el sistema de la figura, formado por dos péndulos de varilla con longitudes L y L', y masas m y m', acoplados entre sí por una barra rígida de longitud D y masa M, fijada a los mismos a una distancia a del punto de sujeción.



(a) Determinar el Lagrangiano del sistema.

(b) Utilizando la aproximación de ángulos de giro pequeños, sen$\theta \approx \theta$, hallar la ecuación de movimiento del sistema, y a partir de ésta evaluar cuál sería la longitud del péndulo simple equivalente.

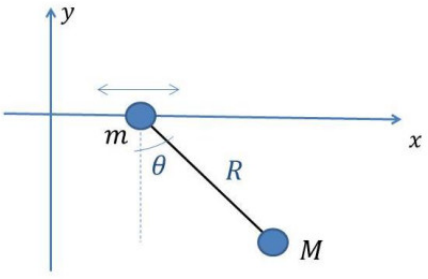
Sol:

(a) $\frac{1}{2}\left(mL^2 + m'L'^2 + Ma^2\right)\dot{\theta}^2 + (mL + m'L' + Ma)\, g \cos\theta$

(b) $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{mL+m'L'+Ma}{mL^2+m'L'^2+Ma^2}g} \quad , \quad \ell_{eq} \equiv \frac{\omega^2}{g} = \frac{mL^2+m'L'^2+Ma^2}{mL+m'L'+Ma}$

14.11.2. Péndulo con punto de suspensión libre (M)

Sea el péndulo plano de la figura, de masa M, cuyo punto de suspensión, de masa m, puede desplazarse libremente en el mismo plano, y sin rozamiento, en dirección horizontal.



(a) Definir las ligaduras del sistema.

(b) Determinar el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del sistema.

(c) Demostrar que en la aproximación de ángulos de giro pequeños, sen$\theta \approx \theta$, el movimiento corresponde a un oscilador armónico, determinando su frecuencia.

Sol:

(a) $y_m = 0 \quad , \quad (x_m - x_M)^2 + y_M^2 = R^2$

(b) $L = \frac{1}{2} m \dot{x}_m^2 + \frac{1}{2} M \left(\dot{x}_m^2 + R^2 \dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{x}_m \cos\theta \right)$

$(m+M)\,\ddot{x} + MR\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\cos\theta\right) = 0$

$MR\ddot{\theta} + M\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\cos\theta\right) + Mg\,\text{sen}\,\theta = 0$

(c) $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{m+M}{m}\frac{g}{R}}$

Apéndices - Complementos matemáticos avanzados

Capítulo 15

Formalismo Hamiltoniano

15.1. Simetrías dinámicas y leyes de conservación

15.1.1. Simetrías de Cartan

Como hemos visto, obtener las integrales primeras de la EDO resulta equivalente a obtener sus simetrías dinámicas, y esto nos permite encontrar la solución general de la EDO. Aunque no existe un método específico para encontrar *todas* las simetrías dinámicas, sí podemos obtener resultados considerando funciones prueba tipo (*ansatz*) para construir el generador $\boldsymbol{X}$, lo que sería un método equivalente, por ejemplo, a la obtención del factor integrante en la resolución directa de la EDO de primer orden.
En relación a los sistemas Lagrangianos, sabemos que podemos asociar una integral primera a cada transformación puntual que además sea una simetría de Noether, y cuya expresión explícita es fácil de obtener una vez conocido el generador de la simetría. Este procedimiento tiene una extensión directa para el estudio de las simetrías dinámicas. Mientras que las simetrías de Noether son simetrías del Principio de acción, de la forma Ldt, las simetrías dinámicas (o de *Cartan*) resultan ser las simetrías de la expresión $pdq - Hdt \equiv Ldt + (dq - \dot{q}dt)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, siendo $H = p\dot{q} - L$. La aplicación de estas simetrías están relacionado con el siguiente resultado que utilizaremos sin demostrar:

- Si $L(q, \dot{q}, t)$ es el Lagrangiano del sistema caracterizado por el operador $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial}{\partial q} + \omega(q, \dot{q}, t)\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \tag{15.1.1}$$

  asociado a las integrales primeras φ, tal que $\boldsymbol{A}\varphi = 0$, y si

$$\boldsymbol{X} = \xi(q, \dot{q}, t)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(q, \dot{q}, t)\frac{\partial}{\partial q} + \chi(q, \dot{q}, t)\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \quad , \quad \chi(q, \dot{q}, t) \equiv \frac{d\eta}{dt} - \dot{q}\frac{d\xi}{dt} \tag{15.1.2}$$

  es el generador de una simetría dinámica, entonces bajo la condición $\partial^2 L/\partial \dot{q}^2 \neq 0$, existe una integral primera φ que satisface

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}\varphi = 0, \quad \boldsymbol{X}\varphi = 0 \\ &\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}(\eta - \dot{q}\xi) = -\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}} \end{aligned} \tag{15.1.3}$$

  y de forma recíproca, si φ es la integral primera podemos despejar de la ecuación anterior la función $\eta - \dot{q}\xi$ que determina en última instancia cuál es el generador de la simetría dinámica asociada.

En la mayoría de los casos el Lagrangiano será cuadrático en las velocidades, con lo que el procedimiento se simplifica notablemente. Basta buscar específicamente integrales primeras que

sean polinomios en $\dot{q}$ hasta orden 2 resolviendo la condición $\boldsymbol{A}\varphi = 0$. Y si ya tenemos φ, podemos determinar de forma sencilla el generador de la simetría, obteniendo de paso mayor información sobre el significado y propiedades de las integrales primeras, y con ello en última instancia la solución general del movimiento.

15.1.2. Ejemplo detallado

Lagrangiano Consideremos el Lagrangiano en dos dimensiones (x, y)

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - a\left(2y^3 + x^2 y\right), \quad a \neq 0 \tag{15.1.4}$$

Función prueba para integral primera Como hemos visto, para localizar las integrales primeras φ podemos probar con polinomios de prueba a lo sumo cuadráticos en las velocidades, y por tanto con la expresión general

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2}K_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b + K_a\dot{q}^a + K \\ &= \frac{1}{2}K_{11}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}K_{22}\dot{y}^2 + K_{12}\dot{x}\dot{y} + K_1\dot{x} + K_2\dot{y} + K \end{aligned} \tag{15.1.5}$$

donde las funciones K_{ab}, K_a, K dependen de x, y y posiblemente del tiempo, y tienen que determinarse aplicando la condición de integral primera $d\varphi/dt = 0$, y las aceleraciones $\ddot{x}, \ddot{y}$ que resultan de las ecuaciones Euler−Lagrange del sistema

$$\ddot{x} = -2axy \quad , \quad \ddot{y} = -a\left(x^2 + 6y^2\right) \tag{15.1.6}$$

Resolución de las funciones prueba Desarrollamos la ecuación para la integral primera en la forma

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} - 2axy\frac{\partial}{\partial \dot{x}} - a\left(x^2 + 6y^2\right)\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\right)\varphi = 0 \tag{15.1.7}$$

que en términos de las funciones prueba se lee

$$\begin{aligned} 0 = &\frac{1}{2}K_{11,t}\dot{x}^2 + K_{12,t}\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2}K_{22,t}\dot{y}^2 + K_{1,t}\dot{x} + K_{2,t}\dot{y} + K_{,t} \\ &+ \frac{1}{2}K_{11,x}\dot{x}^3 + K_{12,x}\dot{x}^2\dot{y} + \frac{1}{2}K_{22,x}\dot{x}\dot{y}^2 + K_{1,x}\dot{x}^2 + K_{2,x}\dot{x}\dot{y} + K_{,x}\dot{x} \\ &+ \frac{1}{2}K_{11,y}\dot{x}^2\dot{y} + K_{12,y}\dot{x}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}K_{22,y}\dot{y}^3 + K_{1,y}\dot{x}\dot{y} + K_{2,y}\dot{y}^2 + K_{,y}\dot{y} \\ &- 2axy\left(K_{11}\dot{x} + K_{12}\dot{y} + K_1\right) - a\left(x^2 + 6y^2\right)\left(K_{12}\dot{x} + K_{22}\dot{y} + K_2\right) \end{aligned} \tag{15.1.8}$$

Sólo nos queda entonces igualar a cero cada uno de los coeficientes de este desarrollo polinomial en $(\dot{x}, \dot{y})$ con 10 términos independientes. Tras la manipulación algebraica de estas 10 ecuaciones, comprobamos que las funciones K no dependen explícitamente del tiempo, y que quedan definidas en términos de dos constantes, digamos β_1, β_2, en la forma

$$\begin{aligned} &K_{11} = \beta_1 + \beta_2 y, \quad K_{22} = \beta_1, \quad K_{12} = -\frac{1}{2}\beta_2 x \\ &K_1 = 0, \quad K_2 = 0 \\ &K = \beta_1 a y\left(x^2 + 2y^2\right) - \frac{1}{8}\beta_2 a x^2\left(x^2 + 4y^2\right) \end{aligned} \tag{15.1.9}$$

Integrales primeras La aparición de estas dos constantes β independientes nos indica que hemos obtenido dos integrales primeras del movimiento en la forma

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + ay\left(x^2 + 2y^2\right) \\ \varphi_2 &= -\dot{x}^2 y + \dot{x}\dot{y}x + ax^2\left(y^2 + \frac{1}{4}x^2\right) \end{aligned} \tag{15.1.10}$$

Simetrías dinámicas Una vez obtenidas las integrales primeras podemos analizar los generadores de las simetrías dinámicas correspondientes, que en principio nos pueden aportar información adicional sobre el origen o naturaleza de dicha integrales. En nuestro caso, conocida φ, y al ser

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} = \delta_{ab} \tag{15.1.11}$$

la simetría dinámica queda caracterizada por funciones ξ, η tales que

$$\delta_{ab}\left(\eta^b - \dot{q}^b \xi\right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}^a} \equiv K_{ab}\dot{q}^b + K_a \tag{15.1.12}$$

- Tomando en primer lugar $\varphi = \varphi_1$ obtenemos la solución

$$\eta^a - \dot{q}^a \xi = -\dot{q}^a \Rightarrow \ \eta = 0, \quad \xi = 1, \quad \chi \equiv \dot{\eta} = 0 \tag{15.1.13}$$

en cuyo caso el generador se lee

$$\boldsymbol{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \tag{15.1.14}$$

Esta simetría dinámica resulta ser una simetría puntual de Lie, y ya que expresa la invariancia del sistema bajo la traslación temporal, podemos identificar φ_1 con la energía del sistema:

$$\varphi_1 \equiv E \equiv T + V = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + ay\left(x^2 + 2y^2\right) \tag{15.1.15}$$

- Para $\varphi = \varphi_2$ podemos elegir directamente el gauge $\xi = 0$ con lo que tenemos el resultado

$$\delta_{ab}\eta^b = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial \dot{q}^a} \quad , \quad \chi^a \equiv \dot{\eta}^a \tag{15.1.16}$$

que da lugar a

$$\boldsymbol{X}_2 = \left(2y\dot{x} - x\dot{y}\right)\frac{\partial}{\partial x} - x\dot{x}\frac{\partial}{\partial y} + \left(\dot{x}\dot{y} + ax^3 + 2axy^2\right)\frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \left(2ax^2 y - \dot{x}^2\right)\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \tag{15.1.17}$$

que no es una simetría puntual ni de forma directa, ni mediante una transformación gauge, añadiendo un múltiplo del vector $\boldsymbol{A}$ de forma que se elimine la dependencia en las derivadas $\dot{x}, \dot{y}$. No parece que esta simetría tenga una interpretación conocida. Por ejemplo, el resultado para x

$$\bar{x} = x + \varepsilon \boldsymbol{X} x = x + \left(2y\dot{x} - x\dot{y}\right)\varepsilon \tag{15.1.18}$$

no parece tener ningún significado geométrico.

Simetría adicional El Lagrangiano admite una simetría adicional, que no es simetría puntual no simetría de Cartan, y por tanto no tiene asociada una integral primera. Se trata de la simetría bajo la *transformación de escala*

$$t \to \alpha t, \quad x \to \beta x, \quad y \to \beta y \tag{15.1.19}$$

de forma que, para

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} \equiv \beta^3 \ , \ \beta = \alpha^{-2} \Rightarrow L \to \alpha^{-2/3} L \tag{15.1.20}$$

se mantienen invariantes las ecuaciones de Euler−Lagrange. Las correspondientes transformaciones para las coordenadas y las velocidades son

$$\begin{aligned} &x \to \alpha^{-2} x, \quad y = \alpha^{-2} y \\ &\dot{x} \to \frac{\beta}{\alpha}\dot{x} = \alpha^{-3}\dot{x}, \quad \dot{y} = \frac{\beta}{\alpha}\dot{y} = \alpha^{-3}\dot{y} \end{aligned} \tag{15.1.21}$$

Tomando $\alpha \equiv 1+\varepsilon$, con ε infinitesimal, estas transformaciones del tiempo, las coordenadas y las velocidades están generadas por el vector de simetría

$$\boldsymbol{X}_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - 2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y} - 3\dot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} - 3\dot{y}\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \tag{15.1.22}$$

Puede comprobarse que cualquier integral primera asociada a este vector tendría que ser como mucho cuadrática en las velocidades, y por ello si existiera tal φ_3 ya la hubieramos obtenido con las funciones prueba K anteriores.

Álgebra de Lie Aunque no es un resultado general, ya que no estamos tratando únicamente con simetrías puntuales de Lie, en este caso los tres vectores de la simétrias sí satisfacen un álgebra de Lie, en particular un álgebra casi trivial

$$\Big[\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\Big] = 0 \quad , \quad \Big[\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_3\Big] = \boldsymbol{X}_1 \quad , \quad \Big[\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3\Big] = 0 \tag{15.1.23}$$

15.2. Caso práctico: Simetrías en el problema de Kepler

15.2.1. Condición de simetría puntual para EDO de segundo orden

Para cualquier sistema de segundo orden, la condición de simetría se escribe

$$\boldsymbol{X}\omega = \boldsymbol{A}\chi - \omega\dot{\xi} \quad , \quad \chi \equiv \dot{\eta} - \dot{q}\dot{\xi} \tag{15.2.1}$$

siendo

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^a\frac{\partial}{\partial q^a} \tag{15.2.2}$$

que podemos desarrollar en su totalidad en la forma

$$\begin{aligned}&\xi\omega^a_{,t} + \eta^b\omega^a_{,b} + \left(\eta^b_{,t} + \dot{q}^c\eta^b_{,c} - \dot{q}^b\xi - \dot{q}^b\dot{q}^c\xi_{,c}\right)\frac{\partial\omega^a}{\partial\dot{q}^b} + 2\omega^a\left(\xi_{,t} + \dot{q}^b\xi_{,b}\right) + \omega^b\left(\dot{q}^a\xi_{,b} - \eta^a_{,b}\right)\\ &+ \dot{q}^a\dot{q}^b\dot{q}^c\xi_{,bc} + 2\dot{q}^a\dot{q}^c\xi_{,tc} - \dot{q}^b\dot{q}^c\eta^a_{,bc} + \dot{q}^a\xi_{,tt} - 2\dot{q}^b\eta^a_{,tb} - \eta^a_{,tt} = 0\end{aligned} \tag{15.2.3}$$

y donde hemos utilizado la notación abreviada para las derivaciones

$$_{,t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad _{,a} \equiv \frac{\partial}{\partial q^a} \tag{15.2.4}$$

15.2.2. Definición del problema de Kepler

Como ejemplo ilustrativo, analicemos las simetrías del denominado *problema de Kepler* (movimiento de una partícula puntual en un potencial central inversamente proporcional a la coordenada radial) definido por el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m\delta_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b + m\frac{k}{r} \quad , \quad r^2 \equiv \delta_{ab}q^aq^b \tag{15.2.5}$$

La ecuación de Euler−Lagrange da lugar a la ecuación del movimiento de la partícula en la forma

$$\ddot{q}^a \equiv \omega^a = -k\frac{q^a}{r^3} \tag{15.2.6}$$

Ya que esta función ω no depende de $\dot{q}$ la condición de simetría quedará reducida a un desarrollo en serie de potencias de $\dot{q}$, y anulando término a término los coeficientes de la expresión resultante obtendremos la solución general (ξ, η, χ) para el generador de simetría $\boldsymbol{X}$.

Condición de simetría término a término En particular, para el término de orden 0 en $\dot{q}$ obtenemos la condición

$$\eta^b \omega^a_{,b} + 2\omega^a \xi_{,t} - \eta^a_{,b}\omega^b - \eta^a_{,tt} = 0 \tag{15.2.7}$$

Para el término de orden 1 se debe satisfacer la expresión

$$2\omega^a \dot{q}^b \xi_{,b} + \omega^b \dot{q}^a \xi_{,b} + \dot{q}^a \xi_{,tt} - 2\dot{q}^b \eta^a_{,tb} = 0 \tag{15.2.8}$$

de donde debemos extraer el coeficiente del término general en $\dot{q}$, digamos de componente $\dot{q}^c$. Para ello redefinimos la componentes $\dot{q}^a \equiv \delta^a_c \dot{q}^c$ y $\dot{q}^b \equiv \delta^b_c \dot{q}^c$ llegando a la condición

$$\dot{q}^c \left(2\omega^a \xi_{,c} + \omega^b \xi_{,b}\delta^a_c + \delta^a_c \xi_{,tt} - 2\eta^a_{,tc}\right) = 0 \Rightarrow \; 2\omega^a \xi_{,c} + \omega^b \xi_{,b}\delta^a_c + \delta^a_c \xi_{,tt} - 2\eta^a_{,tc} = 0 \tag{15.2.9}$$

Aquí, como último paso, podemos eliminar el símbolo δ^a_c multiplicando por δ^c_a y sumando en los índices repetidos, con $\delta^a_c \delta^c_a \equiv \delta^a_a = 3$. Obtenemos

$$5\omega^a \xi_{,a} + 3\xi_{,tt} - 2Y_{,t} = 0 \quad , \quad Y \equiv \eta^a_{,a} \tag{15.2.10}$$

donde hemos introducido por conveniencia la función Y así definida. Para el término de orden 2 obtenemos en primer lugar

$$2\dot{q}^a \dot{q}^c \xi_{,tc} - \dot{q}^b \dot{q}^c \eta^a_{,bc} = 0 \tag{15.2.11}$$

Aplicando la redefinición de las componentes $\dot{q}^a \equiv \delta^a_e \dot{q}^e$ y $\dot{q}^b = \delta^b_e \dot{q}^e$, obtenemos la condición

$$\dot{q}^c \dot{q}^e \left(2\delta^a_e \xi_{,tc} - \eta^a_{,ec}\right) = 0 \Rightarrow \; 2\delta^a_e \xi_{,tc} - \eta^a_{,ec} = 0 \tag{15.2.12}$$

y finalmente elimando el símbolo δ^a_e multiplicando por δ^e_a, obtenemos la condición

$$6\xi_{,tc} - Y_{,c} = 0 \quad , \quad Y \equiv \eta^a_{,a} \tag{15.2.13}$$

Finalmente para el término de orden 3 obtenemos la condición directa

$$\xi_{,bc} = 0 \tag{15.2.14}$$

15.2.3. Resolución de las simetrías puntuales

Procedimiento En resumen, las ecuaciones que debemos resolver para obtener las funciones (ξ, η^a) y posteriormente la función $\chi^a \equiv \dot{\eta}^a - \dot{q}^a \xi$, son

$$\begin{aligned}
&\eta^b \omega^a_{,b} + 2\omega^a \xi_{,t} - \eta^a_{,b}\omega^b - \eta^a_{,tt} = 0 \\
&2Y_{,t} - 5\omega^a \xi_{,a} - 3\xi_{,tt} = 0 \quad , \quad Y \equiv \eta^a_{,a} \\
&Y_{,c} - 6\xi_{,tc} = 0 \quad , \quad Y \equiv \eta^a_{,a} \\
&\xi_{,bc} = 0
\end{aligned} \tag{15.2.15}$$

Dada la estructura de estas ecuaciones, el mejor procedimiento para su integración es comenzar por la última ecuación, y reconstruyendo las soluciones en dirección ascendente.

Solución para ξ y $\eta^a_{,a}$ La solución para ξ es lineal en las coordenadas

$$\xi_{,bc} = 0 \Rightarrow \; \xi = A_a(t) q^a + B(t) \tag{15.2.16}$$

Aplicando este resultado en la siguiente ecuación deducimos que

$$\left(Y - 6\xi_{,t}\right)_{,c} = 0 \Rightarrow Y \equiv \eta^a_{,a} = 6\xi_{,t} + C(t) = 6\dot{A}_a(t) q^a + 6\dot{B}(t) + C(t) \tag{15.2.17}$$

donde el punto denota derivación respecto al tiempo.
Pasamos a la siguiente ecuación, donde aparece ya la función ω, que no es polinómica en q^a. Este hecho, junto con la dependencia lineal de Y en q^a, determina, por compatibilidad, que esta ecuación se desboble en dos ecuaciones independientes

$$\begin{aligned} &5\omega^a\xi_{,a} = 0 \Rightarrow \xi_{,a} \equiv 0 \rightarrow A_a(t) \equiv 0 \\ &2Y_{,t} - 3\xi_{,tt} = 0 \Rightarrow 12\ddot{B}(t) + 2\dot{C}(t) - 3\ddot{B}(t) = 0 \rightarrow 9\ddot{B} + 2\dot{C} = 0 \end{aligned} \tag{15.2.18}$$

Finalmente nos queda la primera ecuación para integrar. Para ello es necesario conocer previamente la forma funcional de η^a, y para ello debemos integrar

$$\eta^a_{,a} \equiv \delta^b_a \eta^a_{,b} = 6\dot{B}(t) + C(t) \equiv G(t) \Rightarrow \delta^b_a \eta^a_{,b} = G(t) \tag{15.2.19}$$

La solución general η^a tendrá una dependencia lineal en las coordenadas en la forma

$$\eta^a = \alpha(t) q^a + \pi^a + H(t) \tag{15.2.20}$$

donde las funciones α, π^a deben satisfacer, por tanto,

$$\begin{aligned} &\delta^b_a \eta^a_{,b} = \delta^b_a \alpha(t) \frac{\partial q^a}{\partial q^b} + \delta^b_a \frac{\partial \pi^a}{\partial q^b} = \delta^b_a \alpha(t) \delta^a_b + \frac{\partial \pi^a}{\partial q^a} = 3\alpha(t) + \frac{\partial \pi^a}{\partial q^a} \equiv G(t) \\ &\rightarrow \alpha(t) = \frac{G(t)}{3} \quad , \quad \frac{\partial \pi^a}{\partial q^a} \equiv \delta^b_a \frac{\partial \pi^a}{\partial q^b} = 0 \end{aligned} \tag{15.2.21}$$

La última expresión para π^a nos indica que esta función no depende explícitamente de la componente q^a pero depende de las otras componentes q^b. Es decir, depende linealmente de las componentes q^b con índice $b \neq a$. Matemáticamente esta dependencia se consigue con la utilización del tensor totalmente antisimétrico ε^{abc} con $\varepsilon^{123} = +1$, y $a, b, c = 1, 2, 3$, en la forma

$$\pi^a = D_c \, \varepsilon^{ca}{}_b \, q^b \tag{15.2.22}$$

donde D_c con $c = 1, 2, 3$ son constantes. Comprobamos que esta función no depende explícitamente de q^a

$$\frac{\partial \pi^a}{\partial q^a} = D_c \, \varepsilon^{ca}{}_b \, \delta^b_a = D_c \, \varepsilon^{ca}{}_a \equiv 0 \tag{15.2.23}$$

idénticamente nulo al tener el tensor ε dos índices iguales, pero que depende de las otras componentes q^b con índice $b \neq a$

$$\frac{\partial \eta^a}{\partial q^b} = \frac{\partial \pi^a}{\partial q^b} = D_c \, \varepsilon^{ca}{}_b \neq 0 \tag{15.2.24}$$

Solución para las funciones temporales Para finalizar la resolución, nos queda por determinar la forma funcional de las funciones $B(t), G(t), H(t)$. Para ello analizamos la primera ecuación como hemos indicado una vez conocida la solución para η^a. Esto es, debemos resolver

$$\eta^b \omega^a_{,b} + 2\omega^a \dot{B}(t) - \eta^a_{,b} \omega^b - \eta^a_{,tt} = 0 \quad , \quad \omega^a = -k \frac{q^a}{r^3} \quad , \quad \eta^a = \frac{G(t)}{3} q^a + D_c \, \varepsilon^{ca}{}_b \, q^b + H^a(t) \tag{15.2.25}$$

Lo primero que debemos hacer es fijarnos en la dependencia funcional en q de los distintos términos. Cuando η^a es proporcional a las coordenadas el primer término $\eta^b \omega^a_{,b}$ tiene la misma dependencia funcional que ω^a, la misma dependencia que el segundo y el tércer término. Distinta dependencia tiene el último término, lineal en las coordenadas, y el primero cuando η^a contiene un término $H(t)$ independiente de las coordenadas. Por tanto, por compatibilidad la ecuación anterior se divide en tres ecuaciones independientes. Las dos primeras son por este orden

$$\begin{aligned} &\eta^a_{,tt} = 0 \Rightarrow \eta^a = \eta^a(q) \\ &H^a(t) \omega^a_{,b} = 0 \Rightarrow H^a(t) \equiv 0 \end{aligned} \tag{15.2.26}$$

y aplicando este resultado la tercera ecuación se lee

$$\eta^b \omega^a_{,b} + 2\omega^a \dot{B}(t) - \eta^a_{,b}\omega^b = 0 \quad , \quad \eta^a = \frac{G(t)}{3} q^a + D_c\, \varepsilon^{ca}{}_b\, q^b \tag{15.2.27}$$

Analizamos en primer lugar la dependencia temporal de esta ecuación, generada por el primer término en η^a

$$\frac{G(t)}{3} q^b \omega^a_{,b} + 2\omega^a \dot{B}(t) - \frac{G(t)}{3}\omega^a = 0 \tag{15.2.28}$$

Al ser ω^a una función homogénea de grado -2 en las coordenadas se cumple $q^b\omega^a_{,b} = -2\omega^a$, con lo cual la condición anterior se resuelve en la forma

$$\omega^a \left(-2\frac{G(t)}{3} + 2\dot{B}(t) - \frac{G(t)}{3} \right) = 0 \Rightarrow\ G(t) = 2\dot{B}(t) \tag{15.2.29}$$

Finalmente utilizando el segundo término de η^a confirmamos que el desarrollo resultante es idénticamente cero, independientemente del valor de las constantes D_c:

$$\eta^b \omega^a_{,b} - \eta^a_{,b}\omega^b = -k\frac{D_c}{r^3}\left(\varepsilon^{ca}{}_b q^b - \frac{1}{r^2} q^a \cancelto{0}{\varepsilon^{cb}{}_e q^e q_b} - \varepsilon^{ca}{}_b q^b \right) \equiv 0 \tag{15.2.30}$$

donde el término cancelado es idénticamente nulo por ser el producto de un tensor antisimétrico $\varepsilon^{cb}{}_e$ en b, e por un producto simétrico $q^e q_b$ en estos mismos índices.

Resolución final En conclusión, hemos obtenido la expresión de las funciones del generador en la forma

$$\xi = B(t) \quad , \quad \eta^a = \frac{2\dot{B}(t)}{3} q^a + D_c\, \varepsilon^{ca}{}_b\, q^b \tag{15.2.31}$$

Para obtener explícitamente la expresión de la función $B(t)$ debemos recordar la definición de $G(t)$ y las condiciones obtenidas en teŕminos de la función auxiliar $C(t)$

$$\begin{aligned} &G(t) \equiv 6\dot{B}(t) + C(t) \\ &G(t) = 2\dot{B}(t) \\ &9\ddot{B}(t) + 2\dot{C}(t) = 0 \end{aligned} \tag{15.2.32}$$

que da lugar a las dos ecuaciones, eliminando $G(t)$,

$$\begin{aligned} &4\dot{B}(t) + C(t) = 0 \rightarrow 8\ddot{B}(t) + 2\dot{C}(t) = 0 \\ &9\ddot{B}(t) + 2\dot{C}(t) = 0 \end{aligned} \tag{15.2.33}$$

con la solución única, $\ddot{B} = 0 = \dot{C}$, esto es,

$$B(t) = b_1 t + b_2 \tag{15.2.34}$$

La función restante χ^a se calcula directamente a partir de su definición

$$\chi^a \equiv \dot{\eta}^a - \dot{q}^a\dot{\xi} = \frac{2b_1}{3}\dot{q}^a + D_c\, \varepsilon^{ca}{}_b\, \dot{q}^b - b_1\dot{q}^a = -\frac{b_1}{3}\dot{q}^a + D_c\, \varepsilon^{ca}{}_b\, \dot{q}^b \tag{15.2.35}$$

15.2.4. Generador de las simetrías puntuales

Como hemos obtenido, el generador de la simetría del problema de Kepler

$$\boldsymbol{X} = (b_1 t + b_2)\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{2b_1}{3} q^a + D_c\, \varepsilon^{ca}{}_b\, q^b \right) \frac{\partial}{\partial q^a} + \left(-\frac{b_1}{3}\dot{q}^a + D_c\, \varepsilon^{ca}{}_b\, \dot{q}^b \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \tag{15.2.36}$$

depende paramétricamente de 5 parámetros, las constantes b_1, b_2, D_1, D_2, D_3, esto es, el problema de Kepler admite un grupo de transformaciones puntuales de Lie de cinco parámetros. Los 5 generadores individuales están dados por

$$\boldsymbol{X}_c = \varepsilon_c{}^a{}_b \left(q^b \frac{\partial}{\partial q^a} + \dot{q}^b \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \right) \quad , \quad c = 1, 2, 3 \tag{15.2.37}$$

junto con

$$\boldsymbol{X}_4 = \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \boldsymbol{X}_5 = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{3} q^a \frac{\partial}{\partial q^a} - \frac{1}{3} \dot{q}^a \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \tag{15.2.38}$$

Los tres primeros generadores $\boldsymbol{X}_c$ $(c = 1, 2, 3)$ corresponden al grupo de transformación de las rotaciones tridimensionales, y su simetría asociada refleja el hecho que el potencial de interacción tiene simetría esferica, ya que depende únicamente de la coordenada radial r. De hecho, se satisface

$$\boldsymbol{X}_c r = 0 \tag{15.2.39}$$

Por otro lado, $\boldsymbol{X}_4$ corresponde a la simetría bajo traslación espacial

$$\bar{t} = t + b_2 \boldsymbol{X}_4 t = t + b_2 \frac{\partial t}{\partial t} = t + b_2 \tag{15.2.40}$$

y está asociado al carácter *estático* (independiente del tiempo) del potencial central. Finalmente, $\boldsymbol{X}_5$ representa una transformación de *escala*, como podemos comprobar analizando su acción sobre el tiempo y las coordenadas:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + b_1 \boldsymbol{X}_5 t = t + b_1 t = (1 + b_1)\, t \\ \bar{q^a} &= q^a + b_1 \boldsymbol{X}_5 q^a = q^a + \frac{2}{3} b_1 q^a = \left(1 + \frac{2}{3} b_1 \right) q^a \end{aligned} \tag{15.2.41}$$

existiendo una expresión adicional para la transformación de escala de la velocidad $\dot{q}^a$. A partir de estas leyes de transformación es directa llegar a la simetría bajo esta transformación de escala, en la forma, teniendo en cuenta el valor infinitesimal del parámetro b_1,

$$\frac{\bar{t}}{t} = 1 + b_1 \simeq \left(1 + \frac{2}{3} b_1 \right)^{3/2} = \left(\frac{\bar{q}^a}{q^a} \right)^{3/2} \tag{15.2.42}$$

Ya que estamos analizando la acción de cada generador por separado, para poder interpretar de forma correcta la relación anterior debemos utilizar una componente q^a que no varíe específicamente con los otros generadores, de forma que $\bar{q}^a$ se corresponda únicamente con la acción de este operador. Dado que $\boldsymbol{X}_c r = 0 = \boldsymbol{X}_4 r$, podemos elegir la componente $q^a = r$, con el resultado

$$\frac{\bar{t}^2}{\bar{r}^3} = \frac{t^2}{r^3} \tag{15.2.43}$$

que no es más que la tercera Ley de Kepler, que indica la similitud espacio-temporal de las órbitas de la masa puntual en el potencial central.

15.2.5. Simetrías de Noether

Leyes de conservación El estudio de las simetrías puntuales nos permite obtener una descripción geométrica de las soluciones de la EDO, pero no podemos deducir de ellas leyes de conservación que nos ayuden a comprender la dinámica del sistema. Es el *teorema de Noether* y las simetrías de Noether, el que nos permite identificar las leyes de conservación asociadas en presencia de estas simetrías. Por ejemplo, la invariancia bajo la traslación temporal se identifica con la ley de conservación de la energía y la invariancia bajo las rotaciones espaciales con la ley de conservación del momento angular. En este caso, las simetrías puntuales bajo traslación temporal y rotación espacial son también simetrías de Noether, pero en el general no existe esta identificación directa. Las simetrías de Noether son un subconjunto de las simetrías puntuales que además dejan invariantes las ecuaciones diferenciales que describen el sistema, y por ello deben tratarse por separado.

Simetría de Noether Recordamos que la *simetría de Noether* es una transformación puntual de Lie, que además ser puntual, deja invariante las ecuaciones de Euler−Lagrange del sistema. Para ello es necesario que bajo la transformación infinitesimal el Lagrangiano transformado quede definido en la forma

$$\bar{L} = L + \varepsilon \frac{dV}{dt} \tag{15.2.44}$$

siendo ε el parámetro de la transformación puntual. En el caso de un Lagrangiano dependiente de posiciones y velocidades, y posiblemente del tiempo, la expresión anterior se concreta en la forma

$$\bar{L}\left(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \bar{t}\right) = L(q, \dot{q}, t) + \varepsilon \frac{dV(q,t)}{dt} \tag{15.2.45}$$

Esta definición respeta el Principio de Acción estacionaria, en el sentido de que, al ser

$$S \equiv \int L dt \quad , \quad \bar{S} \equiv \int \bar{L} d\bar{t} \tag{15.2.46}$$

tendremos

$$\bar{S} = S + \varepsilon W \rightarrow \delta S = 0 \Leftrightarrow \delta \bar{S} = 0 \tag{15.2.47}$$

siendo W una constante.

Generador de la simetría de Noether Si partimos del desarrollo del generador de la simetría puntual en la forma usual

$$\boldsymbol{X} \equiv \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta^a \frac{\partial}{\partial q^a} + \chi^a \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \quad , \quad \chi^a \equiv \dot{\eta}^a - \dot{q}^a \dot{\xi} \tag{15.2.48}$$

y de las ecuaciones de la transformación del Lagrangiano y el tiempo

$$\begin{aligned} &\bar{L} = L + \varepsilon \boldsymbol{X} L + .. \\ &\bar{t} = t + \varepsilon \xi + .. \Rightarrow d\bar{t} = dt + \varepsilon \dot{\xi} dt + .. \end{aligned} \tag{15.2.49}$$

la *simetría de Noether* queda definida por la condición

$$\boldsymbol{X} L + (\boldsymbol{A}\xi) L = \boldsymbol{A} V \quad , \quad \boldsymbol{A} \equiv \frac{d}{dt} \tag{15.2.50}$$

donde hemos introducido el operador $\boldsymbol{A}$ que genera las integrales primeras φ del sistema

$$\boldsymbol{A}\varphi \equiv \frac{d}{dt}\varphi = 0 \quad , \quad \boldsymbol{A} \equiv \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial}{\partial q} + \ddot{q}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \tag{15.2.51}$$

y donde en la última expresión la aceleración es función, a través de las ecuaciones del movimiento, de las posiciones, velocidades y posiblemente del tiempo, esto es, $\ddot{q} \equiv \ddot{q}\left(q, \dot{q}, t\right)$.
Esta definición de la simetría de Noether es eminentemente práctica: si existe una función $V \equiv V(q,t)$ que satisface la condición de simetría bajo la transformación puntual dada, entonces la simetría puntual resulta ser una simetría de Noether. Y en el caso de que $V \equiv 0$ estaríamos hablando de una simetría de Noether de índole puramente *variacional*.

Ejemplos. Problema de Kepler Recuperamos ahora las 5 simetrías puntuales del problema de Kepler y analizamos cuáles quedan catalogadas como simetrías de Noether. Para ello, partimos de su Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} m \delta_{ab} \dot{q}^a \dot{q}^b + m\frac{k}{r} \tag{15.2.52}$$

para el que obtenemos las propiedades de transformación

$$\boldsymbol{X}_c L = 0 \quad , \quad \boldsymbol{X}_4 L = 0 \tag{15.2.53}$$

y en ambos casos

$$\boldsymbol{A}\xi_c = 0 \quad , \quad \boldsymbol{A}\xi_4 = 0 \tag{15.2.54}$$

por lo que en estos dos casos se satisface la condición de simetría de Noether de tipo variacional

$$V_c \equiv 0 \quad , \quad V_4 \equiv 0 \tag{15.2.55}$$

Por otro lado, para el generador $\boldsymbol{X}_5$ obtenemos

$$\boldsymbol{X}_5 L = -\frac{2}{3}L \quad , \quad (\boldsymbol{A}\xi_5)\, L = L \tag{15.2.56}$$

de forma que

$$\boldsymbol{X}_5 L + (\boldsymbol{A}\xi_5)\, L = \frac{1}{3}L \neq \boldsymbol{A}V_5 \tag{15.2.57}$$

Esto es, no existe una función $V_5(q,t)$ de las coordenadas y el tiempo cuya derivada temporal sea $1/3L$. De esta forma, la simetría bajo la transformación puntual de escala generada por $\boldsymbol{X}_5$ no es una simetría de Noether.

Integrales primeras. Generador $\boldsymbol{H}$ Una vez identificado el generador $\boldsymbol{X}$ de la simetría de Noether, la integral primera φ asociada a esta simetría está dada por la expresión

$$\varphi = \xi\left(\dot{q}^a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - L\right) - \eta^a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} + V(q^a, t) \tag{15.2.58}$$

y por su definición satisface simultáneamente

$$\boldsymbol{A}\varphi \equiv \frac{d\varphi}{dt} = 0 = \boldsymbol{X}\varphi \tag{15.2.59}$$

En el problema de Kepler, para las dos simetrías de Noether correspondientes a los generadores $\boldsymbol{X}_c$ y $\boldsymbol{X}_4$, obtenemos las integrales primeras

$$\varphi_c = m\varepsilon_{cab} q^a \dot{q}^b \quad , \quad \varphi_4 \equiv E = \frac{1}{2} m \dot{q}^a \dot{q}^a - m\frac{k}{r} \tag{15.2.60}$$

y corresponden, como sabemos, a las tres componentes del momento angular, y a la energía. Las condiciones que satisfacen estas integrales primeras son

$$\frac{d}{dt}\varphi_c = 0 = \boldsymbol{X}_c \varphi_c \quad , \quad \frac{d}{dt}E = 0 = \boldsymbol{X}_4 E \equiv \frac{\partial E}{\partial t} \tag{15.2.61}$$

A partir de esta igualdad para la energía E, podemos obtener una expresión adicional

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{d}{dt}\right) E \equiv \boldsymbol{H}E \tag{15.2.62}$$

que nos será de utilidad a la hora de considerar las simetrías dinámicas del problema de Kepler. Esto es, podemos definir el generador $\boldsymbol{H}$ como el generador, funcionalmente independiente del tiempo, que mantiene invariante la energía, con la expresión

$$\boldsymbol{H} \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \frac{d}{dt} = -\dot{q}^a \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} - \ddot{q}^a \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} = -\dot{q}^a \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} + m\frac{kq^a}{r^3}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \tag{15.2.63}$$

15.2.6. Simetrías dinámicas

Dado que el Lagrangiano del problema de Kepler es cuadrático en las velocidades, para obtener las simetrías dinámicas, basta buscar específicamente integrales primeras que sean polinomios en $\dot{q}$ hasta orden 2 resolviendo la condición $\boldsymbol{A}\varphi = 0$. Y si ya tenemos φ, podemos determinar de forma sencilla el generador de la simetría, obteniendo de paso mayor información sobre el significado y propiedades de las integrales primeras, y con ello en última instancia la solución general del movimiento.

Vector de Runge-Lenz Analizamos por tanto la existencia de integrales primeras del tipo

$$\varphi = K_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b + K_a\dot{q}^a + K \tag{15.2.64}$$

donde las funciones K_{ab}, K_a, K dependen en general de las coordenadas y posiblemente del tiempo. En este forma funcional ya están incluidas las integrales primeras del momento angular (proporcionales a $\dot{q}^a$), y la integral primera de la energía (con términos cuadráticos en las velocidades y con términos independientes de las velocidades). La cuestión clave seria analizar si existen integrales primeras adicionales. La respuesta es afirmativa ya que existe una *simetría dinámica* adicional ψ^c de tipo vectorial (con tres componentes) que se denomina *vector de Runge-Lenz*, y está dado por la combinación

$$\psi^c = m\dot{q}^a\dot{q}^a q^c - mq^a\dot{q}^a\dot{q}^c - m\frac{kq^c}{r} \quad , \quad c = 1,2,3 \tag{15.2.65}$$

Éste es un vector constante que está dirigido desde el origen de coordenadas al punto de mayor acercamiento de la órbita (lo que podría denominarse de forma genérico el *perihelio*). La constancia del vector $\boldsymbol{\psi}$ representa la localización constante de la posición del perihelio en cada paso de órbita, esto es, la *ausencia de precesión* del perihelio, y este comportamiento es característico del potencial k/r, y se pierde por ejemplo con cualquier contribución adicional al potencial de la forma γ/r^α, con $\alpha > 1$.
Aplicando como es usual el gauge $\xi = 0$ a las simetrías dinámicas, los tres generadores asociados a la simetría del vector de Runge-Lunz tienen la expresión

$$\boldsymbol{Y}^c = (\delta^{ce}\dot{q}^a\dot{q}^a + \dot{q}^c\dot{q}^e - 2q^c\dot{q}^e)\frac{\partial}{\partial q^e} + \left[\delta^{ce}\left(\dot{q}^a\dot{q}^a - \frac{k}{r}\right) - \dot{q}^c\dot{q}^e + \frac{k}{r^3}q^cq^e\right]\frac{\partial}{\partial\dot{q}^e} \tag{15.2.66}$$

Álgebra de los generadores Para finalizar con el problema de Kepler analizamos el álgebra de los generadores de las siete simetrías obtenidas, cuatro de ellas del tipo de Noether (la energía E y las tres componentes del momento angular φ^c) y tres simetrías dinámicas (las tres componentes ψ^c del vector de Runge-Lenz). Los conmutadores de estos operadores $\boldsymbol{X}^c, \boldsymbol{Y}^c, \boldsymbol{H}$ están dados por las expresiones

$$\begin{aligned}
&\left[\boldsymbol{X}^a, \boldsymbol{X}^b\right] = \varepsilon^{ab}{}_c\boldsymbol{X}^c \\
&\left[\boldsymbol{Y}^a, \boldsymbol{X}^b\right] = \varepsilon^{ab}{}_c\boldsymbol{Y}^c \\
&\left[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{X}^a\right] = 0 \quad , \quad \left[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{Y}^a\right] = 0 \\
&\left[\boldsymbol{Y}^a, \boldsymbol{Y}^b\right] = -2E\varepsilon^{ab}{}_c\boldsymbol{X}^c + 2\varphi^c\varepsilon^{ab}{}_c\boldsymbol{H}
\end{aligned} \tag{15.2.67}$$

Los lados derechos son combinaciones lineales de los propios generadores, dado que el conmutador de dos generadores siempre es un generador, pero los coeficientes, al menos en el último conmutador, no son constantes. De esta forma, el conjunto $\boldsymbol{X}^c, \boldsymbol{Y}^c, \boldsymbol{H}$ no forma un álgebra de Lie.

Degeneración accidental A pesar de no ser álgebra de Lie, existe una aplicación muy interesante del álgebra de estos operadores. En el caso de que el sistema tenga la simetría adicional frente al tiempo que permita definir $\boldsymbol{H} \equiv 0$, esto es, cuando *todas* las características del sistema sean explícitamente independientes del tiempo, el álgebra de generadores quedaría en la forma

$$\begin{aligned}
&\left[\boldsymbol{X}^a, \boldsymbol{X}^b\right] = \varepsilon^{ab}{}_c\boldsymbol{X}^c \\
&\left[\boldsymbol{Y}^a, \boldsymbol{X}^b\right] = \varepsilon^{ab}{}_c\boldsymbol{Y}^c \\
&\left[\boldsymbol{Y}^a, \boldsymbol{Y}^b\right] = -2E\varepsilon^{ab}{}_c\boldsymbol{X}^c
\end{aligned} \tag{15.2.68}$$

de forma que tomando las combinaciones lineales sencillas (que serán también generadores de las simetrías del sistema)

$$\boldsymbol{M} \equiv \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{X} + \frac{\boldsymbol{Y}}{-2E}\right) \quad , \quad \boldsymbol{N} \equiv \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{X} - \frac{\boldsymbol{Y}}{-2E}\right) \tag{15.2.69}$$

obtenemos para los nuevos generadores $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ el conjunto de conmutadores

$$\begin{aligned} \left[\boldsymbol{M}^a, \boldsymbol{M}^b\right] &= \varepsilon^{ab}{}_c \boldsymbol{M}^c \\ \left[\boldsymbol{N}^a, \boldsymbol{N}^b\right] &= \varepsilon^{ab}{}_c \boldsymbol{N}^c \\ \left[\boldsymbol{M}^a, \boldsymbol{N}^b\right] &= 0 \end{aligned} \tag{15.2.70}$$

que demuestra que los generadores $\boldsymbol{M}$ actúan de forma independiente de los generadores $\boldsymbol{N}$ (sus conmutadores son nulos) y que ambos conjuntos representan una simetría del sistema bajo la rotación tridimensional. Es decir, constituyen dos álgebras de Lie independientes pero idénticas. Esta estructura se denomina *degeneración accidental* ó *degeneración oculta*, ya que sólo se hace *visible* cuando se dan las condiciones para definir $\boldsymbol{H} \equiv 0$.

Este comportamiento no es alcanzable en la física clásica donde todos los movimientos dependen del tiempo, ya que se parametrizan con una variable temporal. No sucede lo mismo en la física cuántica donde existen estados específicamente independientes del tiempo, los *estados estacionarios* con energía definida. Para los estados cuánticos estacionarios del problema de Kepler (pe, los orbitales de los electrones en un átomo hidrogenoide), la degeneración accidental es efectiva de forma que la energía de los orbitales está degenerada, sólo depende de un número cuántico principal (el que estaría asociado al semieje mayor de la elipse clásica), habiéndose *perdido* la dependencia con el número cúantico asociado al otro parámetro representativo de la trayectoria, la excentricidad clásica de la órbita.

15.3. Cálculo geométrico. Geodésicas. Vectores de Killing

Geodésicas Las *geodésicas* son las trayectorias de las partículas libres en el espacio considerado. Como ejemplos, en el espacio euclídeo, que es un espacio plano, las geodésicas son trayectorias rectilíneas, mientras que sobre la superficie de una esfera de radio R (espacio con curvatura) las geodésicas son trayectorias circulares del mismo radio R.
Para obtener las geodésicas de la partícula libre en el espacio dado podemos aplicar el Principio de Jacobi de Acción mínima (sec. 12.4.4), ya que el resultado que obtenemos es directo. En la región del espacio donde la partícula es libre, su potencial U por definición es una constante, de forma que la velocidad, por la conservación de la energía, tiene valor constante. Con ello el funcional acción toma la expresión

$$S = \int mv(x)ds(x) = mv \int ds(x) = \min \tag{15.3.1}$$

Por tanto la trayectoria que hace mínima la acción es la misma trayectoria que hace mínima la longitud de arco recorrida entre los puntos inicial y final (geodésica). Esta descripción es puramente geométrica, no es dinámica. Caracteriza las trayectorias pero no determina la evolución temporal a lo largo de ellas.

Cálculo de geodésicas Podemos ampliar esta descripción y hacerla dinámica utilizando el formalismo Lagrangiano. La cuestión básica es que las ecuaciones de Euler−Lagrange escritas en la forma (sec. 1.6)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \tag{15.3.2}$$

donde T es la energía cinética y Q la fuerza generalizada, permiten una extensión directa con el cálculo de las geódesicas a partir del tensor métrico del espacio dado, expresión tensorial de la ley

de Newton (sec. 11.7.9).

Consideremos la expresión habitual más general de la formulación Lagrangiana de un sistema mecánico, que para la energía cinética tiene la expresión

$$T = \frac{1}{2} M_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + M_{0i}(q)\dot{q}_i + M_{00}(q) \tag{15.3.3}$$

suma de un término cuadrático en la velocidad, un término lineal en la velocidad y un término independiente de la velocidad. Aquí $\{q_i\}$ es el conjunto de las coordenadas del sistema, $\{\dot{q}_i\}$ el conjunto de las velocidades generalizadas, y M_{ij}, M_{0i}, M_{00} son funciones dependientes en general de las coordenadas. Los índices mudos i, j toman los valores $1, ..N$ siendo N la dimensión del espacio.
Hemos visto también en esta sección 1.6 que las fuerzas generalizadas Q admiten la expresión general

$$Q_k = Q_{kij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + Q_{ki0}(q)\dot{q}_i + Q_{k00}(q) \tag{15.3.4}$$

siendo Q_k la fuerza generalizada en la dirección de la coordenada q_k. Esta definición permite definir una única cantidad escalar, el Lagrangiano $L \equiv T - V$ tal que las ecuaciones anteriores en función de las fuerzas generalizadas se reducen a las ecuaciones de Euler−Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{15.3.5}$$

Estas definiciones generales representan, con una adecuada elección de estos coeficientes para cada sistema de coordenadas, la mayor parte de los sistemas mecánicos de interés. Por ejemplo, en el caso de fuerzas independientes de la velocidad y derivables de un potencial, deberemos elegir $Q_{kij} = 0$, $Q_{ki0} = 0$ y $Q_{000} = -\partial V/\partial q_k$.

El procedimiento para obtener las geodésicas (dentro de lo que se denomina *formulación covariante* de la teoria Newtoniana) es el siguiente:

- Se añade el tiempo con el estatus de coordenada adicional, dejando de ser un parámetro del movimiento. Se pasa así del espacio de configuración $\{q_k(t)\}$ en función del tiempo y de dimensión N, al espacio-tiempo de configuración (q_k, t) de dimensión $N + 1$. Los índices del espacio-tiempo se representarán por el alfabético latino: $a, b, c, ..$, y tendrán el rango $0, 1, 2, .., N$ estando el valor 0 asociado a la variable temporal.

- Entre todas las posibles variables temporales, se elije frecuentemente la variable natural $q_0 \equiv t$. Así, el movimiento del sistema está representado por su linea de mundo $q(t)$ en el espacio-tiempo, y su velocidad está dada por

$$\dot{q}^a \equiv \frac{dq^a}{dt} \tag{15.3.6}$$

  Con estas definiciones la energía cinética admite la expresión

$$T = \frac{1}{2} M_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b \tag{15.3.7}$$

  Aunque a simple vista parece una expresión tensorial, las cantidades M_{ab} no son las componentes de un tensor. Sí lo son sus componentes puramente espaciales, M_{ij}, tensores bajo las transformaciones admisibles de la física Newtoniana (transformaciones de Galileo). Con ello las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Euler−Lagrange) se escriben en el espacio-tiempo en la forma

$$M_{ka}\ddot{q}^a + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_{ka}}{\partial q^b} + \frac{\partial M_{kb}}{\partial q^a} - \frac{\partial M_{ab}}{\partial q^k}\right)\dot{q}^a\dot{q}^b = Q_{kab}\dot{q}^a\dot{q}^b \tag{15.3.8}$$

  que muestra claramente un origen métrico similar a las ecuaciones geodésicas.

- El último punto por tanto es obtener la conexión dinámica (esto es, los símbolos de Christoffel, sec. 11.7.8) para la cual las geodésicas corresponden a las leyes de movimiento newtonianas, derivadas del formalismo Lagrangiano. Para la construcción de dicha conexión resultan fundamentales las propiedades métricas del espacio-tiempo Newtoniano, que no muestra relación alguna entre la variable temporal y las variables espaciales. En la práctica esto implica que no podria extraerse de forma directa la ecuación de la géodesica anterior a partir de la ecuación de Euler−Lagrange del movimiento anterior por este método de subida y bajada de índices.

No obstante, como hemos indicado, respecto a los índices puramente espaciales, la ecuación anterior sí tiene naturaleza tensorial, de forma que podemos utilizar el tensor M_{ij} como el tensor métrico, siendo M^{ij} su tensor inverso, que satisface $M^{ij}M_{jk} = \delta^i_k$. Utilizando este tensor inverso para bajar los índices podemos despejar las aceleraciones $\ddot{q}^i$ en la forma

$$\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k = M^{in}Q_{njk}\dot{q}^j\dot{q}^k \tag{15.3.9}$$

que es la ecuación de movimiento, siendo

$$\Gamma^i_{jk} \equiv \frac{1}{2}M^{in}\left(\frac{\partial M_{nj}}{\partial q^k} + \frac{\partial M_{nk}}{\partial q^j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q^n}\right) \tag{15.3.10}$$

los correspondientes *símbolos de Christoffel* de la métrica M_{ij}. El término del lado derecho da cuenta del efecto de la fuerza aplicada por el sistema, y en general se traduce en la separación de la trayectoria respecto a su trayectoria libre (geodésica, para $Q \equiv 0$). No obstante, el efecto de la fuerza también puede introducirse en la definición de los símbolos de Christoffel definiendo así el movimiento generalizado geodésico en el espacio-tiempo dado, en la forma

$$\ddot{q}_i + \tilde{\Gamma}^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k = 0 \quad , \quad \tilde{\Gamma}^i_{jk} \equiv \Gamma^i_{jk} - M^{in}Q_{njk} \tag{15.3.11}$$

La solución a este problema planteado (la *covariancia de la teoría*) la tiene la propia física Newtoniana ya que establece la existencia de observadores que comparten la noción del tiempo absoluto, y la existencia de un observador privilegiado, en reposo absoluto. Al introducir esta definición en la dinámica Newtoniana, la variable temporal que describe el movimiento será el tiempo medido por el observador, en lugar del tiempo coordenado genérico. Y la métrica espacial ya no será arbitraria, sino la métrica que resulte de la proyección sobre los ejes espaciales definidos por el observador. Esto es, como hemos visto, existirá un tensor métrico espacial adaptado que podrá utilizarse para bajar y subir índices covariantes, solventando la naturaleza degenerada de la métrica en el espacio-tiempo Newtoniano.

15.3.1. Vectores de Killing para las ecuaciones geodésicas

Geodésicas en el espacio de Riemann En un *espacio de Riemann* (≡ espacio dotado de un tensor métrico $g_{ab}(x)$ definido positivo, esto es, $g_{ab}x^a x^b \geq 0$ para todo x, y $g_{ab}x^a x^b = 0$ si y sólo si $x = 0$), el elemento de linea está definido por

$$ds^2 = g_{ab}(x)dx^a dx^b \tag{15.3.12}$$

y la condición para la *curva geodésica* (curva de longitud estacionaria) se escribe

$$\delta\int ds = 0 \quad , \quad \int ds = \int \sqrt{g_{ab}(x)dx^a dx^b} = \int \sqrt{g_{ab}(x)\dot{x}^a\dot{x}^b}d\lambda \tag{15.3.13}$$

donde λ es el parámetro de la curva, siendo

$$\dot{x}^a \equiv \frac{dx^a}{d\lambda} \tag{15.3.14}$$

Dado que el integrando $\sqrt{g_{ab}(x)\dot{x}^a\dot{x}^b}$ siempre es positivo, y el radicando también, el método variacional será equivalente a ambos en el sentido

$$\delta\int \sqrt{g_{ab}(x)\dot{x}^a\dot{x}^b}d\lambda = 0 \Longleftrightarrow \delta\int g_{ab}(x)\dot{x}^a\dot{x}^b\, d\lambda = 0 \tag{15.3.15}$$

En este caso, podemos introducir un Lagrangiano genérico, en la forma

$$L \equiv \frac{1}{2} g_{ab}(x) \dot{x}^a \dot{x}^b \tag{15.3.16}$$

para el cual el problema variacional del cálculo de las geodésicas se reduce a la ecuación

$$\delta \int L d\lambda = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^a} \tag{15.3.17}$$

Ecuación para la geodésica Esta ecuación de Euler−Lagrange da lugar a la EDO para la geodésica $x^a(\lambda)$ en la forma

$$\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc} \dot{x}^b \dot{x}^c = 0 \quad , \quad \Gamma^a_{bc} \equiv \frac{1}{2} g^{ae} \left(g_{eb,c} + g_{ec,b} - g_{bc,e} \right) \tag{15.3.18}$$

donde Γ^a_{bc} son los *símbolos de Christoffel* y g^{ab} es el inverso del tensor métrico, que también es tensor, y satisface por definición

$$g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c \tag{15.3.19}$$

15.3.2. Integrales primeras. Simetrías dinámicas

Integrales primeras La EDO para la geodésica es una ecuación de segundo orden parametrizada por λ, por lo que el operador $\boldsymbol{A}$ que determina sus integrales primeras φ está dado por la expresión

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\varphi = 0 \quad , \quad \boldsymbol{A} &\equiv \frac{d}{d\lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \dot{x}^a \frac{\partial}{\partial x^a} + \ddot{x}^a \frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} + \dot{x}^a \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma^a_{bc} \dot{x}^b \dot{x}^c \frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} \end{aligned} \tag{15.3.20}$$

Simetrías dinámicas Dicha integral primera estará asociada a una simetría dinámica generada por

$$\boldsymbol{X} = \xi \frac{\partial}{\partial \lambda} + \eta^a \frac{\partial}{\partial x^a} + \chi^a \frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} \quad , \quad \chi^a \equiv \dot{\eta}^a - \dot{x}^a \dot{\xi} \tag{15.3.21}$$

donde el punto indica derivación total respecto a λ, si se satisface

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^a \partial \dot{x}^b} \left(\eta^a - \dot{x}^a \xi \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^b} \tag{15.3.22}$$

esto es, para el Lagrangiano dado, si se satisface la interrelación

$$g_{ab} \left(\eta^a - \dot{x}^a \xi \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^b} \tag{15.3.23}$$

15.3.3. Vectores y tensores de Killing

Analizamos las distintas formas funcionales de las integrales primeras de las ecuaciones geodésicas, en los que se definen distintos coeficientes dependientes de la métrica, denominados genéricamente *vectores y tensores de Killing.*

Integral primera, lineal en $\dot{x}^a$ Para este tipo de integrales primeras, la condición de simetría dinámica en el gauge $\xi = 0$ se reduce a

$$g_{ab} \eta^a = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^b} \equiv F_b(x) \tag{15.3.24}$$

esto es, los coeficientes η^a no dependerán de $\dot{x}^a$, por lo que cada simetría dinámica será una simetria puntual. Para encontrarlas, introducimos la forma lineal más general para φ

$$\varphi \equiv K_a(x, \lambda)\, \dot{x}^a + K(x, \lambda) \quad \Rightarrow \quad g_{ab} \eta^a = K_b \quad \Rightarrow \eta^a = g^{ab} K_b \equiv K^a \tag{15.3.25}$$

en la definición $\boldsymbol{A}\varphi = 0$, obteniendo el desarrollo en potencias de $\dot{x}^a$

$$\boldsymbol{A}\varphi = 0 \Rightarrow \frac{\partial K}{\partial \lambda} + \dot{x}^a \left(\frac{\partial K_a}{\partial \lambda} + K_{,a} \right) + \dot{x}^a \dot{x}^b \left(K_{a,b} - \Gamma^c_{ab} K_c \right) = 0 \tag{15.3.26}$$

Por compatibilidad, cada coeficiente de este desarrollo debe anularse por separado, lo que establece las relaciones para los vectores de Killing

$$K_{a;b} + K_{b;a} = 0 \tag{15.3.27}$$

donde hemos introducido la definición de *derivada covariante* (subíndice $;b$) de la componente K_a en la forma

$$K_{a;b} \equiv K_{a,b} - \Gamma^c_{ab} K_c \tag{15.3.28}$$

Las otras dos relaciones son

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = 0 \quad , \quad \frac{\partial K_a}{\partial \lambda} + K_{,a} = 0 \tag{15.3.29}$$

Generadores En cada caso, los generadores asociados a esta simetría puntual (recordamos en el gauge $\xi = 0$) tendrán la expresión

$$\boldsymbol{X} = \eta^a \frac{\partial}{\partial x^a} = g^{ab} K_b \frac{\partial}{\partial x^a} \equiv K^a \frac{\partial}{\partial x^a} \tag{15.3.30}$$

con la extensión

$$\boldsymbol{X} = \eta^a \frac{\partial}{\partial x^a} + \chi^a \frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} = K^a \frac{\partial}{\partial x^a} + \dot{K}^a \frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} \quad , \quad \chi^a \equiv \dot{\eta}^a = \dot{K}^a \tag{15.3.31}$$

y por su estructura lineal representan a los movimientos genéricos en el espacio de Riemann (traslaciones y rotaciones).

Integral primera, cuadrática en $\dot{x}^a$ En este caso tenemos la expresión general para φ

$$\varphi = K_{ab}(x, \lambda) \dot{x}^a \dot{x}^b + K_a(x, \lambda) \dot{x}^a + K(x, \lambda) \tag{15.3.32}$$

donde ahora por definición K_{ab} es un tensor simétrico denominado *tensor de Killing*. Realizando el mismo procedimiento que en el caso anterior, desarrollando $\boldsymbol{A}\varphi = 0$ en serie de potencias de $\dot{x}^a$ cuyos coeficientes deben ser por compatibilidad idénticamente nulos, llegamos a las condiciones, extensión de las anteriores,

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = 0 \quad , \quad \frac{\partial K_a}{\partial \lambda} + K_{,a} = 0 \tag{15.3.33}$$

junto a

$$K_{a;b} + K_{b;a} + 2\frac{\partial K_{ab}}{\partial \lambda} = 0 \quad , \quad K_{ab;c} + K_{bc;a} + K_{ca;b} = 0 \tag{15.3.34}$$

donde hemos introducido la *derivada covariante* de K_{ab} en la forma

$$K_{ab;c} \equiv K_{ab,c} - \Gamma^e_{bc} K_{ea} - \Gamma^e_{ac} K_{eb} \tag{15.3.35}$$

Generadores En este caso, las simetrías son verdaderas simetrías dinámicas en el gauge $\xi = 0$, ya que la función η^a depende de las velocidades $\dot{x}^a$, en particular

$$g_{ab}\eta^a = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^b} = K_{ab}\dot{x}^a + K_b \implies \eta^a = g^{ab} K_{bc} \dot{x}^c + K^a \equiv K^a{}_c \dot{x}^c + K^a \tag{15.3.36}$$

Esto es,

$$\boldsymbol{X} = \left(K^a{}_c \dot{x}^c + K^a \right) \frac{\partial}{\partial x^a} + .. \tag{15.3.37}$$

Soluciones a los ejercicios de Autoevaluación

Capítulo 16

Formalismo Hamiltoniano

3.8.1 Lagrangiano dependiente del tiempo (M)

El Lagrangiano de un sistema con un grado de libertad puede escribirse en la forma

$$L(q,\dot{q},t)=\frac{1}{2}m\left((\dot{q}\,\mathrm{sen}\,\omega t+\omega q\cos\omega t)^2-(\omega q\,\mathrm{sen}\,\omega t)^2\right) \tag{16.0.1}$$

(a) Determine el Hamiltoniano del sistema, y analice si se trata de una cantidad conservada.

(b) Introduciendo una nueva coordenada Q, definida por

$$Q=q\,\mathrm{sen}\,\omega t \tag{16.0.2}$$

determine el nuevo Lagrangiano, y el nuevo Hamiltoniano, y analice si es una cantidad conservada.

(a) Definimos en primer lugar el momento generalizado

$$p\equiv\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}=m\left(\dot{q}\,\mathrm{sen}\,\omega t+\omega q\cos\omega t\right)\mathrm{sen}\,\omega t \tag{16.0.3}$$

y su fórmula inversa

$$\dot{q}(q,p,t)=\frac{p}{m\,\mathrm{sen}^2\,\omega t}-\omega q\cot\omega t \tag{16.0.4}$$

que nos permite obtener la expresión del Lagrangiano en términos de las variables canónicas (q,p), en la forma

$$L(q,p,t)=\frac{p^2}{2m\,\mathrm{sen}^2\,\omega t}-\frac{1}{2}m\left(\omega q\,\mathrm{sen}\,\omega t\right)^2 \tag{16.0.5}$$

Aplicando su definición, el Hamiltoniano está dado por

$$\begin{aligned}H(q,p,t)&\equiv\dot{q}(q,p,t)\cdot p-L(q,p,t)\\&=\frac{p^2}{2m\,\mathrm{sen}^2\,\omega t}-\omega pq\cot\omega t+\frac{1}{2}m\left(\omega q\,\mathrm{sen}\,\omega t\right)^2\end{aligned} \tag{16.0.6}$$

Dado que en virtud de su definición, se satisface

$$\frac{dH}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t} \tag{16.0.7}$$

y ya que el Lagrangiano sí depende explícitamente del tiempo, el Hamiltoniano no es una constante del movimiento

$$\frac{\partial L}{\partial t}\neq 0\rightarrow\frac{dH}{dt}\neq 0\rightarrow H\neq\mathrm{cte} \tag{16.0.8}$$

(b) Aplicando ahora la transformación de la coordenada,

$$Q = q \operatorname{sen} \omega t \tag{16.0.9}$$

y su derivada respecto al tiempo

$$\dot{Q} = \dot{q} \operatorname{sen} \omega t + \omega q \cos \omega t \tag{16.0.10}$$

junto con sus fórmulas inversas

$$q = \frac{Q}{\operatorname{sen} \omega t} \quad , \quad \dot{q} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \omega t} \left(\dot{Q} \operatorname{sen} \omega t - \omega Q \cos \omega t \right) \tag{16.0.11}$$

vemos que el Lagrangiano para la nueva variable Q y su velocidad generalizada $\dot{Q}$, queda transformado en

$$L(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2} m \left(\dot{Q}^2 - \omega^2 Q^2 \right) \tag{16.0.12}$$

que ya no depende del tiempo, y por tanto el nuevo Hamiltoniano asociado será constante del movimiento. En particular, el nuevo momento generalizado es

$$P \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = m\dot{Q} \rightarrow \dot{Q} = \frac{P}{m} \tag{16.0.13}$$

con lo cual la expresión del Lagrangiano en las nuevas variables canónicas es

$$L(Q, P) = \frac{P^2}{2m} - \frac{1}{2} m\omega^2 Q^2 \tag{16.0.14}$$

Finalmente el nuevo Hamiltoniano está dado por

$$H(Q, P) \equiv \dot{Q}(P) \cdot P - L(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 Q^2 = \text{cte} \tag{16.0.15}$$

3.8.2 Hamiltoniano con fuerza de rozamiento dependiente de la velocidad

(Problema 5.2 del libro de Jose y Saletan) Considere el Hamiltoniano de una partícula de masa m en un sistema unidimensional, dado por

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} e^{-q/a} \tag{16.0.16}$$

(a) Resuelva las ecuaciones de Hamilton y obtenga la ley de movimiento para $q(t)$ y $p(t)$. Demuestre que para $p > 0$, el sistema es equivalente a una partícula sometida a una fuerza de rozamiento proporcional a $\dot{q}^2$.

(b) Obtenga la solución particular para el movimiento con las condiciones iniciales

$$q(0) = 0 \quad , \quad p(0) = mv \tag{16.0.17}$$

siendo $v > 0$. Obtenga los valores de (q, p), y de $\dot{q}$ en el límite $t \rightarrow \infty$ e interprete físicamente el resultado.

(c) Determine cuál es la relación existente entre el Hamiltoniano y la energía cinética $T = \frac{1}{2} m\dot{q}^2$, y a partir de ésta obtenga la tasa de disipación de T en el tiempo.

(a) Las ecuaciones de Hamilton del sistema tienen la expresión, asumiendo $p > 0$,

$$\dot{q} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} e^{-q/a} = \sqrt{\frac{2H}{m}} e^{-q/2a} \tag{16.0.18}$$

$$\dot{p} \equiv -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{1}{a}\frac{p^2}{2m}e^{-q/a} = \frac{H}{a} \tag{16.0.19}$$

Antes de resolver este sistema de ecuaciones por cuadraturas, verificamos que la fuerza ejercida sobre la partícula, definida en la forma usual $F \equiv m\ddot{q}$, tiene el valor

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m}e^{-q/a} - \frac{p}{ma}e^{-q/a}\dot{q} = \frac{1}{2a}\dot{q}^2 - \frac{1}{a}\dot{q}^2 = -\frac{1}{2a}\dot{q}^2 \tag{16.0.20}$$

$$\rightarrow F = m\ddot{q} = -\frac{m}{2a}\dot{q}^2 \tag{16.0.21}$$

que muestra que el sistema es equivalente a una partícula sometida a una fuerza de rozamiento proporcional a $\dot{q}^2$.

(b) Pasando ahora a la resolución del movimiento, vemos que, aplicando la constancia de H, las cuadraturas están dadas por la expresiones

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \rightarrow H = \text{cte} \Rightarrow \begin{cases} \int e^{q/2a}dq = \sqrt{\frac{2H}{m}}\int dt \\ \\ \int dp = \frac{H}{a}\int dt \end{cases} \tag{16.0.22}$$

esto es, se satisface la ley del movimiento para las condiciones iniciales dadas

$$q(0) = 0 \Rightarrow e^{q/2a} = 1 + \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2H}{m}}t = 1 + \frac{v}{2a}t \tag{16.0.23}$$

$$p(0) = mv \Rightarrow p = mv + \frac{H}{a}t = mv\left(1 + \frac{v}{2a}t\right) \tag{16.0.24}$$

al ser

$$q(0) = 0\ ,\ p(0) = mv \Rightarrow H = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{16.0.25}$$

Aplicando ahora el límite $t \rightarrow \infty$ en la solución obtenida para $(q(t), p(t))$, vemos que se satisface

$$q, p \rightarrow \infty \tag{16.0.26}$$

mientras que para la velocidad generalizada obtenemos en primer lugar su relación funcional con la coordenada q

$$\ddot{q} = -\frac{1}{2a}\dot{q}^2 \rightarrow \frac{1}{2}\frac{d\dot{q}^2}{dq} = -\frac{1}{2a}\dot{q}^2 \Rightarrow \dot{q}^2 = v^2e^{-q/a} \tag{16.0.27}$$

lo que nos permite determinar su límite en la forma

$$t \rightarrow \infty \quad \Rightarrow q \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \dot{q} \rightarrow 0 \tag{16.0.28}$$

La interpretación física es que la partícula llega al infinito con velocidad nula, por efecto de la fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad al cuadrado, mientras que el momento aumenta linealmente en el tiempo, por lo que tendrá un valor infinito, entendiendo que para este Hamiltoniano el momento p de la partícula no tiene un significado físico directo.

(c) Finalmente, aplicando la definición de energía cinética, obtenemos de forma directa su relación con el Hamiltoniano, en la forma

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 = He^{-q/a} \tag{16.0.29}$$

y por consiguiente su valor en el tiempo para el movimiento dado

$$e^{-q/a} = \frac{1}{\left(1 + \frac{v}{2a}t\right)^2} \Rightarrow T = \frac{mv^2/2}{\left(1 + \frac{v}{2a}t\right)^2} \tag{16.0.30}$$

Conocida la expresión para $T(t)$, su disipación es por definición dT/dt y tiene el valor

$$\dot{T} \equiv \frac{dT}{dt} = H\frac{d}{dt}e^{-q/a} = -\frac{H}{a}e^{-q/a}\dot{q} = -\frac{T}{a}\dot{q} = -\frac{mv^3/2a}{\left(1+\frac{v}{2a}t\right)^3} \tag{16.0.31}$$

y obtenemos en todo momento $\dot{T} < 0$ (la partícula pierde velocidad), y $\dot{T} \to 0$ cuando $t \to \infty$, esto es, cuando $\dot{q} \to 0$, lo que es físicamente aceptable.

Capítulo 17

Transformaciones canónicas y corchetes de Poisson

4.9.1 Transformación infinitesimal en serie de potencias

Considere la siguiente función generadora

$$F_2(q,P) = qP + \varepsilon\left(a\cdot q^3P + b\cdot qP^3\right) \tag{17.0.1}$$

siendo ε un parámetro infinitesimal, y donde a, b son constantes numéricas.

(a) Derive la transformación canónica correspondiente, expresando (q,p) en función de (Q,P) como un desarrollo en serie de potencias de ε hasta términos de orden uno.

(b) Usando dicha transformación canónica encuentre los valores de a y b para que el Hamiltoniano

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(p^2+\omega^2q^2\right) + \varepsilon\cdot\beta q^4 \tag{17.0.2}$$

se transforme en

$$K(Q,P) = \frac{1}{2}\left(P^2+\omega^2Q^2\right) + \varepsilon\cdot c\left(P^2+\omega^2Q^2\right)^2 \tag{17.0.3}$$

en primer orden de ε para una constante numérica c, por determinar.

(c) Compruebe si para el nuevo Hamiltoniano la función

$$f(Q,P) = P^2+\omega^2Q^2 \tag{17.0.4}$$

es una constante del movimiento. Indique, sin necesidad de completar los cálculos, la resolución de las ecuaciones de Hamilton.

(a) De la función generadora propuesta obtenemos la ley de transformación

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial P} = q + \varepsilon\left(aq^3+3bqP^2\right) \\ p &= \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial q} = P + \varepsilon\left(3aq^2P+bP^3\right) \end{aligned} \tag{17.0.5}$$

de donde podemos despejar las variables canónicas antiguas en función de las nuevas, teniendo en cuenta el primer orden de aproximación en ε, en la forma

$$\begin{aligned} q &\cong Q - \varepsilon\left(aQ^3+3bQP^2\right) \\ p &\cong P + \varepsilon\left(3aQ^2P+bP^3\right) \end{aligned} \tag{17.0.6}$$

donde se mantienen únicamente los términos lineales en ε.

(b) Dado que la transformación es independiente del tiempo, podemos sustituir directamente los nuevos valores de coordenadas y momentos en el Hamiltoniano inicial. La aproximación de primer orden en ε de los distintos términos que aparecen en H es

$$\begin{aligned} p^2 &\cong P^2 + 2\varepsilon \left(3aQ^2P + bP^3\right) P \\ q^2 &\cong Q^2 - 2\varepsilon \left(aQ^3 + 3bQP^2\right) Q \end{aligned} \tag{17.0.7}$$

y sustituyendo obtenemos que

$$q^4 \cong Q^4 - 4\varepsilon \left(aQ^3 + 3bQP^2\right) Q^3 \tag{17.0.8}$$

junto a

$$\begin{aligned} K(Q,P) =& \frac{1}{2}\left(P^2 + \omega^2 Q^2\right) \\ &+ \varepsilon \left(\left(3aQ^2P + bP^3\right) P - \omega^2 \left(aQ^3 + 3bQP^2\right) Q + \beta Q^4\right) \end{aligned} \tag{17.0.9}$$

Simplificando entre sí los distintos sumandos, el término proporcional a ε es

$$3\left(a - b\omega^2\right) Q^2P^2 + bP^4 + \left(\beta - a\omega^2\right) Q^4 \tag{17.0.10}$$

y será de la forma requerida

$$c\left(P^2 + \omega^2 Q^2\right)^2 \tag{17.0.11}$$

sólo si

$$b = c \quad , \quad \beta - a\omega^2 = c\omega^4 \quad , \quad 3\left(a - b\omega^2\right) = 2c\omega^2 \tag{17.0.12}$$

con la solución completa

$$b = c = \frac{3\beta}{8\omega^4} \quad , \quad a = \frac{5\beta}{8\omega^2} \tag{17.0.13}$$

(c) Ahora, para verificar si la expresión dada es una constante del movimiento, su derivada temporal debe ser igual a cero, y en términos del corchete de Poisson debe satisfacer

$$\frac{df}{dt} = [f, K] + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0 \tag{17.0.14}$$

Como la función no depende del tiempo explícitamente, la condición que debe verificarse se reduce a

$$[f, K] \equiv 0 \tag{17.0.15}$$

Al existir la dependencia funcional siguiente entre el nuevo Hamiltoniano K y la función dada

$$K = \frac{1}{2} f + \varepsilon c f^2 \tag{17.0.16}$$

las derivadas parciales de K respecto a (Q, P) están dadas por directamente por

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{dK}{df}\frac{\partial f}{\partial Q} \quad \text{y} \quad \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{dK}{df}\frac{\partial f}{\partial P} \tag{17.0.17}$$

con lo cual se demuestra que su corchete de Poisson efectivamente es idénticamente nulo

$$[f, K] = \frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial K}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{dK}{df}\left(\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial f}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial f}{\partial Q}\right) \equiv 0 \tag{17.0.18}$$

Así, queda demostrado que la función f es constante de movimiento, junto a K, aunque como hemos visto, no son cantidades independientes.

En virtud de esta constancia, la ecuación de Hamilton correspondiente a la coordenada Q

$$\frac{dQ}{dt} \equiv \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{dK}{df}\frac{\partial f}{\partial P} = \left(\frac{1}{2} + 2\varepsilon c f\right) \cdot 2P = (1 + 4\varepsilon c f)\sqrt{f - \omega^2 Q^2} \tag{17.0.19}$$

se integra fácilmente con el resultado

$$\int \frac{dQ}{\sqrt{f - \omega^2 Q^2}} = (1 + 4\varepsilon c f)\,(t - t_0) \Longrightarrow Q = \frac{\sqrt{f}}{\omega}\,\text{sen}\,[(1 + 4\varepsilon c f)\omega\,(t - t_0)] \tag{17.0.20}$$

de forma que el movimiento del sistema en las nuevas coordenadas es armónico con una frecuencia

$$\Omega = (1 + 4\varepsilon c f)\omega \tag{17.0.21}$$

4.9.2 Transformación canónica dependiente del tiempo

Dadas las ecuaciones de transformación para Q_1, P_1, P_2

$$Q_1 = q_1 + f\,(p_1, t) \quad , \quad P_1 = p_1 \quad , \quad P_2 = p_2 \tag{17.0.22}$$

donde f es una función arbitraria de (p_1, t),

(a) Determine la transformación más general para Q_2 de forma que la transformación $(q, p) \to (Q, P)$ sea canónica.

(b) Determine una función generadora para la transformación del apartado anterior.

(c) Si el Hamiltoniano del sistema está dado por

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + f_1\,(p_1, t) + f_2\,(p_2, t) + q_1 \tag{17.0.23}$$

donde f_i son funciones conocidas de (p_1, t) y (p_2, t), seleccione una transformación particular para Q_2 de forma que el nuevo Hamiltoniano no dependa explícitamente del tiempo.

(a) En general la coordenada Q_2 podrá depender de todas las coordenadas y momentos iniciales. En función de los corchetes de Poisson de las variables canónicas, la transformación será canónica si se cumple simultáneamente que

$$[Q_i, Q_j] = 0 = [P_i, P_j] \quad , \quad [Q_i, P_j] = \delta_{ij} \tag{17.0.24}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker con el valor 1 , si $i = j$, yel valor 0 si $i \neq j$. Analizando los distintos casos, vemos en primer lugar que

$$0 = [Q_2, P_1] = [Q_2, p_1] \tag{17.0.25}$$

lo que exige que Q_2 no dependa de la coordenada q_1, único caso en el que el corchete anterior sería distinto de cero. Por tanto

$$\frac{\partial Q_2}{\partial q_1} = 0 \tag{17.0.26}$$

De la misma forma,

$$0 = [Q_1\,(q_1, p_1)\,, Q_2\,(q_2, p_1, p_2, t)] \tag{17.0.27}$$

exige que Q_2 no dependa tampoco del momento p_1, único caso en el que el corchete anterior sería distinto de cero. Por tanto, también

$$\frac{\partial Q_2}{\partial p_1} = 0 \tag{17.0.28}$$

Evaluando ahora

$$1 = [Q_2, P_2] = [Q_2, p_2] \tag{17.0.29}$$

vemos que la solución para Q_2 es necesariamente de la forma

$$Q_2 = q_2 + g\,(p_2, t) \tag{17.0.30}$$

donde g es una función arbitraria de (p_2, t). Dado que no hay más corchetes que evaluar, ésta es la transformación más general para Q_2 que da lugar a una transformación canónica.

(b) Dado que en la transformación canónica las nuevas coordenadas dependen de las coordenadas y los momentos iniciales, lo más sencillo es elegir una función generadora del tipo $F_2(q, P, t)$. Para ello, aplicamos la invariancia del Principio de Hamilton bajo esta transformación canónica, esto es, exigimos que $pdq - PdQ \equiv dF_1 \equiv d\,(F_2 - PQ)$ sea diferencial exacta en las variables $(q, P; t) \equiv (q_1, q_2, P_1, P_2; t)$. En este cálculo basado en el Principio de Hamilton, el tiempo actúa como parámetro, y no como variable independiente. Al ser $pdq - PdQ + d(PQ) = pdq + QdP$, debemos partir de

$$pdq + QdP \equiv p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + Q_1 dP_1 + Q_2 dP_2 \equiv dF_2(q, P; t) \tag{17.0.31}$$

y de las relaciones $Q = Q(q, P), p = p(q, P)$ dadas por

$$Q_1 = q_1 + f\,(P_1, t) \quad , \quad Q_2 = q_2 + g\,(P_2, t) \quad , \quad p_1 = P_1 \quad , \quad p_2 = P_2 \tag{17.0.32}$$

Substituyendo estos valores, llegamos a

$$pdq + QdP = d\,(q_1 P_1 + q_2 P_2) + f\,(P_1, t)\,dP_1 + g\,(P_2, t)\,dP_2 \equiv dF_2(q, P; t) \tag{17.0.33}$$

que podemos integrar directamente en las variables (q, P) para obtener la función F_2 en la forma

$$F_2(q, P, t) = q_1 P_1 + q_2 P_2 + \int f\,(P_1, t)\,dP_1 + \int g\,(P_2, t)\,dP_2 + C(t) \tag{17.0.34}$$

donde $C(t)$ es una función arbitraria del tiempo.

(c) El nuevo Hamiltoniano está dado por su definición

$$K(Q, P, t) = H(q(Q, P), p(Q, P)) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{17.0.35}$$

donde la derivada parcial respecto al tiempo de la función generadora está dada por

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int f\,(P_1, t)\,dP_1 + \frac{\partial}{\partial t} \int g\,(P_2, t)\,dP_2 + C'(t) \tag{17.0.36}$$

y donde el Hamiltoniano inicial H en las nuevas variables canónicas, se escribe

$$H(Q, P) = \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + f_1\,(P_1, t) + f_2\,(P_2, t) + Q_1 - f\,(P_1, t) \tag{17.0.37}$$

Obtenemos, por tanto

$$\begin{aligned} K(Q, P, t) = & \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + f_1\,(P_1, t) + f_2\,(P_2, t) + Q_1 - f\,(P_1, t) \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \int f\,(P_1, t)\,dP_1 + \frac{\partial}{\partial t} \int g\,(P_2, t)\,dP_2 + C'(t) \end{aligned} \tag{17.0.38}$$

valor para el nuevo Hamiltoniano, que no dependerá del tiempo si exigimos que

$$f_1\,(P_1, t) - f\,(P_1, t) + \frac{\partial}{\partial t} \int f\,(P_1, t)\,dP_1 + f_2\,(P_2, t) + \frac{\partial}{\partial t} \int g\,(P_2, t)\,dP_2 = 0 \tag{17.0.39}$$

esto es, que simultáneamente se den las relaciones integrales

$$\begin{aligned} f_1(P_1,t) - f(P_1,t) + \frac{\partial}{\partial t}\int f(P_1,t)\,dP_1 = 0 \\ f_2(P_2,t) + \frac{\partial}{\partial t}\int g(P_2,t)\,dP_2 = 0 \end{aligned} \tag{17.0.40}$$

4.9.3 Corchete de Poisson de función f con L_z

Demuestre que $[f, L_z] = 0$, siendo f una función con simetría esférica, y siendo L_z el momento angular respecto al eje z arbitrario.

Para analizar la dependencia de la función f en las coordenadas $\boldsymbol{q}$ y momentos $\boldsymbol{p}$, hacemos uso de su simetría esférica. De esta propiedad de simetría se deduce que sólo podrá depender de los tres escalares posibles contruidos a partir de estos vectores: q^2, p^2 y $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}$, esto es,

$$f = f\left(q^2, p^2, \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}\right) \tag{17.0.41}$$

Con esta dependencia funcional, y usando la definición del momento angular $L_z \equiv \boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}$, podemos evaluar su corchete de Poisson en la forma

$$[f, L_z] = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{\partial L_z}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\partial L_z}{\partial \boldsymbol{q}} \tag{17.0.42}$$

Desarrollando término a término, dado que la función f depende de sus tres variables, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} &= \frac{\partial f}{\partial q^2}\frac{\partial q^2}{\partial \boldsymbol{q}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}}\frac{\partial \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{q}} = 2\boldsymbol{q}\frac{\partial f}{\partial q^2} + \boldsymbol{p}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}} \\ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} &= \frac{\partial f}{\partial p^2}\frac{\partial p^2}{\partial \boldsymbol{p}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}}\frac{\partial \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{p}} = 2\boldsymbol{p}\frac{\partial f}{\partial p^2} + \boldsymbol{q}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}} \end{aligned} \tag{17.0.43}$$

Antes de aplicar directamente las derivadas del momento angular, introducimos primero este resultado en la definición del corchete de Poisson

$$[f, L_z] = 2\frac{\partial f}{\partial q^2}\boldsymbol{q}\frac{\partial L_z}{\partial \boldsymbol{p}} - 2\frac{\partial f}{\partial p^2}\boldsymbol{p}\frac{\partial L_z}{\partial \boldsymbol{q}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}}\left(\boldsymbol{p}\frac{\partial L_z}{\partial \boldsymbol{p}} - \boldsymbol{q}\frac{\partial L_z}{\partial \boldsymbol{q}}\right) \tag{17.0.44}$$

Vemos así que en los dos primeros casos, la coordenada y el momento conmutan con la derivada del momento y la coordenada, resultando

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}\frac{\partial L_z}{\partial \boldsymbol{p}} &= \frac{\partial \boldsymbol{q} L_z}{\partial \boldsymbol{p}} \equiv 0 \\ \boldsymbol{p}\frac{\partial L_z}{\partial \boldsymbol{q}} &= \frac{\partial \boldsymbol{p} L_z}{\partial \boldsymbol{q}} \equiv 0 \end{aligned} \tag{17.0.45}$$

dado que tanto $\boldsymbol{q}L_z$ como $\boldsymbol{p}L_z$ son idénticamente nulos, por las propiedades del producto vectorial triple, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \equiv 0$. Ademaś el restante término también es idénticamente nulo, puesto que

$$\boldsymbol{p}\frac{\partial L_z}{\partial \boldsymbol{p}} - \boldsymbol{q}\frac{\partial L_z}{\partial \boldsymbol{q}} = \frac{\partial(\boldsymbol{p}L_z)}{\partial \boldsymbol{p}} - L_z\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial(\boldsymbol{q}L_z)}{\partial \boldsymbol{q}} + L_z\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{q}} = 0 \tag{17.0.46}$$

Por tanto, concluimos que efectivamente $[f, L_z] = 0$.

4.9.4 Hamiltoniano del oscilador armónico en variables a, a^*

El Hamiltoniano para un oscilador armónico simple está dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{17.0.47}$$

Introduciendo las cantidades complejas (esto es, en el plano complejo $\mathbb{C}$)

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(q + \frac{p}{m\omega}i\right) \quad , \quad a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(q - \frac{p}{m\omega}i\right) \tag{17.0.48}$$

donde i es la unidad imaginaria,

(a) Analice si la transformación de variables $(q,p) \to (a,a^*)$ puede definirse como una transformación es canónica, y determine el nuevo Hamiltoniano en función de a, a^*.

(b) Calcule los corchetes de Poisson de estas variables (a,a^*) con el Hamiltoniano.

(c) A partir del resultado en el apartado anterior, verifique que la ley de movimiento para las nuevas variables es sencilla de determinar, resolviéndola. Invierta entonces las ecuaciones de transformación para hallar la solución $q(t)$ y $p(t)$, verificando que corresponde al movimiento del oscilador en las variables originales.

(a) Verificamos que para la transformación, evaluando el corchete de Poisson fundamental para las nuevas variables, tenemos el resultado

$$[a,a^*] = \frac{m\omega}{2}\left[q + \frac{p}{m\omega}i, q - \frac{p}{m\omega}i\right] = -\frac{i}{2}[q,-p] + \frac{i}{2}[p,q] = -i \tag{17.0.49}$$

Luego la transformación no es canónica (el resultado del corchete no es la unidad), aunque tiene un corchete de Poisson constante, y esto ya es muy relevante. Por otro lado, multiplicando entre sí estas variables complejas, encontramos el valor real

$$aa^* = \frac{m\omega}{2}\left(q + \frac{p}{m\omega}i\right)\left(q - \frac{p}{m\omega}i\right) = \frac{m\omega}{2}q^2 + \frac{p^2}{2m\omega} \tag{17.0.50}$$

con lo que deducimos directamente la expresión para el Hamiltoniano

$$H = \omega a a^* \tag{17.0.51}$$

(b) Los corchetes de Poisson con el Hamiltoniano tienen el valor

$$\begin{aligned} [a,H] &= [a,\omega a a^*] = \omega a\,[a,a^*] = -i\omega a \\ [a^*,H] &= [a^*,\omega a a^*] = \omega a^*\,[a^*,a] = i\omega a^* \end{aligned} \tag{17.0.52}$$

(c) Recordando que, según su definición, las nuevas variables no dependen del tiempo, sus ecuaciones de movimiento están dadas por la expresión y resultado

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= [a,H] = -i\omega a \\ \frac{da^*}{dt} &= [a^*,H] = i\omega a^* \end{aligned} \tag{17.0.53}$$

ecuaciones que tienen la integración temporal directa

$$a = a_0 e^{-i\omega t} \quad , \quad a^* = a_0^* e^{i\omega t} \tag{17.0.54}$$

Una vez obtenidos los valores $a(t), a^*(t)$, y con la inversión de las ecuaciones de la transformación

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2}{m\omega}} \left(\frac{a + a^*}{2} \right) \\ p &= \sqrt{2m\omega} \left(\frac{a - a^*}{2i} \right) \end{aligned} \tag{17.0.55}$$

hallamos $q(t), p(t)$, en la forma

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{\frac{2}{m\omega}} \operatorname{Re} \left(a_0 e^{-i\omega t} \right) \equiv A \cos(\omega t + \phi) \\ p(t) &= \sqrt{2m\omega} \operatorname{Im} \left(a_0 e^{-i\omega t} \right) \equiv -m\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \equiv m\dot{q}(t) \end{aligned} \tag{17.0.56}$$

que corresponde efectivamente a la solución para el oscilador armónico con una adecuada identificación de la amplitud A y la fase inicial ϕ, con el módulo y el ángulo del valor complejo a_0.

4.9.5 Transformaciones infinitesimales más usuales

Discuta el significado físico de las transformaciones canónicas infinitesimales descritas por las siguientes funciones de tipo 2,

(1) $F_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{P} + \delta \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{P}$

(2) $F_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{P} + \boldsymbol{\delta\varphi} \cdot (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{P})$

(3) $F_2(q, P, t) = qP + \delta\tau \cdot H(q, P, t)$

(4) $F_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{P} + \delta\alpha \cdot \left(q^2 + P^2 \right)$

donde $\delta\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\delta\varphi}, \delta\tau, \delta\alpha$ son en todos los casos parámetros infinitesimales.

En todos los casos del enunciado, siendo $F_2 = F(q, P)$ una función generadora de tipo 2, la parte qP representa la transformación identidad, y la transformación completa será una variación infinitesimal a partir de ésta. Para discutir el significado físico, primero definimos las variables canónicas dependientes para este tipo de transformación.

(1)

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{P} \quad , \quad \boldsymbol{Q} = \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{P}} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\delta a} \tag{17.0.57}$$

que corresponde a una traslación de las coordenadas, con vector $\boldsymbol{\delta a}$.

(2) Para el siguiente caso, obtenemos en primer lugar

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{\delta\varphi} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{\delta\varphi} \times \boldsymbol{P} \tag{17.0.58}$$

relación que invertida da, en el mismo orden de aproximación,

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\delta\varphi} \times \boldsymbol{p} \tag{17.0.59}$$

junto a

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{P}} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\delta\varphi} \times \boldsymbol{q} \tag{17.0.60}$$

y ambas relaciones equivalen a un giro infinitesimal de ángulo $\delta\varphi$ en el espacio de fases, con el eje de giro en la dirección del vector $\boldsymbol{\delta\varphi}$.

(3) El siguiente caso da lugar a

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = P + \delta\tau \frac{\partial H}{\partial q} = P - \dot{P}\delta\tau \tag{17.0.61}$$

relación que invertida da, en el mismo orden de aproximación,

$$P = p + \dot{p}\delta\tau \cong p(t + \delta\tau) \tag{17.0.62}$$

junto a,

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q + \delta\tau \frac{\partial H}{\partial P} = q + \dot{q}\delta\tau \cong q(t + \delta\tau) \tag{17.0.63}$$

y ambas relaciones corresponden a una traslación $\delta\tau$ en el tiempo.

(4) Finalmente, tenemos la primera relación

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{P} + 2\delta\alpha\boldsymbol{q} \tag{17.0.64}$$

relación que invertida da, en el mismo orden de aproximación,

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} - 2\delta\alpha\boldsymbol{q} \tag{17.0.65}$$

junto a,

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{P}} = \boldsymbol{q} + 2\delta\alpha\boldsymbol{p} \tag{17.0.66}$$

y ambas relaciones definen una rotación de ángulo $2\delta\alpha$ en el espacio de fases según los ejes perpendiculares a cada uno de los planos (q_i, p_i).

4.9.6 Constante del movimiento dependiente del momento angular

Sea el Hamiltoniano de un sistema bidimensional para una partícula puntual, por simplicidad de masa unitaria, $m = 1$, definido por la expresión

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + V(x, y) \tag{17.0.67}$$

(a) Determine la forma general del potencial $V(x, y)$ para que el sistema tenga una constante del movimiento de la forma

$$I = L^2 + d\,(x, y) \tag{17.0.68}$$

siendo L el momento angular del sistema.

(b) Verifique el resultado obtenido para un potencial de la forma $V\,(x, y) = f\left(x^2 + y^2\right)$, donde f es una función arbitraria, demostrando que efectivamente I es una constante del movimiento independiente del movimiento, al ser

$$[I, H] \equiv 0 \tag{17.0.69}$$

Interprete físicamente el resultado.

(a) Por definición, en este sistema bidimensional el momento angular es perpendicular al plano del movimiento, y su módulo está dado por

$$L = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})_z = xp_y - yp_x \tag{17.0.70}$$

Por tanto, la constante del movimiento en función de las coordenadas y sus velocidades generalizadas se escribe

$$I = (xp_y - yp_x)^2 + d\,(x,y) = (x\dot{y} - y\dot{x})^2 + d\,(x,y) \tag{17.0.71}$$

Exigiendo que sea constante del movimiento, y con ayuda de las ecuaciones del movimiento

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \tag{17.0.72}$$

encontramos la condición de conservación

$$\frac{dI}{dt} = 2\,(x\dot{y} - y\dot{x})\,(x\ddot{y} - y\ddot{x}) + \frac{\partial d}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial d}{\partial y}\dot{y} = \tag{17.0.73}$$

$$= \left(2xy\frac{\partial V}{\partial y} - 2y^2\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial x}\right)\dot{x} + \left(2xy\frac{\partial V}{\partial x} - 2x^2\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial d}{\partial y}\right)\dot{y} \equiv 0 \tag{17.0.74}$$

• Igualando a cero los coeficientes de las velocidades generalizadas $\dot{x}, \dot{y}$, ya que son funciones independientes, obtenemos las dos condiciones de conservación conjuntas

$$2xy\frac{\partial V}{\partial y} - 2y^2\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial x} = 0 \tag{17.0.75}$$

$$2xy\frac{\partial V}{\partial x} - 2x^2\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial d}{\partial y} = 0 \tag{17.0.76}$$

de las que podemos deducir ahora una ecuación diferencial para $V(x,y)$ que sea independiente de la función $d(x,y)$, esto es, eliminando la función d en las expresiones anteriores.
Para ello, aplicamos respectivamente a estas condiciones los operadores $\partial/\partial y$, $\partial/\partial x$, y llegamos al resultado

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2y^2\frac{\partial V}{\partial x} - 2xy\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2\frac{\partial V}{\partial y} - 2xy\frac{\partial V}{\partial x}\right) \tag{17.0.77}$$

ó

$$3x\frac{\partial V}{\partial y} - 3y\frac{\partial V}{\partial x} + \left(x^2 - y^2\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + xy\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{17.0.78}$$

ecuación en derivadas parciales que determina como solución el potencial $V(x,y)$.

(b) Introduciendo la forma del potencial del enunciado para la comprobación, $V\,(x,y) = f\left(x^2 + y^2\right)$, donde f es una función arbitraria, obtenemos de la ecuación anterior (las primas indican derivación respecto al argumento de la función)

$$3x\frac{\partial V}{\partial y} - 3y\frac{\partial V}{\partial x} = 3x \cdot 2yf' - 3y \cdot 2xf' = 0 \tag{17.0.79}$$

$$\left(x^2 - y^2\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \left(x^2 - y^2\right)2x \cdot 2yf'' \tag{17.0.80}$$

$$xy\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = xy\left(4y^2 f'' - 4x^2 f''\right) \tag{17.0.81}$$

por lo que efectivamente se satisface idénticamente la ecuación para $V(x,y) = f\left(x^2 + y^2\right)$, para cualquier función f arbitraria.

• Para obtener la expresión completa de constante I, nos queda determinar la función $d(x,y)$, cuyas derivadas parciales estarían dadas, aplicando las dos condiciones de conservación, por

$$\frac{\partial d}{\partial x} \equiv 2y^2\frac{\partial V}{\partial x} - 2xy\frac{\partial V}{\partial y} = 4Axy^2 f' - 4Axy^2 f' = 0 \to d = g(y) \tag{17.0.82}$$

$$\frac{\partial d}{\partial y} \equiv 2x^2 \frac{\partial V}{\partial y} - 2xy \frac{\partial V}{\partial x} = 4Ax^2 yf' - 4Ax^2 yf' = 0 \rightarrow d = h(x) \tag{17.0.83}$$

con la solución única $d = \text{cte}$. Con esto, la expresión para la función I, respecto a las variables canónicas, es

$$I = (xp_y - yp_x)^2 + \text{cte} \tag{17.0.84}$$

• Finalmente verificamos que efectivamente es constante del movimiento, determinando el valor de su corchete $[H, I]$ con el Hamiltoniano del sistema para el potencial $V(x, y)$ dado por el enunciado

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + f\left(x^2 + y^2\right) \tag{17.0.85}$$

obteniendo el valor esperado

$$\begin{aligned}[H, I] \equiv & \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial I}{\partial p_x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial I}{\partial p_y} - \frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial I}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y} \\ = & -4xy\left(xp_y - yp_x\right)f' + 4yx\left(xp_y - yp_x\right)f' - 2p_x p_y\left(xp_y - yp_x\right) \\ & + 2p_x p_y\left(xp_y - yp_x\right) = 0\end{aligned} \tag{17.0.86}$$

que no es más que la confirmación de nuevo que el momento angular L se conserva (y asimismo L^2) para el movimiento en el plano sometido al potencial central $V = g(r) \equiv f\left(x^2 + y^2\right)$.

Capítulo 18

Ecuación de Hamilton−Jacobi

5.8.1 Proyectil cerca de la superficie terrestre

El movimiento de un proyectil cerca de la superficie terrestre está gobernado por el Hamiltoniano

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + mgy \tag{18.0.1}$$

donde (x, y) denotan las coordenadas horizontal y vertical, y (p_x, p_y) sus momentos conjugados.

(a) Obtenga la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo, y halle su solución general.

(b) Utilice la solución encontrada para determinar la ley de movimiento para las coordenadas del sistema, $x(t), y(t)$.

(a) La ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica de Hamilton $W(x, y)$ está dada por

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right) + mgy = E \tag{18.0.2}$$

Para hallar la solución general, por la estructura de dicha ecuación podemos probar la combinación $W(x, y) = X(x) + Y(y)$, de forma que la ecuación admite la expresión

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 = E - \frac{1}{2m}\left(\frac{dY}{dy}\right)^2 - mgy \tag{18.0.3}$$

El lado izquierdo depende sólo de la coordenada x, mientras que el derecho no depende de x. Necesariamente entonces cada lado debe ser igual a una constante α, independiente de E, que resulta ser la energía cinética de la componente horizontal del movimiento. Por tanto, la solución general satisface simultáneamente

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 = \alpha \tag{18.0.4}$$

$$\alpha = E - \frac{1}{2m}\left(\frac{dY}{dy}\right)^2 - mgy \tag{18.0.5}$$

con la solución general obtenida por cuadraturas

$$X(x) = \sqrt{2m\alpha}x \tag{18.0.6}$$

$$Y(y) = -\frac{2\sqrt{2m}}{3mg}\left(E - \alpha - mgy\right)^{3/2} \tag{18.0.7}$$

Por tanto,

$$W\left(x, y; \alpha, E\right) = \sqrt{2m\alpha}x - \frac{2\sqrt{2m}}{3mg}\left(E - \alpha - mgy\right)^{3/2} \tag{18.0.8}$$

y con ello la función principal de Hamilton es directamente

$$S\left(x, y, t; \alpha, E\right) = \sqrt{2m\alpha}x - \frac{2\sqrt{2m}}{3mg}\left(E - \alpha - mgy\right)^{\frac{3}{2}} - Et \tag{18.0.9}$$

que es la función generadora de tipo 2 para la transformación a las nuevas momentos canónicos (α, E) y a los nuevas coordenadas canónicas (β_α, β_E), ambas constantes, y dadas por

$$\beta_\alpha \equiv \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\alpha}}x + \frac{\sqrt{2m}}{mg}\left(E - \alpha - mgy\right)^{\frac{1}{2}} \tag{18.0.10}$$

$$\beta_E \equiv \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial W}{\partial E} - t = -\frac{\sqrt{2m}}{mg}\left(E - \alpha - mgy\right)^{\frac{1}{2}} - t \tag{18.0.11}$$

Además los momentos de las variables originales están dados por

$$p_x \equiv \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{2m\alpha} \tag{18.0.12}$$

$$p_y \equiv \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y} = \sqrt{2m}\left(E - \alpha - mgy\right)^{\frac{1}{2}} \tag{18.0.13}$$

(b) A partir de estas ecuaciones, podemos deducir la ley de movimiento del proyectil para las coordenadas $x\left(t\right), y(t)$ y los momentos $\left(p_x\left(t\right), p_y\left(t\right)\right)$ en función del tiempo. Obtenemos $x(t) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{m}}\beta_\alpha + \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{m}}\left(t + \beta_E\right)$

$$y(t) = \frac{E - \alpha}{mg} - \frac{1}{2}g\left(t + \beta_E\right)^2 \tag{18.0.14}$$

$$p_x(t) = \sqrt{2m\alpha} \tag{18.0.15}$$

$$p_y\left(t\right) = -mg\left(t + \beta_E\right) \tag{18.0.16}$$

Las cuatro constantes del movimiento son

$$\alpha = \frac{p_x^2}{2m} \tag{18.0.17}$$

$$E = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + mgy \tag{18.0.18}$$

$$\frac{mx}{p_x} + \frac{p_y}{mg} = \beta_\alpha \tag{18.0.19}$$

junto con β_E. El significado físico de cada una de ellas es el siguiente: $-\beta_E$ es el tiempo en el que el proyectil alcanza su máxima altura, $\sqrt{2\alpha}\beta_\alpha/\sqrt{m}$ es la distancia horizontal que recorre el proyectil en su máxima altura, α es la energía de la componente horizontal del movimiento, y E es la energía total del movimiento.

5.8.2 Oscilador isótropo tridimensional

Utilice el método de Hamilton−Jacobi para determinar las ecuaciones generales de movimiento $(x(t), y(t), z(t))$ de un oscilador isótropo tridimensional cuyo potencial está definido por la expresión

$$V = \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \tag{18.0.20}$$

en coordenadas cartesianas.

• En coordenadas cartesianas el Hamiltoniano queda definido en la forma

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \tag{18.0.21}$$

mientras que la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo se escribe

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = E \tag{18.0.22}$$

Para hallar la solución general, por la estructura de dicha ecuación podemos probar la combinación

$$W\left(x, y, z\right) = X\left(x\right) + Y\left(y\right) + Z(z) \tag{18.0.23}$$

de forma que la ecuación de Hamilton−Jacobi da lugar a (con $m\omega^2 \equiv k$)

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + m^2\omega^2x^2 = 2mE - \left(\frac{dY}{dy}\right)^2 - \left(\frac{dZ}{dz}\right)^2 - m^2\omega^2\left(y^2 + z^2\right) \tag{18.0.24}$$

• En este ecuación el lado izquierdo depende sólo de la coordenada x, mientras que el lado derecho no depende de x. Ésto sólo es posible si cada lado es igual a una misma constante, digamos α_x, independiente de E, que resulta ser proporcional a la energía total de la componente x del movimiento, $\alpha_x = 2mE_x$. Por tanto, la solución general satisface simultáneamente

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + m^2\omega^2x^2 = 2mE_x \tag{18.0.25}$$

$$\left(\frac{dY}{dy}\right)^2 + m^2\omega^2y^2 = 2m\left(E - E_x\right) - \left(\frac{dZ}{dz}\right)^2 - m^2\omega^2z^2 \tag{18.0.26}$$

Siguiendo con el mismo procedimiento, ahora el lado izquierdo de la última ecuación depende sólo de la coordenada y, mientras que el lado derecho no depende de y. Necesariamente entonces cada lado debe ser igual a una misma constante, digamos α_y, independiente de E y E_x, que resulta ser proporcional a la energía total de la componente y del movimiento, $\alpha_y = 2mE_y$. Por tanto, la solución general satisface simultáneamente

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + m^2\omega^2x^2 = 2mE_x \tag{18.0.27}$$

$$\left(\frac{dY}{dy}\right)^2 + m^2\omega^2y^2 = 2mE_y \tag{18.0.28}$$

$$\left(\frac{dZ}{dz}\right)^2 + m^2\omega^2z^2 = 2m\left(E - E_x - E_y\right) \equiv 2mE_z \tag{18.0.29}$$

siendo E_z la energía total de la componente z del movimiento.

• Reuniendo estos resultados, vemos que la solución general para la función característica W puede obtenerse en la forma de cuadraturas

$$W(x,y,z;E_x,E_y,E_z) = \int \sqrt{2mE_x - m^2\omega^2x^2}dx + \int \sqrt{2mE_y - m^2\omega^2y^2}dy + \int \sqrt{2mE_z - m^2\omega^2z^2}dz \tag{18.0.30}$$

Y, en consecuencia, la función principal de Hamilton para este problema resulta ser

$$S(x,y,z,t;E_x,E_y,E_z) = W(x,y,z;E_x,E_y,E_z) - (E_x+E_y+E_z)\,t \tag{18.0.31}$$

que es la función generadora de tipo 2 para la transformación a las nuevos momentos canónicos (E_x,E_y,E_z) y a sus coordenadas asociadas $(\beta_x,\beta_y,\beta_z)$, ambas constantes, y dadas por las expresiones

$$\beta_x \equiv \frac{\partial S}{\partial E_x} = m\int \frac{1}{\sqrt{2mE_x - m^2\omega^2x^2}}dx - t \tag{18.0.32}$$

con ecuaciones análogas para los momentos (β_y,β_z).

• La integración en x es directa y tras la inversión del resultado obtenemos la ley de movimiento para $x(t)$

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_x}{k}}\,\operatorname{sen}\omega\,(t+\beta_x) \tag{18.0.33}$$

De forma similar, encontramos las leyes de movimiento $y(t), z(t)$

$$y(t) = \sqrt{\frac{2E_y}{k}}\,\operatorname{sen}\omega\,(t+\beta_y) \quad , \quad z(t) = \sqrt{\frac{2E_z}{k}}\,\operatorname{sen}\omega\,(t+\beta_z) \tag{18.0.34}$$

5.8.3 Problema relativista de Kepler

En coordenadas polares, el Hamiltoniano para el problema relativista de Kepler está dado por

$$H = T + V = c\sqrt{m^2c^2 + p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}} - \frac{k}{r} \tag{18.0.35}$$

(a) Resuelva la ecuación de Hamilton−Jacobi para el sistema y determine la función principal, expresando el resultado en función de cuadraturas.

(b) Deduzca, a partir de la acción, la ecuación de la órbita, expresando el resultado en función de cuadraturas.

(a) La ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica de Hamilton es

$$E = c\sqrt{m^2c^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2} - \frac{k}{r} \tag{18.0.36}$$

ó

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{(E+k/r)^2 - m^2c^4}{c^2} \tag{18.0.37}$$

siendo E la energía total del sistema. Para hallar la solución general, por la estructura de dicha ecuación podemos probar la combinación

$$W(r,\varphi) = R(r) + \Phi(\varphi) \tag{18.0.38}$$

de forma que la ecuación de Hamilton−Jacobi da lugar a

$$r^2 \frac{(E + k/r)^2 - m^2c^4}{c^2} - r^2 \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = \left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 \tag{18.0.39}$$

El lado izquierdo de esta ecuación depende sólo de la coordenada r, mientras que el derecho no depende de r. Necesariamente entonces cada lado debe ser igual a una constante α_φ, independiente de E, que resulta ser el módulo al cuadrado del momento angular del movimiento, $\alpha_\varphi = L^2$. Por tanto, la solución general satisface simultáneamente

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 = L^2 \tag{18.0.40}$$

$$\frac{(E + k/r)^2 - m^2c^4}{c^2} - \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = \frac{L^2}{r^2} \tag{18.0.41}$$

cuya solución queda resuelta por cuadraturas

$$R(r) = \frac{1}{c}\int \sqrt{(Er + k)^2 - m^2c^4r^2 - c^2L^2}\frac{dr}{r} \tag{18.0.42}$$

$$\Phi(\varphi) = L\varphi \tag{18.0.43}$$

Por tanto, la función principal de Hamilton para este problema resulta ser

$$S(r,\varphi,t;E,L) = R(r;E,L) + \Phi(\varphi;L) - Et \tag{18.0.44}$$

que es la función generadora de tipo 2 para la transformación a las nuevos momentos canónicos (E, L) y las nuevas coordenadas asociadas (β_E, β_L), ambas constantes, y dadas por

$$\beta_E \equiv \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{c}\int \frac{Er + k}{\sqrt{(Er + k)^2 - m^2c^4r^2 - c^2L^2}}dr - t \tag{18.0.45}$$

$$\beta_L \equiv \frac{\partial S}{\partial L} = -Lc\int \frac{1}{\sqrt{(Er + k)^2 - m^2c^4r^2 - c^2L^2}}\frac{dr}{r} + \varphi \tag{18.0.46}$$

(b) A partir de esta última ecuación, podemos deducir la órbita $r = r(\varphi)$ que describe la partícula en el plano del movimiento. La resolvemos por cuadraturas en la forma

$$\int \frac{1}{\sqrt{(Er + k)^2 - m^2c^4r^2 - c^2L^2}}\frac{dr}{r} = \frac{1}{Lc}(\varphi - \beta_L) \tag{18.0.47}$$

5.8.4 Corrección relativista al periodo del oscilador

Sea el problema relativista unidimensional del movimiento de un partícula en el potencial

$$V(q) = kq^n \tag{18.0.48}$$

donde k es una constante y n un número entero. Utilizando el método de Hamilton−Jacobi, determine en primer orden la corrección relativista al periodo del movimiento del problema en el caso no relativista.

• El Hamiltoniano del sistema es

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + p^2} + kq^n = E \tag{18.0.49}$$

donde E es la energía del sistema. Consideraremos que el potencial es positivo, de forma que realmente su expresión correcta es $V(q) = k|q|^n$. El movimiento del sistema se realiza entre los dos puntos de retorno, para los cuales el momento $p \equiv m\dot{q}$ es nulo. La amplitud A del movimiento está dada por

$$mc^2 + kA^n = E \tag{18.0.50}$$

esto es,

$$A = \left(\frac{E - mc^2}{k}\right)^{1/n} \tag{18.0.51}$$

• La ecuación de Hamilton−Jacobi para la función característica se escribe

$$c\sqrt{m^2c^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2} + kq^n = E \tag{18.0.52}$$

ó

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 = \left(\frac{E - kq^n}{c}\right)^2 - m^2c^2 \tag{18.0.53}$$

que tiene la solución por cuadraturas

$$W(q; E) = \frac{1}{c}\int \sqrt{(E - kq^n)^2 - m^2c^4}dq \tag{18.0.54}$$

Por tanto, la función principal de Hamilton para este problema resulta ser

$$S(q, t; E) = \frac{1}{c}\int \sqrt{(E - kq^n)^2 - m^2c^4}dq - Et \tag{18.0.55}$$

que es la función generadora de tipo 2 para la transformación al nuevo momento canónico (E) y a la nueva coordenada asociada (β), que es una constante, y está dada por

$$\beta \equiv \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{c}\int \frac{E - kq^n}{\sqrt{(E - kq^n)^2 - m^2c^4}}dq - t \tag{18.0.56}$$

• De aquí obtenemos la relación para la trayectoria $q = q(t)$, para la condición inicial $q(0) = q_0$ (que corresponde al tiempo de paso $\beta = 0$) en la forma de cuadratura

$$t = \frac{1}{c}\int_{q_0}^{q} \frac{E - kq^n}{\sqrt{(E - kq^n)^2 - m^2c^4}}dq \tag{18.0.57}$$

Introducimos ahora la energía en función de la amplitud. Tomando $q_0 = -A$, e integrando en la coordenada entre las dos posiciones de retorno, correspondiente al intervalo temporal $t = T/2$, siendo T el periodo del movimiento, obtenemos

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{c}\int_{-A}^{A} \frac{mc^2 + kA^n - kq^n}{\sqrt{(mc^2 + kA^n - kq^n)^2 - m^2c^4}}dq \tag{18.0.58}$$

• Finalmente, con el cambio de variable $q = Au$, encontramos la relación entre el periodo y la amplitud

$$T = \frac{2A}{c}\int_{-1}^{1}\frac{1+v}{\sqrt{(1+v)^2-1}}du \tag{18.0.59}$$

donde hemos definido

$$v = \frac{k}{mc^2}A^n\left(1-u^n\right) \tag{18.0.60}$$

• En particular, en el límite no relativista, la energía potencial es mucho menor que la energía en reposo mc^2 de forma que la cantidad definida v tiene un valor muy pequeño, y tiene sentido realizar la aproximación $v \ll 1$ del integrando anterior.
Hasta el primer orden en v, encontramos

$$\frac{1+v}{\sqrt{(1+v)^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2v}}\frac{1+v}{\sqrt{1+v/2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2v}}(1+v)\left(1-\frac{v}{4}\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2v}}\left(1+\frac{3}{4}v\right) \tag{18.0.61}$$

y en esta aproximación, la relación entre el periodo y la amplitud puede escribirse en la forma

$$\frac{T}{T^{(0)}} = 1+\frac{3}{4}\cdot\frac{\int_{-1}^{1}\left(1-u^n\right)^{1/2}du}{\int_{-1}^{1}\left(1-u^n\right)^{-1/2}du}\cdot\frac{kA^n}{mc^2} \tag{18.0.62}$$

donde

$$T^{(0)} = \sqrt{\frac{2m}{k}}\frac{A}{\sqrt{A^n}}\int_{-1}^{1}\left(1-u^n\right)^{-1/2}du \tag{18.0.63}$$

es el periodo del movimiento clásico, no relativista.
Se comprueba entonces que la corrección relativista a primer orden es, salvo un factor numérico, del orden $T^{(0)}kA^n/mc^2$ y por tanto, dependiente de la amplitud para cualquier valor de n.

5.8.5 Hamiltoniano en coordenadas cilíndricas

El Hamiltoniano en coordenadas cilíndricas para una partícula de masa m sometida a un potencial está dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\varphi^2+p_z^2\right)+V(r,\varphi,z) \tag{18.0.64}$$

Asumiendo que el potencial es separable en la forma $V = a\left(r\right)+b(z)$, siendo a, b funciones de sus argumentos, escriba la ecuación de Hamilton−Jacobi del sistema y determine la función principal, expresándola en forma de cuadraturas.

• La ecuación de Hamilton−Jacobi para la función característica de Hamilton se escribe

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right)+a\left(r\right)+b\left(z\right) = E \tag{18.0.65}$$

donde E es la energía del sistema. Para hallar la solución general, por la estructura de dicha ecuación podemos probar la combinación $W\left(r,\varphi,z\right) = R\left(r\right)+\varphi\alpha_\varphi+Z(z)$, siendo $\alpha_\varphi = L_z$ el momento conjugado (constante) de la coordenada cíclica φ. De esta forma, la ecuación de Hamilton−Jacobi da lugar a

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dZ}{dz}\right)^2+b\left(z\right) = E-a(r)-\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{dR}{dr}\right)^2+\frac{L_z^2}{r^2}\right) \tag{18.0.66}$$

El lado izquierdo de esta ecuación depende sólo de la coordenada z, mientras que el derecho no depende de z. Necesariamente entonces cada lado debe ser igual a una constante α_z, independiente de E, que resulta ser la energía total de la componente z del movimiento, $\alpha_z = E_z$. Por tanto, la solución general satisface simultáneamente

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dz}{dz}\right)^2 + b\,(z) = E_z \tag{18.0.67}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} + a(r) = E - E_z \tag{18.0.68}$$

cuya solución queda resuelta por cuadraturas

$$Z(z) = \sqrt{2m}\int \sqrt{E_z - b\,(z)}dz \tag{18.0.69}$$

$$R(r) = \int \sqrt{2m\,(E - E_z - a(r)) - L_z^2/r^2}dr \tag{18.0.70}$$

Y, en consecuencia, la función principal de Hamilton para este problema resulta ser

$$S\,(r, \varphi, z, t; E, E_z, L_z) = R\,(r; E, E_z, L_z) + \varphi L_z + Z\,(z; E_z) - Et \tag{18.0.71}$$

que es la función generadora de tipo 2 para la transformación a los nuevos momentos canónicos (E, E_z, L_z) y las nuevas coordenadas asociadas $(\beta_E, \beta_{Ez}, \beta_{Lz})$, ambos constantes.

5.9.1 Separabilidad de Hamiltoniano bidimensional

Considere la transformación de las coordenadas (q_1, q_2) de un sistema bidimensional a las coordenadas Q_1, Q_2, definidas por las relaciones

$$Q_1 \equiv \alpha \cdot q_1 + \beta \cdot q_2 \quad , \quad Q_2 \equiv q_2 \tag{18.0.72}$$

siendo α, β constantes, y considere el Hamiltoniano del sistema definido por

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(q_1, q_2) \tag{18.0.73}$$

en las variables originales, siendo V un potencial arbitrario de las coordenadas (q_1, q_2). Analice qué forma del potencial V permite la separabilidad del problema en las coordenadas Q_1, Q_2.

• En primer lugar debemos determinar qué tipo de transformación canónica cumple esta ley de transformación para las coordenadas. Con la aplicación de las condiciones cruzadas para las transformaciones de momentos $P_i = P_i\,(p_j)$ y coordenadas $Q_i = Q_i\,(q_j)$ (veáse la sección 4.12.1), podemos demostrar que la transformación del enunciado es canónica. Se deben cumplir las relaciones

$$\frac{\partial P_i\,(p_j)}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j(Q_i)}{\partial Q_i} \tag{18.0.74}$$

para los índices $i, j = 1, 2$. La segunda condición que relacionaría las derivadas de coordenadas respecto a momentos, y viceversa, se satisface idénticamente por ser cada término idénticamente nulo.
Con ayuda de la transformación inversa de las coordenadas

$$q_1 = \frac{1}{\alpha}Q_1 - \frac{\beta}{\alpha}Q_2 \tag{18.0.75}$$

$$q_2 = Q_2 \tag{18.0.76}$$

desarrollamos las condiciones cruzadas para los momentos en la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial p_1} \equiv \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} = \frac{1}{\alpha} \quad , \quad \frac{\partial P_1}{\partial p_2} \equiv \frac{\partial q_2}{\partial Q_1} = 0 \\ \frac{\partial P_2}{\partial p_1} \equiv \frac{\partial q_1}{\partial Q_2} = -\frac{\beta}{\alpha} \quad , \quad \frac{\partial P_2}{\partial p_2} \equiv \frac{\partial q_2}{\partial Q_2} = 1 \end{aligned} \tag{18.0.77}$$

con la solución

$$P_1 = \frac{1}{\alpha}p_1 \quad , \quad P_2 = -\frac{\beta}{\alpha}p_1 + p_2 \tag{18.0.78}$$

y la transformación inversa

$$p_1 = \alpha P_1 \quad , \quad p_2 = \beta P_1 + P_2 \tag{18.0.79}$$

Con ello, dado que la transformación no depende del tiempo, el Hamiltoniano se escribe directamente

$$H = \alpha^2 \frac{P_1^2}{2m} + \frac{(\beta P_1 + P_2)^2}{2m} + \overline{V}(Q_1, Q_2) \tag{18.0.80}$$

donde hemos definido

$$\overline{V}(Q_1, Q_2) \equiv V\left(\frac{1}{\alpha}Q_1 - \frac{\beta}{\alpha}Q_2, Q_2\right) \tag{18.0.81}$$

• Aplicando ahora las condiciones de Levi-Civita para la separabilidad del problema (véase la sección 5.3.1), necesitamos que se cumpla

$$\frac{\partial H}{\partial Q_1}\frac{\partial H}{\partial Q_2}\frac{\partial^2 H}{\partial P_1 \partial P_2} + \frac{\partial H}{\partial P_1}\frac{\partial H}{\partial P_2}\frac{\partial^2 H}{\partial Q_1 \partial Q_2} = \frac{\partial H}{\partial P_1}\frac{\partial H}{\partial Q_2}\frac{\partial^2 H}{\partial Q_1 \partial P_2} + \frac{\partial H}{\partial Q_1}\frac{\partial H}{\partial P_2}\frac{\partial^2 H}{\partial P_1 \partial Q_2} \tag{18.0.82}$$

para el nuevo conjunto de coordenadas y momentos.
Para evaluar esta condición, obtenemos primero las cuatro derivadas segundas

$$\frac{\partial^2 H}{\partial P_1 \partial P_2} = \frac{1}{m} \quad , \quad \frac{\partial^2 H}{\partial Q_1 \partial Q_2} = \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial Q_1 \partial Q_2} \tag{18.0.83}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial Q_1 \partial P_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 H}{\partial P_1 \partial Q_2} = 0 \tag{18.0.84}$$

con lo cual, la condición que debe satisfacerse se lee

$$\frac{1}{m}\frac{\partial H}{\partial Q_1}\frac{\partial H}{\partial Q_2} + \frac{\partial H}{\partial P_1}\frac{\partial H}{\partial P_2}\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial Q_1 \partial Q_2} = 0 \tag{18.0.85}$$

Obtenemos ahora las cuatro derivadas primeras, en la forma

$$\frac{\partial H}{\partial Q_1} = \frac{\partial \overline{V}}{\partial Q_1} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial P_1} = \frac{\alpha^2 + \beta}{m}P_1 + \frac{1}{m}P_2 \tag{18.0.86}$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q_2} = \frac{\partial \overline{V}}{\partial Q_2} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial P_2} = \frac{\beta}{m}P_1 + \frac{1}{m}P_2 \tag{18.0.87}$$

Con todo ello, la condición de Levi-Citita se escribe finalmente

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial Q_1}\frac{\partial \overline{V}}{\partial Q_2} + (\beta P_1 + P_2)\left(\left(\alpha^2+\beta\right)P_1 + P_2\right)\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial Q_1 \partial Q_2} = 0 \tag{18.0.88}$$

y por tanto, necesariamente se debe cumplir simultáneamente que

$$\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial Q_1 \partial Q_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \overline{V}}{\partial Q_1}\frac{\partial \overline{V}}{\partial Q_2} = 0 \tag{18.0.89}$$

• La primera ecuación tiene la solución

$$\overline{V} = f(Q_1) + g(Q_2) \tag{18.0.90}$$

en cuyo caso, la segunda ecuación exige que

$$f'(Q_1)\cdot g'(Q_2) = 0 \tag{18.0.91}$$

Es decir, el potencial $\overline{V}$ sólo puede depender de una de las dos variables. Por tanto, la única solución que nos da un problema totalmente separable es

$$\overline{V} = f(Q_1) \quad \text{ó} \quad \overline{V} = g(Q_2) \tag{18.0.92}$$

que en las variables originales equivale a

$$V = f(\alpha\cdot q_1 + \beta\cdot q_2) \quad \text{ó} \quad V = g(q_2) \tag{18.0.93}$$

Ambos resultados son triviales y coinciden con los esperados a priori.

5.9.2 Partícula cargada en presencia de campos eléctrico y magnético

Considere el movimiento de una partícula de masa m y carga e en presencia de un campo eléctrico constante y un campo magnético constante, dirigidos perpendicularmente entre sí, en las direcciones x y z respectivamente.

(a) Escriba la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo en coordenadas cartesianas.

(b) Demuestre que esta ecuación es separable en coordenadas cartesianas con una adecuada elección *gauge* para los potenciales electromagnéticos, y obtenga su solución por cuadraturas para un potencial vector dependiente únicamente de la coordenada x.

(a) El Hamiltoniano para una partícula de masa m y carga e en un campo electromagnético[1] que consiste en un campo eléctrico E uniforme dirigido en la dirección del eje x, y un campo magnético B uniforme dirigido en la dirección del eje z es

$$\begin{aligned} H &\equiv \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + e\phi \\ &= \frac{1}{2m}\left(p_x - \frac{e}{c}A_x\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{e}{c}A_y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_z - \frac{e}{c}A_z\right)^2 - eEx \end{aligned} \tag{18.0.94}$$

donde $\boldsymbol{A}$ es el potencial vector del campo magnético, para el cual $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$, y que para un campo uniforme satisface (en coordenadas cartesianas)

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}B\boldsymbol{u}_z \times (x\boldsymbol{u}_x + y\boldsymbol{u}_y + z\boldsymbol{u}_z) = \frac{1}{2}B(x\boldsymbol{u}_y - y\boldsymbol{u}_x) \tag{18.0.95}$$

[1] Véase en la sección 3.2.3 la expresión general de este Hamiltoniano.

esto es, sus componentes cartesianas A_x, A_y, A_z están dadas por

$$A_x = -\frac{1}{2}By \quad , \quad A_y = \frac{1}{2}Bx \quad , \quad A_z = 0 \tag{18.0.96}$$

(b) La libertad de contraste (ó libertad *gauge*) nos permite elegir potenciales arbitrarios que dén lugar a un mismo campo magnético. Esto es, vamos a aplicar la denominada *transformación gauge* (descrita de forma general en el ejercicio 2.6.5), tal que

$$\boldsymbol{A}' \equiv \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\chi \Longrightarrow \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\chi = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \tag{18.0.97}$$

donde χ es función de las coordenadas, siendo en este caso independiente del tiempo. Es decir, el nuevo potencial vector

$$\boldsymbol{A}' = \left(-\frac{1}{2}By - \frac{\partial\chi}{\partial x}\right)\boldsymbol{u}_x + \left(\frac{1}{2}Bx - \frac{\partial\chi}{\partial y}\right)\boldsymbol{u}_y - \frac{\partial\chi}{\partial z}\boldsymbol{u}_z \tag{18.0.98}$$

tiene las componentes

$$A'_x = -\frac{1}{2}By - \frac{\partial\chi}{\partial x} \quad , \quad A'_y = \frac{1}{2}Bx - \frac{\partial\chi}{\partial y} \quad , \quad A'_z = -\frac{\partial\chi}{\partial z} \tag{18.0.99}$$

Dado que, bajo esta transformación gauge independiente del tiempo, el potencial eléctrico no cambia en este caso,

$$\varphi' \equiv \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} = \varphi \tag{18.0.100}$$

el campo eléctrico $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$ no se ve modificado, y tenemos el Hamiltoniano transformado *gauge*,

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x - \frac{e}{c}A'_x\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{e}{c}A'_y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_z - \frac{e}{c}A'_z\right)^2 - eEx \tag{18.0.101}$$

• Buscamos entonces un gauge que nos permita separar la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo, para la función característica W

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{e}{c}A'_x\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{e}{c}A'_y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{e}{c}A'_z\right)^2 - eEx = E \tag{18.0.102}$$

Dado que x es la única coordenada que aparece explícitamente en el Hamiltoniano, podemos buscar, por simplicidad, un vector potencial dependiente sólo de esta coordenada, en cuyo caso las otras dos coordenadas (y, z) serían cíclicas, sus momentos conjugados α_y, α_z constantes, y el sistema sería separable directamente con la solución general

$$W(x, y, z; E, \alpha_y, \alpha_z) = X(x; E, \alpha_y, \alpha_z) + y\alpha_y + z\alpha_z \tag{18.0.103}$$

• Por tanto, debemos exigir las condiciones gauge

$$\frac{\partial\chi}{\partial z} = 0 \rightarrow \chi = \chi(x, y) \tag{18.0.104}$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = -\frac{1}{2}By \rightarrow \chi = -\frac{1}{2}Byx \tag{18.0.105}$$

en cuyo caso

$$\boldsymbol{A}' = Bx\boldsymbol{u}_y \tag{18.0.106}$$

y entonces la ecuación de Hamilton−Jacobi para la función característica se lee

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{e}{c}Bx\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2-eEx=E \tag{18.0.107}$$

que da lugar a la ecuación para la función $X(x)$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dX}{dx}\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\alpha_y-\frac{e}{c}Bx\right)^2+\frac{1}{2m}\alpha_z^2-eEx=E \tag{18.0.108}$$

que se resuelve directamente por cuadraturas, en la forma

$$X=\int\sqrt{2m\left(E+eEx\right)-\alpha_z^2-\left(\alpha_y-\frac{e}{c}Bx\right)^2}\,dx \tag{18.0.109}$$

5.9.3 Partícula puntual en potencial no central

Utilice el método de Hamilton−Jacobi para analizar el movimiento de una partícula en el potencial no central generado por un dipolo puntual

$$V=k\frac{\cos\theta}{r^2} \tag{18.0.110}$$

en coordenadas esféricas.

(a) Escriba la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente del tiempo para la función característica del sistema en coordenadas esféricas. Demuestre que esta ecuación es separable y determine su solución en forma de cuadraturas.

(b) Interprete físicamente las constantes de separación, y verifique que existen dos constantes del movimiento en la forma L_z y $L^2+2mk\cos\theta$.

(a) En coordenadas esféricas (r,θ,φ) el Hamiltoniano está dado por

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\right)+k\frac{\cos\theta}{r^2} \tag{18.0.111}$$

y la ecuación de Hamilton−Jacobi independiente de tiempo para la función característica se escribe

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2\right)+k\frac{\cos\theta}{r^2}=E \tag{18.0.112}$$

Dado que φ es coordenada cíclica, con su momento conjugado α_φ constante, podemos hacer una primera separación en la solución general

$$W\left(r,\theta,\varphi;E,\alpha_\theta,\alpha_\varphi\right)=F\left(r,\theta;E,\alpha_\theta,\alpha_\varphi\right)+\varphi\alpha_\varphi \tag{18.0.113}$$

siendo $\alpha_\varphi=L_z$ la componente z del momento angular del movimiento. La función F debe satisfacer

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)^2+\frac{L_z^2}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\right)+k\frac{\cos\theta}{r^2}=E \tag{18.0.114}$$

ecuación que podemos escribir en la forma

$$r^2\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2-2mr^2E=-2mk\cos\theta-\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)^2-\frac{L_z^2}{\mathrm{sen}^2\,\theta} \tag{18.0.115}$$

Para hallar la solución general, por la estructura de dicha ecuación podemos probar la combinación

$$F(r,\theta) = R(r) + \Theta(\theta) \tag{18.0.116}$$

de forma que la ecuación de Hamilton−Jacobi da lugar a

$$r^2\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 - 2mr^2E = -2mk\cos\theta - \left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)^2 - \frac{L_z^2}{\operatorname{sen}^2\theta} \tag{18.0.117}$$

El lado izquierdo de la última ecuación depende sólo de la coordenada r, mientras que el derecho no depende de r. Necesariamente entonces cada lado debe ser igual a una constante $-\alpha_\theta$, independiente de E y α_φ^2. Por tanto, la solución general satisface simultáneamente

$$r^2\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 - 2mr^2E = -\alpha_\theta \tag{18.0.118}$$

$$2mk\cos\theta + \left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{L_z^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = \alpha_\theta \tag{18.0.119}$$

cuya solución se obtiene por cuadraturas

$$R(r) = \int \sqrt{2mE - \frac{\alpha_\theta}{r^2}}\,dr \tag{18.0.120}$$

$$\Theta(\theta) = \int \sqrt{\alpha_\theta - 2mk\cos\theta - \frac{L_z^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}\,d\theta \tag{18.0.121}$$

Por tanto, la función principal de Hamilton para este problema resulta ser

$$S(r,\theta,\varphi,t;E,L,L_z) = R(r;E,\alpha_\theta,L_z) + \Theta(\theta;E,\alpha_\theta,L_z) + \varphi\alpha_\varphi - Et \tag{18.0.122}$$

que es la función generadora de tipo 2 para la transformación a las nuevas coordenadas canónicas constantes $(\beta_E,\beta_\theta,\beta_\varphi)$ y a los nuevos momentos canónicos (E,α_θ,L_z) que también son constantes.

(b) Para ver el significado físico de la constante α_θ, utilizamos la definición de p_θ

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial\theta} = \sqrt{\alpha_\theta - 2mk\cos\theta - \frac{L_z^2}{\operatorname{sen}^2\theta}} \tag{18.0.123}$$

Dado que

$$p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = p_\theta^2 + \frac{L_z^2}{\operatorname{sen}^2\theta} \equiv L^2 \tag{18.0.124}$$

verificamos que efectivamente existe una constante de movimiento

$$\alpha_\theta = L^2 + 2mk\cos\theta \tag{18.0.125}$$

junto con la constante $\alpha_\varphi = L_z$.

5.9.4 Separabilidad con condiciones de Levi-Civita

Un sistema dinámico de dos grados de libertad (x,y) está descrito por el Hamiltoniano

$$H = p_x g(x) - p_y h(y) - f(x) + y^2 \tag{18.0.126}$$

donde cada función f,g,h es función exclusiva de su argumento. Verifique la separabilidad de la ecuación de Hamilton−Jacobi, determine su función principal y obtenga a partir de ella la ley general del movimiento del sistema.

• Aplicando las condiciones de Levi-Civita (véase la sección 5.3.1) para la separabilidad, necesitamos que se cumpla

$$\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_y}+\frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}=\frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p_y}+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial y} \tag{18.0.127}$$

Dado que para el Hamiltoniano del enunciado las cuatro derivadas segundas son nulas, se satisface la condición idénticamente, y el sistema es separable en estas coordenadas.

• La ecuación de Hamilton−Jacobi para la función característica de Hamilton se escribe

$$H=p_x g\left(x\right)-p_y h\left(y\right)-f\left(x\right)+y^2 \tag{18.0.128}$$

$$g\left(x\right)\frac{\partial W}{\partial x}-f\left(x\right)-h\left(y\right)\frac{\partial W}{\partial y}+y^2=E \tag{18.0.129}$$

donde E es la energía del sistema. Comprobamos que la solución puede construirse con la combinación aditiva

$$W\left(x,y\right)=X\left(x\right)+Y(y) \tag{18.0.130}$$

y de esta forma, la ecuación de Hamilton−Jacobi da lugar a

$$g\left(x\right)\frac{dX}{dx}-f\left(x\right)-h\left(y\right)\frac{dY}{dy}+y^2=E \tag{18.0.131}$$

• El lado izquierdo es suma de dos contribuciones, cada una de ellas dependientes sólo de la coordenada correspondiente, e iguales a la energía del movimiento en la dirección dada por la coordenada. Por tanto, la solución general satisface simultáneamente

$$g\left(x\right)\frac{dX}{dx}-f\left(x\right)=E_x \tag{18.0.132}$$

$$-h\left(y\right)\frac{dY}{dy}+y^2=E-E_x\equiv E_y \tag{18.0.133}$$

cuya solución queda resuelta por cuadraturas

$$X(x)=\int\frac{E_x+f\left(x\right)}{g\left(x\right)}dx \tag{18.0.134}$$

$$Y(y)=\int\frac{y^2-E+E_x}{h\left(y\right)}dy \tag{18.0.135}$$

Por tanto, la función principal de Hamilton para este problema resulta ser

$$S\left(x,y,t;E,E_x\right)=X\left(x;E_x\right)+Y\left(y;E,E_x\right)-Et \tag{18.0.136}$$

que es la función generadora de tipo 2 para la transformación a las nuevas coordenadas canónicas constantes (β_E,β_x) y a los nuevos momentos canónicos $(E,E_x,)$ que también son constantes, y que están dadas por

$$\beta_E\equiv\frac{\partial S}{\partial E}=\frac{\partial Y}{\partial E}-t=-\int\frac{dy}{h\left(y\right)}-t \tag{18.0.137}$$

$$\beta_x\equiv\frac{\partial S}{\partial E_x}=\frac{\partial X}{\partial E_x}+\frac{\partial Y}{\partial E_x}=\int\frac{dx}{g\left(x\right)}+\int\frac{dy}{h\left(y\right)} \tag{18.0.138}$$

• De ambas ecuaciones, obtenemos finalmente la ley de movimiento para $x\left(t\right),y(t)$ en la forma de cuadraturas

$$t+\beta_x-\beta_E=\int\frac{dx}{g\left(x\right)}\quad,\quad t-\beta_E=-\int\frac{dy}{h\left(y\right)} \tag{18.0.139}$$

Capítulo 19

Teorema de Liouville. Invariantes integrales y adiabáticos

6.10.1 Partículas en movimiento vertical en campo gravitatorio

Un grupo de partículas, todas de la misma masa m, se mueven en presencia el campo gravitatorio terrestre (supuesto constante) en dirección vertical, y tienen inicialmente en el tiempo $t = 0$ alturas q_0 y momentos p_0 dados en el espacio de fases por el rectángulo $-a \leq q_0 \leq a$, $-b \leq p_0 \leq b$.

(a) Determine cuál es la región que ocupan las partículas en el espacio de fases en el instante t.

(b) Compruebe que se conserva el área en el espacio de fases de dos formas: utilizando la transformación canónica $(q_0, p_0) \rightarrow (q, p)$ y por cálculo directo, a partir de la solución al movimiento.

(a) El Hamiltoniano de la partícula se conserva y está dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} - mgq \tag{19.0.1}$$

donde q está dirigida en el mismo sentido que el campo gravitatorio, y las ecuaciones de Hamilton asociadas son

$$\dot{q} \equiv \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} \equiv -\frac{\partial H}{\partial q} = mg \tag{19.0.2}$$

La ley de movimiento para (q, p) se obtiene con la integración de estas ecuaciones, en la forma

$$q(t) = q(0) + \frac{p(0)}{m}t + \frac{1}{2}gt^2 = q_0 + \frac{p_0}{m}t + \frac{1}{2}gt^2 \tag{19.0.3}$$

$$p(t) = p(0) + mgt = p_0 + mgt \tag{19.0.4}$$

en función de las variables canónicas (q_0, p_0) definidas en el instante inicial. Podemos invertir estas fórmulas para obtener (q_0, p_0) en función de (q, p), llegando a las expresiones

$$q_0 = q - \frac{p}{m}t + \frac{1}{2}gt^2 \tag{19.0.5}$$

$$p_0 = p - mgt \tag{19.0.6}$$

• Por otro lado, la condición inicial para la región en el espacio de fases ocupada por las partículas

$$-a \leq q_0 \leq a \quad , \quad -b \leq p_0 \leq b \tag{19.0.7}$$

se escribe entonces, en función de las variables canónicas (q, p), en la forma

$$-a \leq q - \frac{p}{m}t + \frac{1}{2}gt^2 \leq a \tag{19.0.8}$$

$$-b \leq p - mgt \leq b \tag{19.0.9}$$

Se puede deducir por tanto que para el momento, el intervalo de valores en el instante t está dado por

$$-b + mgt \leq p \leq b + mgt \tag{19.0.10}$$

Respecto a la coordenada q, se deduce en primer lugar que

$$-a + \frac{p}{m}t - \frac{1}{2}gt^2 \leq q \leq a + \frac{p}{m}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{19.0.11}$$

y por tanto, la función q está acotada por las dos líneas rectas paralelas

$$q_1(p) = -a + \frac{p}{m}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{19.0.12}$$

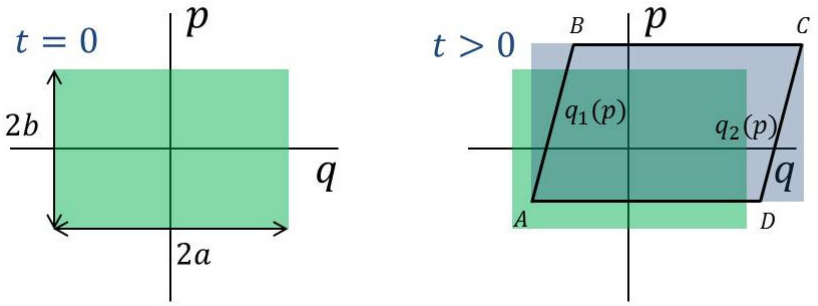
$$q_2(p) = a + \frac{p}{m}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{19.0.13}$$

entre los dos puntos límites

$$A \equiv (q_1(-b + mgt), -b + mgt) \quad , \quad C \equiv (q_2(b + mgt), b + mgt) \tag{19.0.14}$$

formando el paralelogramo $ABCD$ mostrado en la figura. Los otros dos vértices son

$$B \equiv (q_1(b + mgt), b + mgt) \quad , \quad D \equiv (q_2(-b + mgt), -b + mgt) \tag{19.0.15}$$



(b) El área S en el espacio de fases que ocupan las partículas está dada en cada instante por la integral

$$S = \int\int dqdp \tag{19.0.16}$$

sobre la región del espacio de fases acotada por su movimiento. En el instante inicial, la región es el rectángulo $-a \leq q_0 \leq a \;\; -b \leq p_0 \leq b$, y la integral de su área es directa

$$S = \int\int dq_0 dp_0 = 2a \cdot 2b = 4ab \tag{19.0.17}$$

En el instante t, la región es el paralelogramo $ABCD$, y la integral de su área también es directa

$$S(0) = \int_{-b+mgt}^{b+mgt} dp \int_{q_1(p)}^{q_2(p)} dq = \int_{-b+mgt}^{b+mgt} (q_2(p) - q_1(p))\, dp = 2a \int_{-b+mgt}^{b+mgt} dp = 4ab \tag{19.0.18}$$

Se demuestra entonces que el área de la región ocupada por las partículas en el espacio de fases se conserva durante el movimiento.

• Pasemos a calcular lo mismo en función de la transformación canónica desde el estado inicial (q_0, p_0) al estado final (q, p). El elemento de área satisface

$$dq_0 dp_0 \equiv \mathcal{J} dq dp \equiv \left| \frac{\partial (q_0, p_0)}{\partial (q, p)} \right| dq dp \tag{19.0.19}$$

siendo $\mathcal{J}$ el determinante de la matriz jacobiana

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_0}{\partial q} & \frac{\partial q_0}{\partial p} \\ \frac{\partial p_0}{\partial q} & \frac{\partial p_0}{\partial p} \end{pmatrix} \tag{19.0.20}$$

Aunque para toda transformación canónica dicho determinante es la unidad, y por lo tanto $dq_0 dp_0 = dq dp$, y de aquí $S(t) = S(0)$, en este caso tenemos la ley de transformación

$$q_0 = q - \frac{p}{m} t + \frac{1}{2} g t^2 \quad , \quad p_0 = p - mgt \tag{19.0.21}$$

y podemos calcularlo de forma específica demostrando lo mismo

$$\frac{\partial (q_0, p_0)}{\partial (q, p)} \equiv M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{t}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{J} \equiv \det M = 1 \tag{19.0.22}$$

que el área en el espacio de fases es una cantidad conservada, $S(t) = S(0)$.

6.10.2 Dinámica disipativa en el espacio de fases

(a) Determine la trayectoria y la densidad de estados en el espacio de fases de un oscilador amortiguado, cuya fuerza de fricción es $F_r = -2m\lambda\dot{q}$.

(b) Describa el espacio de fases del oscilador amortiguado si utilizáramos el Lagrangiano equivalente

$$L' = \frac{1}{2} m e^{2\lambda t} \left(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2 \right) \tag{19.0.23}$$

(a) En ausencia de amortiguamiento, el Hamiltoniano se conserva y la densidad es una constante del movimiento, con un valor igual a su valor inicial. Cuando existe una fuerza de rozamiento, de las ecuaciones de Lagrange del movimiento

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} + F_r \tag{19.0.24}$$

deducimos la ecuación de Hamilton para el momento p

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} + F_r \tag{19.0.25}$$

En este caso, el movimiento en el espacio de fases no sería similar a un fluido incompresible. El campo de velocidad

$$\boldsymbol{v} \equiv (\dot{q}, \dot{p}) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} + F_r \right) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right) + (0, F_r) \tag{19.0.26}$$

satisface en su lugar

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (0, F_r) = \frac{\partial F_r}{\partial p} \neq 0 \tag{19.0.27}$$

Y en consecuencia, la ecuación de movimiento para la densidad en el espacio de fases se debe escribir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho + (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) \, \rho = 0 \tag{19.0.28}$$

Introduciendo ahora el operador de derivada temporal total

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \tag{19.0.29}$$

vemos que

$$\frac{d\rho}{dt} + (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) \, \rho = 0 \tag{19.0.30}$$

que tiene la integral directa

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = - \int (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) \, dt \tag{19.0.31}$$

Para continuar, utilizamos la expresión usual de la fuerza de rozamiento

$$F_r = -2m\lambda \dot{q} \tag{19.0.32}$$

que escribimos en función del momento $p = m\dot{q}$, $F_r = -2\lambda p$, con lo que $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = -2\lambda$. Con esto, la integral se resuelve en la forma

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = 2\lambda t \tag{19.0.33}$$

siendo ρ_0 la densidad en el instante inicial, resultando una densidad en el espacio de fases creciente en el tiempo.

$$\rho = \rho_0 e^{2\lambda t} \tag{19.0.34}$$

Tal crecimiento se debe a la reducción en el volumen accesible en el espacio de fases.

• Podemos verificar este hecho calculando de forma expresa la trayectoria del oscilador amortiguado en el espacio de fases. Partiendo de la solución general del problema,

$$q(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi) \quad , \quad \Omega \equiv \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} \tag{19.0.35}$$

$$p(t) = m\dot{q}(t) = -\lambda m q - Am\Omega e^{-\lambda t} \operatorname{sen}(\Omega t + \varphi) \tag{19.0.36}$$

podemos reconstruir la trayectoria en la forma

$$\left(\frac{p + \lambda m q}{m \Omega A} \right)^2 + \left(\frac{q}{A} \right)^2 = e^{-2\lambda t} \tag{19.0.37}$$

que es una espiral que tiende al origen, punto de equilibrio del movimiento, $(q = 0, p = 0)$. Esto es, a medida que transcurre el tiempo el *área* ocupada por la trayectoria del sistema tiende a 0.

(b) Al ser el Lagrangiano modificado L' un Lagrangiano *equivalente*, por definición, da lugar a la misma solución de movimiento para (q, p). Sin embargo, haciendo además la transformación $Q = qe^{\lambda t}$ el nuevo Lagrangiano es independiente del tiempo

$$L' = \frac{1}{2} m \left(\left(\dot{Q} - \lambda Q \right)^2 - \omega^2 Q^2 \right) \tag{19.0.38}$$

y el nuevo momento generalizado y Hamiltoniano son

$$P = \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}} = m \left(\dot{Q} - \lambda Q \right) \tag{19.0.39}$$

$$H' = P\dot{Q} - L = \frac{P^2}{2m} + \lambda QP + \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2 \tag{19.0.40}$$

que por ser independiente del tiempo, sí da lugar a un volumen conservado en el espacio de fases (Q, P). Sin embargo, a diferencia, en este caso el momento generalizado

$$P = m\dot{q}e^{\lambda t} \tag{19.0.41}$$

no tiene un significado físico sencillo de interpretar.

6.10.3 Evolución de la densidad de estados en el espacio de fases

Obtenga la ecuación de evolución para la densidad $\rho\left(t, q_1, q_2, p_1, p_2\right)$ en el espacio de fases de dos osciladores idénticos unidimensionales acoplados, con el Hamiltoniano

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}k\left(q_1 - q_2\right)^2 \tag{19.0.42}$$

y encuentre la solución que satisface la condición inicial

$$\rho\left(0, q_1, q_2, p_1, p_2\right) = \frac{1}{Z}\exp\left(-\beta\left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}\right)\right) \tag{19.0.43}$$

siendo Z un factor de normalización, por determinar.

• Dado que el sistema es conservativo, la velocidad del movimiento en el espacio de fases satisface

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{19.0.44}$$

y por tanto, la evolución de la densidad viene dada por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\rho \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + [\rho, H] = 0 \tag{19.0.45}$$

Para este sistema bidimensional, el corchete de Poisson tiene la definición

$$[\rho, H] = \frac{\partial \rho}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial \rho}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial \rho}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{\partial \rho}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q_2} \tag{19.0.46}$$

y el valor

$$[\rho, H] = \frac{p_1}{m}\frac{\partial \rho}{\partial q_1} + \frac{p_2}{m}\frac{\partial \rho}{\partial q_2} + k\left(q_1 - q_2\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial p_2} - \frac{\partial \rho}{\partial p_1}\right) \tag{19.0.47}$$

Con ello, la ecuación de evolución para la densidad resulta ser

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{p_1}{m}\frac{\partial \rho}{\partial q_1} + \frac{p_2}{m}\frac{\partial \rho}{\partial q_2} + k\left(q_1 - q_2\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial p_2} - \frac{\partial \rho}{\partial p_1}\right) = 0 \tag{19.0.48}$$

• Para determinar la densidad de estados a partir de su perfil inicial, aplicamos la relación general (véase el ejercicio (6.7.4))

$$\rho\left(q, p, t\right) = \rho\left(F\left(q, -p, -t\right), G\left(q, -p, -t\right), 0\right) \tag{19.0.49}$$

donde las funciones F, G determinan las ecuaciones de movimiento $q = F(q_0, p_0, t)$ y $p = G(q_0, p_0, t)$ a partir de los datos iniciales. Para ello, resolvemos primero las ecuaciones de Hamilton del sistema

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m} \quad , \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -k\left(q_1 - q_2\right) \tag{19.0.50}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m} \quad , \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = k\,(q_1 - q_2) \tag{19.0.51}$$

de donde deducimos

$$\ddot{q}_1 = \frac{\dot{p}_1}{m} = -\Omega^2\,(q_1 - q_2) \quad , \quad \ddot{q}_2 = \frac{\dot{p}_2}{m} = \Omega^2\,(q_1 - q_2) \tag{19.0.52}$$

siendo $k = m\Omega^2$. Por tanto, la solución general es suma de los dos modos de vibración

$$Q_1 = q_1 + q_2 = q_{10} + q_{20} + \frac{p_{10} + p_{20}}{m} t \tag{19.0.53}$$

$$Q_2 = q_1 - q_2 = (q_{10} - q_{20}) \cos\sqrt{2}\Omega t + \frac{p_{10} - p_{20}}{\sqrt{2} m\Omega} \operatorname{sen}\sqrt{2}\Omega t \tag{19.0.54}$$

escritos en la forma

$$q_1 = \frac{1}{2}\,(Q_1 + Q_2) \quad , \quad q_2 = \frac{1}{2}\,(Q_1 - Q_2) \tag{19.0.55}$$

Y de aquí, podemos obtener la solución inversa en el tiempo, llegando al resultado

$$q_{10} = \frac{q_1 + q_2}{2} + \frac{p_1 + p_2}{2m} t + \frac{(q_1 - q_2)}{2} \cos\sqrt{2}\Omega t + \frac{p_1 - p_2}{2\sqrt{2} m\Omega} \operatorname{sen}\sqrt{2}\Omega t \tag{19.0.56}$$

$$p_{10} = \frac{p_1 + p_2}{2} + m\Omega \frac{(q_1 - q_2)}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\sqrt{2}\Omega t - \frac{p_1 - p_2}{2} \cos\sqrt{2}\Omega t \tag{19.0.57}$$

$$q_{20} = \frac{q_1 + q_2}{2} + \frac{p_1 + p_2}{2m} t - \frac{(q_1 - q_2)}{2} \cos\sqrt{2}\Omega t - \frac{p_1 - p_2}{2\sqrt{2} m\Omega} \operatorname{sen}\sqrt{2}\Omega t \tag{19.0.58}$$

$$p_{20} = \frac{p_1 + p_2}{2} - m\Omega \frac{(q_1 - q_2)}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\sqrt{2}\Omega t + \frac{p_1 - p_2}{2} \cos\sqrt{2}\Omega t \tag{19.0.59}$$

A partir de esta ultima solución, construimos la densidad de estados en el tiempo t, en la forma

$$\rho\,(t, q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\beta}{2m}\left(p_{10}^2(t) + p_{20}^2(t)\right)\right) \tag{19.0.60}$$

donde

$$\begin{aligned} p_{10}^2\,(t) + p_{20}^2\,(t) = {} & \frac{(p_1 + p_2)^2}{2} + m^2\Omega^2\,(q_1 - q_2)^2 \operatorname{sen}^2\sqrt{2}\Omega t \\ & + \frac{(p_1 - p_2)^2}{2} \cos^2\sqrt{2}\Omega t - \sqrt{2} m\Omega\,(q_1 - q_2)\,(p_1 - p_2) \operatorname{sen}\sqrt{2}\Omega t \cos\sqrt{2}\Omega t \end{aligned} \tag{19.0.61}$$

• Nos falta por determinar el factor de normalización Z tal que la integral de la densidad en todo el espacio de fases sea la unidad, para todo instante de tiempo. Ya que es un valor constante, lo más sencillo es calcularlo en el instante inicial $t = 0$, según la expresión

$$\int\int \rho\,(0, q_1, q_2, p_1, p_2)\, dqdp = 1 = \frac{1}{Z} \exp\left(-\beta\left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}\right)\right) \tag{19.0.62}$$

y por tanto, con

$$\frac{1}{Z} \int dq \int \exp\left(-\beta\left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}\right)\right) dp = 1 \tag{19.0.63}$$

La integral en $dq \equiv dq_1 dq_2$ en todo el espacio de configuración da como resultado el *volumen espacial* del sistema, digamos V, y la integral en el momento, con $dp \equiv dp_1 dp_2$ es directa, utilizando las tablas de integrales,

$$\int \exp\left(-\beta\left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}\right)\right) dp \equiv \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\beta \frac{p^2}{2m}\right) dp\right)^2 = \frac{2m\pi}{\beta} \tag{19.0.64}$$

y con todo ello obtenemos el factor constante Z en la forma

$$\frac{1}{Z}\cdot V\cdot\frac{2m\pi}{\beta}=1\Rightarrow\ Z=\frac{2m\pi V}{\beta} \tag{19.0.65}$$

7.6.1 Teorema de Lee Hwa-Chung

Demuestre que si la cantidad integral K, definida de forma genérica por

$$K\equiv\oint\left(A\left(q,p,t\right)dq+B\left(q,p,t\right)dp\right) \tag{19.0.66}$$

es un invariante integral universal, entonces necesariamente debe ser múltiplo de la variable de acción.

• Ya que K es invariante, su variación en el tiempo es nula

$$\frac{\delta K}{\delta t}=0 \tag{19.0.67}$$

por lo que, dado que el contorno de integración no depende del tiempo, y podemos conmutar la derivada temporal y la diferenciación, obtenemos la condición

$$0=\oint\left(\frac{\delta A}{\delta t}dq+\frac{\delta B}{\delta t}dp+Ad\frac{\delta q}{\delta t}+Bd\frac{\delta p}{\delta t}\right) \tag{19.0.68}$$

siendo

$$\frac{\delta A}{\delta t}=\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\delta q}{\delta t}+\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\delta p}{\delta t}\quad,\quad\frac{\delta B}{\delta t}=\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial q}\frac{\delta q}{\delta t}+\frac{\partial B}{\partial p}\frac{\delta p}{\delta t} \tag{19.0.69}$$

Integrando por partes los dos últimos términos

$$\oint Ad\frac{\delta q}{\delta t}=-\oint\frac{\delta q}{\delta t}dA\quad,\quad\oint Bd\frac{\delta p}{\delta t}=-\oint\frac{\delta p}{\delta t}dB \tag{19.0.70}$$

llegamos a

$$0=\oint\left(\frac{\delta A}{\delta t}dq-\frac{\delta q}{\delta t}dA+\frac{\delta B}{\delta t}dp-\frac{\delta p}{\delta t}dB\right) \tag{19.0.71}$$

donde en el espacio de fases la variación de A,B está dada por

$$dA=\frac{\partial A}{\partial q}dq+\frac{\partial A}{\partial p}dp\quad,\quad dB=\frac{\partial B}{\partial q}dq+\frac{\partial B}{\partial p}dp \tag{19.0.72}$$

Por tanto, obtenemos la condición de invariancia

$$0=\oint\left(\left[\frac{\partial A}{\partial t}+\left(\frac{\partial B}{\partial q}-\frac{\partial A}{\partial p}\right)\frac{\partial H}{\partial q}\right]dq+\left[\frac{\partial B}{\partial t}+\left(\frac{\partial B}{\partial q}-\frac{\partial A}{\partial p}\right)\frac{\partial H}{\partial p}\right]dp\right) \tag{19.0.73}$$

al ser

$$\frac{\delta p}{\delta t}=-\frac{\partial H}{\partial q}\quad,\quad\frac{\delta q}{\delta t}=\frac{\partial H}{\partial p} \tag{19.0.74}$$

• La integral cíclica siempre será cero cuando el integrando sea una diferencial exacta en (q,p). Por tanto, definiendo

$$Z=\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q} \tag{19.0.75}$$

debemos exigir que

$$df = \left[\frac{\partial A}{\partial t} - Z\frac{\partial H}{\partial q}\right] dq + \left[\frac{\partial B}{\partial t} - Z\frac{\partial H}{\partial p}\right] dp \tag{19.0.76}$$

sea una diferencial exacta, esto es,

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial A}{\partial t} - Z\frac{\partial H}{\partial q}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial B}{\partial t} - Z\frac{\partial H}{\partial q}\right) \tag{19.0.77}$$

que nos lleva a la condición

$$\frac{dZ}{dt} \equiv \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial Z}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \tag{19.0.78}$$

luego Z debe ser una constante, digamos c,

$$\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q} = c \tag{19.0.79}$$

• Asumiendo esta condición para la invariancia de K, vemos que podemos escribir también

$$\frac{\partial B}{\partial q} = \frac{\partial\left(A - cp\right)}{\partial p} \tag{19.0.80}$$

Indicando que existe una función G de las variables (q, p) con parámetro t cuya diferencial, exacta, está dada por

$$dg = \left(A - cp\right) dq + Bdp \tag{19.0.81}$$

Integrando entonces sobre el contorno cíclico en el espacio de fases, vemos que

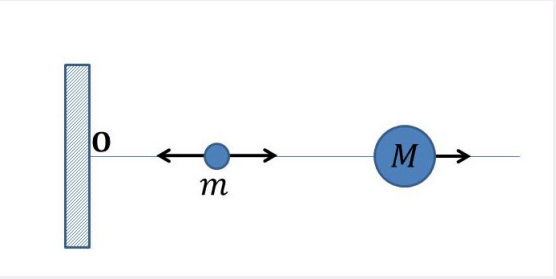
$$\oint dg = 0 = \oint \left(\left(A - cp\right) dq + Bdp\right) \tag{19.0.82}$$

Y por tanto,

$$K \equiv \oint \left(A\left(q, p, t\right) dq + B\left(q, p, t\right) dp\right) = \oint cpdq \equiv cI \tag{19.0.83}$$

8.7.1 Invariante adiabático para la colisión elástica de dos masas

Dos partículas de masas m y M, con $m \ll M$ se mueven a lo largo de la línea recta de la figura



Las colisiones entre las dos masas y entre la pared (el punto O) y la masa m son elásticas. Asumiendo que la velocidad de la partícula ligera es mucho mayor que la velocidad de la partícula pesada, determinar el movimiento de ésta última promediado sobre un periodo del movimiento de la partícula ligera.
Nota: se necesitarán los resultados del ejercicio (8.5.1).

Definamos los valores x y X como las coordenadas de las masas m y M respecto del punto O. El movimiento de la partícula ligera puede asemejarse al movimiento de una partícula entre dos paredes impenetrables, una de las cuales se mueve con velocidad $\dot{X}$. Para ello es necesario que estemos en el régimen adiabático

$$\dot{X} \ll |\dot{x}| \tag{19.0.84}$$

Esto es, la velocidad de variación de la pared móvil sea mucho menor que la velocidad del movimiento, de forma que en cada periodo de movimiento la longitud del mismo no varíe apreciablemente. Conocemos por el desarrollo del ejercicio (8.5.1) que en estos casos

$$vL = \text{cte} \tag{19.0.85}$$

siendo v la velocidad de la partícula (ligera), y L la distancia entre las paredes (dada por la posición de la partícula pesada). Por tanto, identificando estas variables en nuestro caso, vemos que la velocidad de la partícula ligera depende de la localización de la partícula pesada, en la forma

$$|\dot{x}| = \frac{C}{X} \tag{19.0.86}$$

siendo C una constante. La relación entre las dos velocidades viene dada por la definición de la energía total, y su posible conservación. Ya que las colisiones son elásticas, la energía es únicamente la suma de las energías cinéticas de las masas

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 \tag{19.0.87}$$

y es una cantidad conservada. Ya que debemos determinar la ecuación de movimiento para la variable X, utilizamos el invariante adiabático para eliminar la dependencia en $\dot{x}$ con el resultado

$$E = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{X^2} \tag{19.0.88}$$

Vemos así que el efecto de la partícula ligera sobre el movimiento de la partícula pesada es el mismo que el del potencial efectivo V_{ef}

$$V_{ef}(X) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{X^2} \tag{19.0.89}$$

De la conservación de la energía deducimos la ecuación de la trayectoria $\sqrt{\frac{2E}{M} - \frac{m}{M}\frac{C^2}{X^2}} = \dot{X}$ que podemos resolver para la variable $Y = X^2$ en la forma

$$\int \frac{dY}{2\sqrt{Y - \frac{mC^2}{2E}}} = \sqrt{\frac{2E}{M}} \int dt \to X = \sqrt{\frac{mC^2}{2E} + \left(\sqrt{\frac{2E}{M}}t + a\right)^2} \tag{19.0.90}$$

siendo a una constante. Los valores de las constantes del movimiento, E, C, a se determinan con los valores iniciales de las variables $X, \dot{X}, \dot{x}$, y son independientes del valor de $x(0)$, puesto que x es una coordenada cíclica del sistema.

8.7.2 Péndulo simple con longitud de variación lenta

Considere un péndulo en un plano vertical que realiza pequeñas oscilaciones respecto a su punto de equilibrio, y cuya longitud ℓ se reduce de forma adiabática, tirando desde su punto de suspensión, y por tanto incrementando la tensión del hilo.

Determine en el régimen adiabático cuál es el promedio de la tensión en una oscilación, deduzca el trabajo realizado durante este proceso y verifique que dicho trabajo conlleva una variación de la energía del péndulo, de forma que se mantiene constante un invariante adiabático, por determinar. Verifique que este invariante está en correspondencia con el resultado general para un oscilador armónico con una frecuencia variable en el tiempo.

Cuando la longitud del péndulo varía en el tiempo, la ecuación de movimiento en la dirección radial desde el punto de suspensión es

$$m\ddot{l} = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2 - T_h \tag{19.0.91}$$

donde θ es el ángulo de giro del péndulo, que se asume pequeño. El primer término es la componente del peso en la dirección radial, el segundo es la fuerza centrífuga debido al giro con velocidad angular $\dot{\theta}$ respecto al punto de suspensión P, y el último término es la tensión T_h del hilo, dirigida hacia P. Como hemos visto en otras ocasiones, en el régimen adiabático el término de la aceleración (dependiente de la derivada segunda respecto al tiempo) es despreciable frente a los otros, con lo cual la tensión está dada por

$$T_h = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2 \simeq mg\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + ml\dot{\theta}^2 \tag{19.0.92}$$

fórmula válida en la aproximación de ángulos pequeños y para una variación suficientemente lenta de la longitud del péndulo. Realizamos ahora el promedio para un periodo de oscilación, siguiendo la expresión general

$$\overline{f} \equiv \frac{1}{T}\int_0^T f\left(t\right)dt \tag{19.0.93}$$

sabiendo que la solución al movimiento es

$$\theta = \theta_{max}\cos\left(\omega t + \varphi\right) \tag{19.0.94}$$

válido para un periodo de oscilación, durante el cual la variación de la longitud es despreciable. Aquí θ_{max} es la amplitud angular máxima del movimiento, $\omega = \sqrt{g/l}$ es la frecuencia angular del movimiento armónico, y $T = 2\pi/\omega$ es su periodo. Los valores promedios que necesitamos son

$$\overline{\theta^2} = \theta_{max}^2\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\omega t + \varphi\right)dt = \frac{1}{2}\theta_{max}^2 \tag{19.0.95}$$

$$\overline{\dot{\theta}^2} = \omega^2\theta_{max}^2\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}^2\left(\omega t + \varphi\right)dt = \frac{1}{2}\frac{g}{l}\theta_{max}^2 \tag{19.0.96}$$

por lo que término a término obtenemos

$$mg\overline{\cos\theta} \simeq mg\left(1 - \frac{\overline{\theta^2}}{2}\right) = mg\left(1 - \frac{1}{4}\theta_{max}^2\right) \tag{19.0.97}$$

$$ml\overline{\dot{\theta}^2} = \frac{1}{2}mg\theta_{max}^2 \tag{19.0.98}$$

lo que lleva al valor promedio

$$\overline{T_h} = mg + \frac{1}{4}mg\theta_{max}^2 \tag{19.0.99}$$

para la tensión del hilo. Podemos además relacionar θ_{max}^2 con el valor de la energía total E del movimiento. En la aproximación de ángulos pequeños tenemos

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 - mgl \tag{19.0.100}$$

de forma que

$$E = \overline{E} = \frac{1}{2}mgl\theta_{max}^2 - mgl \tag{19.0.101}$$

que se conserva constante al menos durante el periodo de oscilación. Por tanto, $\theta_{max}^2 = 2\frac{E+mgl}{mgl} = 2\frac{E_{osc}}{mgl}$
siendo $E_{osc} = E + mgl$ la energía de la oscilación propiamente dicha, y con ello, el valor promedio de la tensión del hilo resulta ser

$$\overline{T_h} = mg + \frac{E_{osc}}{2l} \tag{19.0.102}$$

El trabajo que debe llevarse a cabo por periodo de oscilación, para la modificación de la longitud del péndulo en la cantidad δl será

$$W = -\overline{T_h} \cdot \delta l = -mg\delta l - \frac{E_{osc}}{2l}\delta l \tag{19.0.103}$$

Con esta definición, W tiene el signo positivo correcto (trabajo realizado sobre el péndulo) cuando la longitud disminuye ($\delta l < 0$). El primer término en W se corresponde con el cambio de posición del punto de equilibrio, mientras que el segundo término revierte directamente en la variación de energía oscilatoria del péndulo. Por tanto,

$$\delta E_{osc} = -\frac{E_{osc}}{2l}\delta l \tag{19.0.104}$$

cuya integración nos da el invariante adiabático del enunciado

$$\frac{\delta E_{osc}}{E_{osc}} + \frac{\delta l}{2l} = 0 \rightarrow E_{osc}\sqrt{l} = \text{cte} \tag{19.0.105}$$

Queda por comprobar que dicho invariante en función de la frecuencia de oscilación $\omega(t)$ se corresponde con la variable de acción. Encontramos esto directamente

$$E_{osc}\frac{\sqrt{g}}{\omega} = \text{cte} \rightarrow \frac{E_{osc}}{\omega} = I = \text{cte} \tag{19.0.106}$$

8.7.3 Partícula con variación lenta de masa

Una partícula de masa m realiza un movimiento vertical bajo el efecto de la gravedad, rebotando de forma elástica con el suelo horizontal fijo. Describa de forma cualitativa cómo se modifica su movimiento vertical, aplicando la aproximación adiabática, cuando la masa de la partícula varía de forma suficientemente lenta (por ejemplo por la adherencia o pérdida de material en cada colisión).

• En la aproximación adiabática se satisface la invariancia de la variable de acción, dada por

$$I = \oint p_z dz = 2\int_0^h \sqrt{2m}\sqrt{E - mgz}dz = \frac{4\sqrt{2m}}{3mg}E^{3/2} \tag{19.0.107}$$

siendo $E = mgh$ la energía de la partícula, en función de la altura máxima alcanzada h. Concluimos por tanto que

$$I \propto \frac{E^{3/2}}{m^{1/2}} = mh^{3/2} \tag{19.0.108}$$

Si como resultado de los procesos de colisión, u otros procesos, la masa varía con el tiempo de forma suficientemente lenta, aplicando la invariancia adiabática de I, obtenemos la variación relativa de la altura máxima alcanzada por la partícula en función de la variación relativa de la masa durante del movimiento:

$$mh^{3/2} \approx \text{cte} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\dot{h}}{h} = -\frac{2}{3}\frac{\dot{m}}{m} \quad , \quad \frac{\Delta h}{h} = -\frac{2}{3}\frac{\Delta m}{m} \tag{19.0.109}$$

En particular, si aumenta la masa en movimiento, disminuirá la altura máxima alcanzada, y si disminuye la masa, aumentará la altura máxima.

8.7.4 Partícula en campo magnético

• Sea una partícula libre que por acción de un campo magnético constante adquiere un movimiento circular con velocidad constante. Para este problema tenemos la conservación de la energía

$$H = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_0^2}{2m} \equiv E \tag{19.0.110}$$

y el radio de la órbita satisface

$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{p}{m\omega} \tag{19.0.111}$$

siendo ω la frecuencia ciclotrón

$$\omega_B = \frac{eB}{mc} \tag{19.0.112}$$

Analice la dinámica del sistema cuando el campo magnético varía en el tiempo de forma suficientemente lenta.

En este caso el campo no aparece en la definición del Hamiltoniano aunque sí influye de forma indirecta en la energía del sistema, como vemos a continuación. La aproximación adiabática consiste en asumir que la variación del campo será lo suficientemente lenta para que la trayectoria se mantenga aproximadamente circular, con un radio variable $R(t)$, que estará dado por la condición de equilibrio en la dirección radial. Dicha condición nos lleva a $R(t) = \frac{p}{m\omega(t)}$, siendo $\omega(t) = \frac{eB(t)}{mc}$. Aquí ya no podremos aplicar que el momento p sea constante, ya que la propia modificación de la trayectoria, aunque se mantenga circular exige que el momento haya cambiado. Aplicamos entonces la invariancia de la acción, definida en la forma

$$I = \oint p ds \tag{19.0.113}$$

siendo s la coordenada a lo largo de la circunferencia. Dado que $p = mv = mds/dt$ tenemos también

$$I = \oint p\frac{p}{m}dt = \oint \frac{p^2}{m}dt = 2E\oint dt = 2ET \tag{19.0.114}$$

siendo $T = 2\pi/\omega$ el periodo de rotación. Obtenemos por tanto el invariante adiabático

$$\frac{E(t)}{\omega(t)} \approx \text{cte} \tag{19.0.115}$$

Introduciendo el valor de la energía en función del momento, obtenemos la relación adiabática entre el radio de la órbita y el campo aplicado

$$R^2\omega \approx \text{cte} \tag{19.0.116}$$

relación que se corresponde también con el momento angular (aproximadamente constante) en la dirección del campo

$$L = mvR \approx \text{cte} \tag{19.0.117}$$

Capítulo 20

Medios continuos

9.5.1 Teorema de Noether

Para la densidad Lagrangiana para la cuerda con masa

$$\mathcal{L}\left(y_x, y_t, x, t\right) = \frac{1}{2}\rho y_t^2 - \frac{1}{2}T y_x^2 \tag{20.0.1}$$

aplicando el teorema de Noether, determine las leyes de conservación en función de su simetría frente a la traslación espacial y su simetría frente a la traslación temporal.

• Para deducir las leyes de conservación, aplicamos el teorema de Noether

$$\frac{d}{dt}\int\left(\mathcal{L}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\overline{\delta y}\right)dx + \left(\mathcal{L}\delta x + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\overline{\delta y}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{20.0.2}$$

siendo $\overline{\delta y} = \delta y - y_t\delta t - y_x\delta x$ la variación de la función y. En el caso de la invariancia frente a la traslación espacial, definida por

$$\delta y = 0, \delta t = 0, \delta x = a \rightarrow \overline{\delta y} = -a y_x \tag{20.0.3}$$

tenemos la ley de invariancia

$$\frac{d}{dt}\int\left(y_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_t}\right)dx = \left(\mathcal{L} - y_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_x}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{20.0.4}$$

que, para la densidad Lagrangiana dada, se reduce a

$$\frac{d}{dt}\int\rho y_t y_x dx = \frac{1}{2}\left(\rho y_t^2 + T y_x^2\right)\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{20.0.5}$$

ó, en función de la densidad Hamiltoniana,

$$\frac{d}{dt}\int\rho y_t y_x dx = \mathcal{H}\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{20.0.6}$$

La integral del lado izquierdo es el momento del sistema

$$P = \int\rho y_t y_x dx \tag{20.0.7}$$

por lo que la ley de invariancia frente a la traslación espacial se escribe

$$\frac{dP}{dt} = \mathcal{H}\left(x_2\right) - \mathcal{H}\left(x_1\right) \tag{20.0.8}$$

• Analizamos ahora la invariancia frente a la traslación temporal, definida por

$$\delta y = 0, \delta t = b, \delta x = 0 \rightarrow \overline{\delta y} = -by_t \tag{20.0.9}$$

que da lugar a la ley de invariancia

$$\frac{d}{dt}\int \left(\mathcal{L} - y_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t}\right) dx - \left(y_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{20.0.10}$$

ó, en función de la densidad Hamiltoniana,

$$\frac{d}{dt}\int \mathcal{H} dx = T\left(y_t y_x\right)\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{20.0.11}$$

La integral del lado izquierdo es la energía del sistema

$$E = \int \mathcal{H} dx \tag{20.0.12}$$

por lo que la ley de invariancia frente a la traslación temporal se escribe

$$\frac{dE}{dt} = T\left(y_t y_x\right)\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{20.0.13}$$

• Combinando ambas resultados, podemos concluir que cuando se establezca $\left(y_t y_x\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$, y $\mathcal{H}\left(x_2\right) = \mathcal{H}\left(x_1\right)$, por ejemplo en una cuerda con dos extremos fijos, $y\left(x_1, t\right) = y\left(x_2, t\right) = 0$, existen dos cantidades conservadas, la energía total E y el momento lineal $P \equiv \int \rho y_t y_x dx = \text{cte}$ en la dirección de propagación, que es la dirección x. Dado que la onda producida entre dos extremos fijos es estacionaria, el momento P resulta ser idénticamente nulo, como puede comprobarse con la integración directa a partir de $y\left(x, t\right) = A \operatorname{sen} kx \cos \omega t$.

9.5.2 Modelo elástico con términos adicionales

La densidad Lagrangiana para un medio continuo viene dada por

$$\mathcal{L}\left(y, y_t, y_x\right) = \frac{1}{2}\rho\left(y_t^2 - c_s^2 y_x^2 - \omega^2 y^2\right) \tag{20.0.14}$$

siendo ρ la densidad de masa, c_s una velocidad de onda, y ω la frecuencia.

(a) Determine cuál sería la versión discreta para el Lagrangiano L y la ecuación de movimiento para cada elemento discreto de masa del sistema.

(b) Determine la densidad Hamiltoniana y las leyes de conservación del sistema en función de la invariancia de $\mathcal{L}$ frente a la traslación espacial y temporal.

(a) Debemos aplicar la igualdad

$$L = \int \mathcal{L} dx \tag{20.0.15}$$

con la identificación

$$\rho dx = m \tag{20.0.16}$$

La coordenada x corresponde a la posición de la masa $n-$ ésima

$$x \rightarrow na \tag{20.0.17}$$

donde a es la separación espacial entre las masas en el eje x. La coordenada del movimiento a lo largo del medio continuo $y\left(x,t\right)$ debe definirse como la coordenada del movimiento en la dirección del eje y de la masa puntual localizada en x, esto es, la masa $n-$ ésima:

$$y\left(x,t\right)\rightarrow y_n(t) \tag{20.0.18}$$

• Tomando la derivada respecto al tiempo, tenemos la identificación

$$\frac{\partial y}{\partial t}\left(x,t\right)\rightarrow \frac{dy_n}{dt}(t) \tag{20.0.19}$$

Respecto a la derivada respecto a x, tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial x}\left(x,t\right)\rightarrow \frac{y_n(t)-y_{n-1}(t)}{a} \tag{20.0.20}$$

• El Lagrangiano de la colección de partículas puntuales estará definido por la versión discreta de

$$L=\sum_n \mathcal{L}dx=\sum_n \frac{1}{2}\left(\rho dx\right)\left(y_t^2-c_s^2y_x^2-\omega^2y^2\right) \tag{20.0.21}$$

Teniendo en cuenta estas identificaciones, obtenemos

$$L=\sum_n \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dy_n}{dt}\right)^2-c_s^2\left(\frac{y_n-y_{n-1}}{a}\right)^2-\omega^2y_n^2\right) \tag{20.0.22}$$

• La ecuación de movimiento para la partícula puntual de masa m localizada en la posición $x=na$, está dada por la ecuación de Euler−Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_n}\right)=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_n} \tag{20.0.23}$$

que se reduce a

$$\ddot{y}_n+\left(\omega^2+\frac{c_s^2}{a^2}\right)y_n=\frac{c_s^2}{a^2}y_{n-1} \tag{20.0.24}$$

(b) Dada la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$, determinamos la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}$ en la forma usual

$$\mathcal{H}\left(y,\Pi\right)\equiv \Pi y_t-\mathcal{L} \tag{20.0.25}$$

que nos permitirá obtener la energía del movimiento en la forma

$$E=\int \mathcal{H}dx \tag{20.0.26}$$

Por definición, el momento conjugado está dado por

$$\Pi=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t}=\rho y_t \tag{20.0.27}$$

y por tanto

$$\mathcal{H}\left(y,\Pi\right)\equiv \Pi\frac{\Pi}{\rho}-\frac{1}{2}\rho\left(\left(\frac{\Pi}{\rho}\right)^2-c_s^2y_x^2-\omega^2y^2\right)=\frac{\Pi^2}{2\rho}+\frac{1}{2}\rho c_s^2y_x^2+\frac{1}{2}\rho\omega^2y^2 \tag{20.0.28}$$

• Para deducir las leyes de conservación, aplicamos el teorema de Noether

$$\frac{d}{dt}\int\left(\mathcal{L}\delta t+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t}\overline{\delta y}\right)dx+\left(\mathcal{L}\delta x+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x}\overline{\delta y}\right)\Big|_{x_1}^{x_2}=0 \tag{20.0.29}$$

siendo $\overline{\delta y} = \delta y - y_t \delta t - y_x \delta x$ la variación de la función y.
En el caso de la invariancia frente a la traslación espacial, definida por

$$\delta y = 0, \delta t = 0, \delta x = a \rightarrow \overline{\delta y} = -a y_x \tag{20.0.30}$$

tenemos la ley de invariancia

$$\frac{d}{dt} \int \left(y_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \right) dx = \left(\mathcal{L} - y_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \tag{20.0.31}$$

que, para la densidad Lagrangiana dada, se reduce a

$$\frac{d}{dt} \int \rho y_t y_x dx = \frac{1}{2} \rho \left(y_t^2 + c_s^2 y_x^2 - \omega^2 y^2 \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \tag{20.0.32}$$

ó, en función de la densidad Hamiltoniana,

$$\frac{d}{dt} \int \rho y_t y_x dx = \left(\mathcal{H} - \rho \omega^2 y^2 \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \tag{20.0.33}$$

Dado que la integral del lado izquierdo es el momento del sistema

$$P = \int \rho y_t y_x dx \tag{20.0.34}$$

la ley de invariancia frente a la traslación espacial se escribe

$$\frac{dP}{dt} + \rho \omega^2 \left(y\left(x_2\right)^2 - y\left(x_1\right)^2 \right) = \mathcal{H}\left(x_2\right) - \mathcal{H}\left(x_1\right) \tag{20.0.35}$$

que en el caso de extremos fijos, $y\left(x_2\right) = y\left(x_1\right)$, se reduce a la ley de conservación ya conocida

$$\frac{dP}{dt} = \mathcal{H}\left(x_2\right) - \mathcal{H}\left(x_1\right) \tag{20.0.36}$$

• Analizamos ahora la invariancia frente a la traslación temporal, definida por

$$\delta y = 0, \delta t = b, \delta x = 0 \rightarrow \overline{\delta y} = -b y_t \tag{20.0.37}$$

que da lugar a la ley de invariancia

$$\frac{d}{dt} \int \left(\mathcal{L} - y_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} \right) dx - \left(y_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{20.0.38}$$

ó, en función de la densidad Hamiltoniana,

$$\frac{d}{dt} \int \mathcal{H} dx = \rho c_s^2 \left(y_t y_x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \tag{20.0.39}$$

Dado que la integral del lado izquierdo es la energía del sistema

$$E = \int \mathcal{H} dx \tag{20.0.40}$$

la ley de invariancia frente a la traslación temporal se escribe

$$\frac{dE}{dt} = \rho c_s^2 \left(y_t y_x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \tag{20.0.41}$$

• Combinando ambas resultados, podemos concluir que cuando se establezca $\left(y_t y_x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$, y

$\mathcal{H}(x_2) = \mathcal{H}(x_1)$, por ejemplo en una cuerda con dos extremos fijos, $y(x_1,t) = y(x_2,t) = 0$, existen dos cantidades conservadas, la energía total E y el momento lineal $P \equiv \int \rho y_t y_x dx = \text{cte}$ en la dirección de propagación, que es la dirección x. Dado que la onda producida entre dos extremos fijos es estacionaria, el momento P resulta ser idénticamente nulo, como puede comprobarse con la integración directa a partir de $y(x,t) = A \operatorname{sen} kx \cos \omega t$.

9.5.3 Coordenada cíclica para perturbación en cuerda uniforme

Analizando la densidad Lagrangiana de una cuerda uniforme con densidad de masa ρ y tensión T,

$$\mathcal{L}(y_x, y_t) = \frac{1}{2}\rho y_t^2 - \frac{1}{2} T y_x^2 \tag{20.0.42}$$

se observa que la coordenada y es una coordenada cíclica, y esto implica la existencia de una ley de conservación.

(a) Utilizando el teorema de Noether determine la ley de conservación asociada a esta coordenada cíclica, e interprete físicamente.

(b) ¿Bajo qué condición se deduce que existe una cantidad conservada?

(a) Para deducir la ley de conservación, aplicamos el teorema de Noether

$$\frac{d}{dt}\int \left(\mathcal{L}\delta t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t}\overline{\delta y}\right) dx + \left(\mathcal{L}\delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x}\overline{\delta y}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{20.0.43}$$

siendo $\overline{\delta y} = \delta y - y_t \delta t - y_x \delta x$ la variación de la función y. En el caso de la invariancia frente a la traslación en la dirección del eje y, definida por

$$\delta y = a, \delta t = 0, \delta x = 0 \rightarrow \overline{\delta y} = a \tag{20.0.44}$$

obtenemos la ley de invariancia

$$\frac{d}{dt}\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} dx + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_x}\Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{20.0.45}$$

que para la densidad Lagrangiana dada se reduce a

$$\frac{d}{dt}\int \rho y_t dx = T y_x\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{20.0.46}$$

• La integral del lado izquierdo es el momento microscópico P_y del sistema (momento debido a la oscilación vertical de la cuerda) dirigido según el eje y:

$$P_y = \int \rho y_t dx \tag{20.0.47}$$

que tendría una versión discreta de la forma usual

$$P_y = \sum_n m \dot{y}_n \tag{20.0.48}$$

Con esto, la ley de invariancia frente a la traslación según y se escribe

$$\frac{dP_y}{dt} = T y_x\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{20.0.49}$$

El lado derecho es la fuerza neta según el eje y que sufre el elemento de masa entre los puntos extremos x_1, x_2 del medio continuo (la cuerda en este caso). Basta recordar que para un medio discreto en presencia de una tensión, la ecuación de movimiento se escribe

$$m\frac{d^2y_n}{dt^2} = -T\left(\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2\right) = -T\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{a} + \frac{y_n - y_{n+1}}{a}\right) \tag{20.0.50}$$

En el término de la derecha figura la fuerza neta en la dirección y. En el límite continuo, dicha expresión se transforma en

$$-T\left(\frac{y(x,t) - y(x-dx,t)}{dx} + \frac{y(x,t) - y(x+dx,t)}{dx}\right) \tag{20.0.51}$$

que se aproxima por

$$-T\left(y_x\left(x,t\right) - y_x(x+dx,t)\right) \tag{20.0.52}$$

y que resulta equivalente al resultado anterior

$$-T\left(y_x\left(x_1,t\right) - y_x\left(x_2,t\right)\right) = Ty_x\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{20.0.53}$$

definiendo $x_1 = x$ y $x_2 = x + dx$.

(b) Como conclusión, respondiendo al segundo apartado, cuando no exista fuerza neta en la dirección del eje y, se conservará el momento de oscilación vertical de la cuerda:

$$\frac{dP_y}{dt} = 0 \to P_y = \text{cte} \tag{20.0.54}$$

9.5.4 Medios lineales con disipación

Discuta para qué valores de n la ecuación

$$u_t + u_x + u_{xxx} + \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = 0 \tag{20.0.55}$$

representa una *disipación* física, esto es, la amplitud de las ondas planas decrece en el tiempo.

Introducción Partiendo del análisis realizado en el ejercicio 9.4.12, en el caso de que la frecuencia $\omega(k)$ de la onda tuviera una parte imaginaria, esto es, en la forma

$$\omega(k) = \Omega(k) + i\Gamma(k) \tag{20.0.56}$$

la solución tendría el comportamiento

$$u(x,t) = e^{i(\omega(k)t - kx)} = e^{i(\Omega(k)t - kx)}e^{-\Gamma(k)t} \tag{20.0.57}$$

El primer factor describe la propagación física de la onda, mientras que el segundo es una medida de la amplitud de onda en el tiempo. Para $\Gamma(k) > 0$ la amplitud decrece en el tiempo, y se producirá una *disipación* de la energía de la onda en su propagación, con el ejemplo típico de la propagación de una onda electromagnética en un metal. Parte de su energía se transfiere al metal por conductividad, generándose calor por efecto Joule. También es posible el caso contrario, con $\Gamma(k) < 0$, y una amplificación en el tiempo de la amplitud de la onda. En este caso el medio aporta energía a la onda en su propagación. Del mismo modo, podemos definir el vector de onda como función de una frecuencia estrictamente real y considerar que es el vector de onda el que tiene una parte imaginaria, en la forma

$$k(\omega) = K(\omega) + i\Delta(\omega) \tag{20.0.58}$$

en cuyo caso la solución tendría el comportamiento

$$u(x,t) = e^{i(\omega t - k(\omega)x)} = e^{i(\omega t - K(\omega)x)} e^{\Delta(\omega)x} \tag{20.0.59}$$

El primer factor describe la propagación física de la onda, mientras que el segundo es una medida de la amplitud de onda en el espacio. Para $\Delta(\omega) < 0$ la amplitud decrece en el espacio, y se producirá una *disipación* de la energía de la onda, con el ejemplo típico de nuevo de la propagación de una onda electromagnética en el interior de un metal. Parte de su energía se transfiere al metal por absorción de calor, y cuanto mayor sea esa absorción (mayor valor absoluto de $\Delta(\omega)$), la onda penetrará menor distancia en el metal.

Resolución Estudiamos por tanto las soluciones de onda viajera de las ecuaciones del movimiento, representadas por la función

$$u(x,t) = e^{i(\omega t - kx)} \tag{20.0.60}$$

siendo k el vector de onda, ω la frecuencia de la onda, y obtenemos

$$u_t + u_x + u_{xxx} + \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad i\omega - ik + (-ik)^3 + (-ik)^n = 0 \tag{20.0.61}$$

que podemos escribir en la forma

$$\omega = k - k^3 + (-i)^{n-1} k^n \tag{20.0.62}$$

Para que la onda mantenga su forma en el tiempo la frecuencia debe ser real (parte imaginaria igual a 0) para todo valor del vector de onda. Esto será así si el entero n cumple la condición

$$i^{n-1} \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad n = 2j+1 \quad , \quad j = 0, 1, 2, .. \tag{20.0.63}$$

esto es, n debe ser un número impar.

• Cuando n sea un número par, la frecuencia tendrá la componente imaginaria

$$\mathrm{Im}\,(\omega) \equiv \Gamma(k) = (-i)^n k^n = (-1)^{n/2}\, k^n \tag{20.0.64}$$

Para $\Gamma(k) > 0$ la amplitud decrece en el tiempo, con el factor exponencial

$$e^{-\Gamma(k)t} \tag{20.0.65}$$

y se producirá una *disipación* de la energía de la onda en su propagación. Concluimos por tanto que el entero n que da lugar a la disipación de la energía está dado por los valores

$$\Gamma(k) > 0 \quad \rightarrow \quad (-1)^{n/2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad n = 4k \quad , \quad k = 1, 2, .. \tag{20.0.66}$$

Capítulo 21

Teoría clásica de campos

10.7.1 Dinámica relativista de la partícula libre

Obtenga la ecuación de Hamilton−Jacobi para la dinámica relativista de una partícula libre.

Nota: A partir de la función S, podemos también construir una formulación Hamiltoniana de la dinámica relativista, de forma análoga a la formulación Hamiltoniana no relativista. Para ello, el vector momento en la forma contravariante debe definirse en la forma

$$p^{\mu} \equiv -\frac{\partial S}{\partial x_{\mu}} \tag{21.0.1}$$

• A partir de la función principal de Hamilton S, podemos también construir una formulación Hamiltoniana de la dinámica relativista, de forma análoga a la formulación Hamiltoniana no relativista. Para ello, es necesario expresar en función de las coordenadas la función S, o mejor su diferencial, como hemos visto anteriormente,

$$dS\left(x\right) = -mcds = -mc\sqrt{\eta^{\mu\nu}dx_{\mu}dx_{\nu}} \tag{21.0.2}$$

De aquí que, al tomar su derivada respecto a x_{μ}, podamos definir el vector momento en la forma contravariante

$$p^{\mu} \equiv -\frac{\partial S}{\partial x_{\mu}} \tag{21.0.3}$$

con el valor para la partícula libre

$$p^{\mu} = -\frac{\partial S}{\partial x_{\mu}} = mc\eta^{\mu\nu}\frac{dx_{\nu}}{dS} = mc\eta^{\mu\nu}u_{\nu} = mcu^{\mu} = \frac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}}\left(c, v\right) \tag{21.0.4}$$

• Definiendo la masa relativista, dependiente de la velocidad de la partícula, en la forma habitual

$$M\left(v\right) = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{21.0.5}$$

donde m es la masa en reposo, $m = M\left(0\right)$, el vector momento así definido tiene las componentes $p^{\mu} = \left(mc, Mv\right) \equiv \left(\frac{E}{c}, p\right)$, siendo $E = Mc^2$ la energía de la partícula. La versión covariante del momento está dada por

$$p_{\mu} = mcu_{\mu} = \frac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}}\left(c, -v\right) \tag{21.0.6}$$

y tenemos el invariante $p^2 = p_{\mu}p^{\mu} = m^2c^2$.

• Este invariante es que el que debe sustituir a la energía en la versión no relativista. Escribiendo este invariante en función de la acción, tenemos

$$p_\mu p^\mu = m^2c^2 \rightarrow \frac{\partial S}{\partial x_\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = m^2c^2 \tag{21.0.7}$$

y dado que las derivadas de S están dadas por

$$\frac{\partial S}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}, \nabla S\right); \frac{\partial S}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}, -\nabla S\right) \tag{21.0.8}$$

llegamos a la ecuación relativista de Hamilton−Jacobi, en la forma

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - (\nabla S)^2 = m^2c^2 \tag{21.0.9}$$

10.7.2 Partícula relativista en presencia de campo electromagnético

Obtenga la expresión de la integral de acción y del Hamiltoniano para una partícula relativista en presencia de un campo electromagnético.

Nota: Para ello, haga uso de la expresión contravariante $A^\mu = \left(\frac{1}{c}\varphi, \boldsymbol{A}\right)$ para el vector potencial del campo electromagnético, y para la integral de acción tome la expresión relativista

$$S = -mc\int dS - e\int A^\mu dx_\mu \tag{21.0.10}$$

• El campo electromagnético satisface todos los postulados de la Relatividad especial, y de por sí es un campo relativista. Junto con la descripción clásica basada en los potenciales escalar eléctrico φ y vectorial magnético $\boldsymbol{A}$, de los que se deducen los campos eléctrico $\boldsymbol{E}$ y magnético $\boldsymbol{B}$ aplicando las ecuaciones de Maxwell, podemos construir una descripción relativista utilizando el vector potencial en cuatro dimensiones

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c}\varphi, \boldsymbol{A}\right) \tag{21.0.11}$$

siendo su componente temporal el potencial escalar, y su componente espacial sea el potencial vectorial.

• Dicho esto, definimos la integral de acción. Como hemos dicho anteriormente, por el principio de covariancia la acción debe ser un escalar, por un lado tenemos el escalar dS, y a partir de la cantidad externa al espacio-tiempo A^μ, podemos construir el escalar diferencial $A^\mu dx_\mu$ que además es lineal en el potencial electromagnético. El parámetro que mide esta interacción de la partícula con el campo electromagnético recibe el nombre de *carga eléctrica*, denotada aquí por e. Con esto, la integral de acción se escribe

$$S = -mc\int dS - e\int A^\mu dx_\mu = -\int\left(mc + eA^\mu\frac{dx_\mu}{dS}\right)dS \tag{21.0.12}$$

y de nuevo en función del tiempo, al ser $S = \int Ldt$, el Lagrangiano L relativista está dado por

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} - e\left(\frac{1}{c}\varphi, \boldsymbol{A}\right)\cdot(c, -\boldsymbol{v}) = -mc^2\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} - e\varphi + e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} \tag{21.0.13}$$

• Para obtener ahora el Hamiltoniano a partir de este Lagrangiano, definimos primero el momento canónico de la partícula en la forma vectorial

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = M\boldsymbol{v} + e\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A} \tag{21.0.14}$$

que queda expresado en función de su momento lineal $\boldsymbol{p}$. Con esto, se obtiene también su Hamiltoniano, a partir de su definición, en la forma

$$H \equiv \boldsymbol{v}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} - L = Mc^2 + e\varphi \tag{21.0.15}$$

Dado que $p^\mu = (mc, M\boldsymbol{v})$, se satisface

$$m^2c^2 = p_\mu p^\mu \equiv (mc)^2 - \boldsymbol{p}^2 \rightarrow Mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + c^2\boldsymbol{p}^2} \tag{21.0.16}$$

con lo cual el Hamiltoniano relativista admite la expresión

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\boldsymbol{p}^2} + e\varphi \tag{21.0.17}$$

y finalmente, en función del momento canónico, se obtiene

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A}\right)^2} + e\varphi \tag{21.0.18}$$

cuyo límite no relativista estaría dado por

$$H = mc^2 + \frac{\left(\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A}\right)^2}{2m} + e\varphi \tag{21.0.19}$$

Debe recordarse que $\boldsymbol{P}$ es el momento canónico en presencia del campo externo, no $\boldsymbol{p}$, que es el momento lineal.

10.7.3 Tensor de energía-tensiones para el campo de Klein-Gordon

Para la densidad Lagrangiana de Klein-Gordon (véase la sección 10.3)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{21.0.20}$$

(a) Determine la expresión para el tensor de energía-tensiones $T^{\mu\nu}$, la densidad de energía $\varepsilon = T^{00}$ y la presión $P \equiv \frac{1}{3}T^{ii}$, con suma en $i = 1, 2, 3$.

(b) Con esta definición de ε y P, determine cuál es la relación entre ellos, es decir cuál es la ecuación de estado del sistema, 1) para un campo φ estático y uniforme, 2) para un campo φ formado por ondas cuya energía sea mucho mayor que la energía en reposo mc^2 de la partícula.

(a) Para la densidad Lagrangiana del campo escalar,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{21.0.21}$$

que da lugar a la ecuación de Klein-Gordon, el tensor de energía-momento está dado por

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{L}\eta^{\mu\nu} - \partial^\nu\varphi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)} \tag{21.0.22}$$

Para la evaluación del término de la derecha, debemos notar previamente que $\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$, y en función del tensor delta δ^μ_ν, con las propiedades $\delta^\mu_\nu = 0$ si $\mu \neq \nu$, y $\delta^\mu_\nu = 1$ si $\mu = \nu$,

$$\frac{\partial\left(\partial_\nu\varphi\right)}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)} = \delta^\mu_\nu \tag{21.0.23}$$

y por tanto,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi = -\partial^\mu\varphi \tag{21.0.24}$$

• Con esto, el tensor de energía-momento del campo escalar está dado por

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{L}\eta^{\mu\nu} + \partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi \tag{21.0.25}$$

Aquí, teniendo en cuenta la expresión del gradiente,

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right) \quad , \quad \partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right) \tag{21.0.26}$$

la densidad Lagrangiana admite la expresión desarrollada

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{21.0.27}$$

• Como indica el enunciado, nos interesa la densidad de energía y la presión del campo. Tomando $\mu\nu = (00)$, al ser $\eta^{00} = -1$, tenemos

$$\varepsilon = T^{00} = -\mathcal{L} + \partial^0\varphi\partial^0\varphi = -\mathcal{L} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{21.0.28}$$

De forma análoga, tomando $\mu\nu = (ii)$ para $i = 1, 2, 3$, al ser $\eta^{ii} = 1$, tenemos directamente, con suma en $i = 1, 2, 3$,

$$P \equiv \frac{1}{3}T^{ii} = \frac{1}{3}\partial^i\varphi\partial^i\varphi + \frac{1}{3}\mathcal{L}\eta^{ii} = \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi\right)^2 + \mathcal{L} \tag{21.0.29}$$

y llegamos a

$$P = \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{21.0.30}$$

(b) Para un campo estático y uniforme tenemos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{\nabla}\varphi = 0 \tag{21.0.31}$$

con la densidad de energía y presión

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \quad , \quad P = -\frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{21.0.32}$$

que da lugar a la ecuación de estado

$$P = -\varepsilon \tag{21.0.33}$$

En el segundo caso, la energía del campo es mucho mayor que la energía de la partícula, y por tanto, puede despreciarse el término de masa, tanto en la densidad Lagrangiana

$$L \simeq \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi\right)^2 \tag{21.0.34}$$

como en la ecuación de movimiento (ecuación de Klein-Gordon)

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi \simeq 0 \to \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = \left(\boldsymbol{\nabla}\varphi\right)^2 \tag{21.0.35}$$

en la densidad de energía

$$\varepsilon \simeq \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi\right)^2 \tag{21.0.36}$$

ó la presión

$$P = \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi\right)^2 \tag{21.0.37}$$

• Como indica el enunciado, estas expresiones deben evaluarse para un campo generado por ondas, esto es, de la forma

$$\varphi = A \cdot e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{21.0.38}$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación de movimiento obtenemos la relación de dispersión conocida entre la frecuencia y el vector de onda

$$\omega = |k|c = kc \tag{21.0.39}$$

para la propagación de ondas a la velocidad c. Utilizando esta relación, obtenemos la densidad de energía del campo en la forma

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\left(-i\omega\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}\left(ik\varphi\right)^2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\omega^2\varphi^2 - \frac{1}{2}k^2\varphi^2 = -k^2\varphi^2 \tag{21.0.40}$$

y la presión en la forma

$$P = \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\left(-i\omega\varphi\right)^2 - \frac{1}{6}\left(ik\varphi\right)^2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\omega^2\varphi^2 + \frac{1}{6}k^2\varphi^2 = -\frac{1}{3}k^2\varphi^2 \tag{21.0.41}$$

Deducimos entonces que en el caso el campo tiene una ecuación de estado

$$P = \frac{1}{3}\varepsilon \tag{21.0.42}$$

Programas de Maxima

Capítulo 22

Formulación Lagrangiana

Ejercicio 14.11.1

```
(%i1) kill( all) ;
```

done

```
(%i2) declare([ a, g, m1, L1, m2, L2, D, M], constant) $ ;
      asume( a> 0, g> 0, m1> 0, L1> 0, m2> 0, L2> 0, D> 0, M> 0) $ ;
(%i3) depends( %theta, t) ;
```

$$[\theta(t)]$$

```
--> /· 1A ) Determinar el lagrangiano del sistema . Realizar la aproximación de
    ángulos de giro pequeños . ; ; ; ;
(%i6) T1 : m1· L1 ^ 2· diff( %theta, t, 1) ^ 2 / 2 $ ; T2 : m2· L2 ^ 2· diff( %theta, t, 1) ^ 2 / 2 $ ;
      T : factor( T1 + T2) ;
```

$$\frac{\left(\mathrm{L2}^2\,\mathrm{m2}+\mathrm{L1}^2\,\mathrm{m1}\right)\left(\frac{d}{dt}\,\theta\right)^2}{2}$$

```
(%i9) depends([ xb, yb], %theta) ;
      xb : a· sin( %theta) + D / 2 $ ; yb : − a· cos( %theta) $ ;
```

$$[\mathrm{xb}\,(\,\theta\,),\mathrm{yb}\,(\,\theta\,)]$$

```
(%i12) Tb : M·( diff( xb, t, 1) ^ 2 + diff( yb, t, 1) ^ 2) / 2 $ ; Tb : trigsimp( Tb) $ ;
       T : factor( T1 + T2 + Tb) ;
```

$$\frac{\left(\mathrm{L2}^2\,\mathrm{m2}+\mathrm{L1}^2\,\mathrm{m1}+Ma^2\right)\left(\frac{d}{dt}\,\theta\right)^2}{2}$$

```
(%i14) V : − m1· g· L1· cos( %theta) − m2· g· L2· cos( %theta) + M· g· yb $ ; V : factor( V) ;
```

$$-g(\mathrm{L2}\,\mathrm{m2}+\mathrm{L1}\,\mathrm{m1}+Ma)\cos\,(\,\theta\,)$$

```
(%i15) L : T − V ;
```

$$\frac{\left(\mathrm{L2}^2\,\mathrm{m2}+\mathrm{L1}^2\,\mathrm{m1}+Ma^2\right)\left(\frac{d}{dt}\,\theta\right)^2}{2}+g(\mathrm{L2}\,\mathrm{m2}+\mathrm{L1}\,\mathrm{m1}+Ma)\cos\,(\,\theta\,)$$

```
--> /· 1B ) Hallar la ecuación de movimiento del sistema , y a partir de ésta
    evaluar cuál sería la longitud del péndulo simple equivalente ; ; ; ;
(%i18) momento : diff( L, diff( %theta, t, 1)) $ ;
       eulerLagrange : diff( momento, t, 1) − diff( L, %theta, 1) $ ;
       ec_mov : eulerLagrange = 0 ;
```

$$\left(\mathrm{L2}^2\,\mathrm{m2}+\mathrm{L1}^2\,\mathrm{m1}+Ma^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta\right)+g(\mathrm{L2}\,\mathrm{m2}+\mathrm{L1}\,\mathrm{m1}+Ma)\sin\,(\,\theta\,)=0$$

```
(%i20) ec_mov : taylor( ec_mov, %theta, 0, 1) $ ; ec_mov : taytorat( ratsimp( ec_mov)) ;
```

$$\left(\mathrm{L2}^2\,\mathrm{m2}+\mathrm{L1}^2\,\mathrm{m1}+Ma^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta\right)+(\mathrm{L2}\,g\,\mathrm{m2}+\mathrm{L1}\,g\,\mathrm{m1}+Mag)\,\theta=0$$

```
(%i23) ec : − solve([ ec_mov], diff( %theta, t, 2)) / %theta $ ;
       omega2 : rhs( ec[ 1]) $ ;
       %omega : sqrt( omega2) ;
```

$$\sqrt{\frac{\mathrm{L2}\,g\,\mathrm{m2}+\mathrm{L1}\,g\,\mathrm{m1}+Mag}{\mathrm{L2}^2\,\mathrm{m2}+\mathrm{L1}^2\,\mathrm{m1}+Ma^2}}$$

```
(%i24) leq : ratsimp( g / %omega ^ 2) ;
```

$$\frac{\mathrm{L2}^2\,\mathrm{m2}+\mathrm{L1}^2\,\mathrm{m1}+Ma^2}{\mathrm{L2}\,\mathrm{m2}+\mathrm{L1}\,\mathrm{m1}+Ma}$$

```
--> /· Fin del problema ; ; ;
```

Created with wxMaxima.

Ejercicio 14.11.2

(%i1) kill(all) ;

done

(%i2) declare([g, m, M, R], constant) $; asume(g> 0, m> 0, M> 0, R> 0) $;

--> /· 2A) Analizar el movimiento por el método lagrangiano . Realizar la aproximación de ángulos de giro pequeños . ; ; ; ; ;

(%i3) depends([x, %theta], t) ;

$$[x(t), \theta(t)]$$

(%i4) T1 : m· diff(x, t, 1) ^ 2 / 2 ;

$$\frac{m\left(\frac{d}{dt}\,x\right)^2}{2}$$

(%i7) depends([xM, yM],[%theta, t]) ; xM : x + R· sin(%theta) ; yM : − R· cos(%theta) ;

$$[\mathrm{xM}(\theta, t), \mathrm{yM}(\theta, t)]$$

$$x + R\sin(\theta)$$

$$-R\cos(\theta)$$

(%i10) TM : expand(M·(diff(xM, t, 1) ^ 2 + diff(yM, t, 1) ^ 2) / 2) $; TM : trigsimp(TM) $; T : ratsimp(T1 + TM) ;

$$\frac{(m+M)\left(\frac{d}{dt}\,x\right)^2+2MR\cos(\theta)\left(\frac{d}{dt}\,\theta\right)\left(\frac{d}{dt}\,x\right)+MR^2\left(\frac{d}{dt}\,\theta\right)^2}{2}$$

(%i11) V : M· g· yM ;

$$-MRg\cos(\theta)$$

(%i12) L : T − V ;

$$\frac{(m+M)\left(\frac{d}{dt}\,x\right)^2+2MR\cos(\theta)\left(\frac{d}{dt}\,\theta\right)\left(\frac{d}{dt}\,x\right)+MR^2\left(\frac{d}{dt}\,\theta\right)^2}{2}+MRg\cos(\theta)$$

(%i15) momentoX : diff(L, diff(x, t, 1)) $;
eulerLagrangeX : diff(momentoX, t, 1) − diff(L, x, 1) $;
ec_movX : ratsimp(expand(eulerLagrangeX = 0)) ;

$$(m+M)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,x\right)+MR\cos(\theta)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta\right)-MR\sin(\theta)\left(\frac{d}{dt}\,\theta\right)^2=0$$

(%i18) momentoT : diff(L, diff(%theta, t, 1)) $;
eulerLagrangeT : diff(momentoT, t, 1) − diff(L, %theta, 1) $;
ec_movT : ratsimp(expand(eulerLagrangeT = 0)) ;

$$MR\cos(\theta)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,x\right)+MR^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta\right)+MRg\sin(\theta)=0$$

(%i22) /· aproximación de ángulos pequeños ·/
ec0_movX : taylor(ec_movX, %theta, 0, 0) $; ec0_movT : taylor(ec_movT, %theta, 0, 1) $;
ec0_movX : ratsimp(taytorat(ec0_movX)) ; ec0_movT : ratsimp(taytorat(ec0_movT)) ;

$$(m+M)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,x\right)+MR\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta\right)=0$$

$$MR\left(\frac{d^2}{dt^2}\,x\right)+MR^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta\right)+MRg\,\theta=0$$

```
(%i24) /· Ecuación de movimiento del péndulo ·/
       a1 : solve( ec0_movX, diff( x, t, 2))[ 1] ; a2 : solve( ec0_movT, diff( x, t, 2))[ 1] ;
```

$$\frac{d^2}{dt^2}\,x=-\frac{MR\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta\right)}{m+M}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\,x=-R\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta\right)-g\,\theta$$

```
(%i25) ec_movP : factor( expand( rhs( a1) − rhs( a2) = 0)) ;
```

$$\frac{Rm\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta\right)+gm\,\theta+Mg\,\theta}{m+M}=0$$

```
(%i26) a3 : solve( ec_movP, diff( %theta, t, 2))[ 1] ;
```

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\theta=-\frac{(gm+Mg)\,\theta}{Rm}$$

```
(%i27) %omega : sqrt( ratsimp( − rhs( a3) / %theta)) ;
```

$$\sqrt{\frac{gm+Mg}{Rm}}$$

```
(%i29) kill( m) $ ;
       %omega_s : limit( %omega, m, inf) ;
```

$$\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{R}}$$

```
--> /· 2C ) Estudiar la existencia de cantidades conservadas , y su interpretación física . Recordar que
    en el método Lagrangiano la existencia de cantidades conservadas se puede deducir a partir las
    propias ecuaciones de Euler −
    Lagrange . ·/ ;

(%i33) /· Conservacion del momento ·/
       momentoX ;
       dpX_dt : ratsimp( expand( diff( momentoX, t))) ;
       ratsimp( dpX_dt − lhs( ec_movX)) $ ;
       dpX_dt : rhs( ec_movX) ;
```

$$\frac{2(m+M)\left(\frac{d}{dt}\,x\right)+2MR\cos(\theta)\left(\frac{d}{dt}\,\theta\right)}{2}$$

$$(m+M)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,x\right)+MR\cos(\theta)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\theta\right)-MR\sin(\theta)\left(\frac{d}{dt}\,\theta\right)^2$$

$$0$$

```
(%i39) /· Conservacion de la energía ·/
       E : T + V ;
       dE_dt : diff( E, t) $ ;
       e1 : expand( diff( x, t)· ec_movX) $ ; e2 : expand( diff( %theta, t)· ec_movT) $ ;
       ratsimp( dE_dt − lhs( e1 + e2)) $ ;
       dE_dt : ratsimp( rhs( e1 + e2)) ;
```

$$\frac{(m+M)\left(\frac{d}{dt}\,x\right)^2+2MR\cos(\theta)\left(\frac{d}{dt}\,\theta\right)\left(\frac{d}{dt}\,x\right)+MR^2\left(\frac{d}{dt}\,\theta\right)^2}{2}-MRg\cos(\theta)$$

$$0$$

```
--> /· 2D ) Deducir de forma matemática la conservación del hamiltoniano , definido en el método
    Lagrangiano por h = x ∂ L / ∂ x + θ ∂ L / ∂ θ − L . Calcular su valor para el sistema dado ,
    estudiando su relación con la energía . ; ; ; ; ;

(%i42) /· se deduce para una dimension ·/
       kill( L, h, x, v) $ ;
       depends([ x, v], t) $ ;
       depends([ L, h],[ t, x, v]) ;
```

$$[L(t,x,v),h(t,x,v)]$$

```
(%i43) h : v· diff( L, v) − L ;
```

$$\left(\frac{d}{dv}\,L\right)v-L$$

(%i44) dh_dt : expand(diff(h, t)) ;

$$\left(\frac{d^2}{dvdx}L\right)v\left(\frac{d}{dt}x\right)-\left(\frac{d}{dx}L\right)\left(\frac{d}{dt}x\right)+\left(\frac{d^2}{dv^2}L\right)v\left(\frac{d}{dt}v\right)+\left(\frac{d^2}{dtdv}L\right)v-\frac{d}{dt}L$$

(%i45) ec_mov : diff(diff(L, v), t) = diff(L, x) ;

$$\left(\frac{d^2}{dvdx}L\right)\left(\frac{d}{dt}x\right)+\left(\frac{d^2}{dv^2}L\right)\left(\frac{d}{dt}v\right)+\frac{d^2}{dtdv}L=\frac{d}{dx}L$$

(%i46) dh_dt : expand(dh_dt − lhs(ec_mov)· v + rhs(ec_mov)· diff(x, t)) ;

$$-\frac{d}{dt}L$$

(%i48) /· para el problema dado ·/
L : T − V $;
h : ratsimp(expand(diff(x, t, 1)· momentoX + diff(%theta, t, 1)· momentoT − L)) ;

$$\frac{(m+M)\left(\frac{d}{dt}x\right)^2+2MR\cos(\theta)\left(\frac{d}{dt}\theta\right)\left(\frac{d}{dt}x\right)+MR^2\left(\frac{d}{dt}\theta\right)^2-2MRg\cos(\theta)}{2}$$

(%i49) expand(h − E) ;

$$0$$

--> /· Fin del problema ·/ ;

Created with wxMaxima.

Ejercicio 2.6.2

(%i1) kill(all) ;

done

--> /· 3A) Determinar las coordenadas generalizadas y las ligaduras del sistema . ·/ ;

(%i4) depends([%Theta, %Phi], t) $; %Phi : %omega· t ;
declare([%omega, m, g, R], constant) $; asume(%omega> 0, g> 0, R> 0, m> 0) ;

$$\omega\, t$$

$$\text{asume}\left(\omega > 0, g > 0, R > 0, m > 0\right)$$

--> /· 3B) Obtener el lagrangiano del sistema y sus ecuaciones del movimiento . ·/ ;

(%i7) depends(y, %Theta) ; y : − R· cos(%Theta) ;
V : 2· m· g· y + 2· m· g· 2· y ;

$$[y(\Theta)]$$

$$-R\cos\left(\Theta\right)$$

$$-6Rgm\cos\left(\Theta\right)$$

(%i8) T1 : 2· m· R ^ 2·(diff(%Theta, t, 1) ^ 2 + sin(%Theta) ^ 2· diff(%Phi, t, 1) ^ 2) / 2 ;

$$R^2m\left(\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\right)^2+\ \omega^2\sin\left(\Theta\right)^2\right)$$

(%i9) T2 : 2· m· diff(2· y, t, 1) ^ 2 / 2 ;

$$4R^2m\sin\left(\Theta\right)^2\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\right)^2$$

(%i11) T : T1 + T2 ; L : ratsimp(T − V) ;

$$R^2m\left(\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\right)^2+\ \omega^2\sin\left(\Theta\right)^2\right)+4R^2m\sin\left(\Theta\right)^2\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\right)^2$$

$$\left(4R^2m\sin\left(\Theta\right)^2+R^2m\right)\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\right)^2+\ \omega^2\ R^2m\sin\left(\Theta\right)^2+6Rgm\cos\left(\Theta\right)$$

(%i15) /· ecuación del movimiento ·/
momentoT : diff(L, diff(%Theta, t, 1), 1) ;
eulerLagrangeT : diff(momentoT, t, 1) − diff(L, %Theta, 1) $
ec_mov : eulerLagrangeT = 0 $;
ec_mov : expand(ratsimp(ec_mov /(2· m· R ^ 2))) ;

$$2\left(4R^2m\sin\left(\Theta\right)^2+R^2m\right)\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\right)$$

$$4\sin\left(\Theta\right)^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\Theta\right)+\frac{d^2}{dt^2}\,\Theta\ +4\cos\left(\Theta\right)\sin\left(\Theta\right)\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\right)^2-\omega^2\cos\left(\Theta\right)\sin\left(\Theta\right)+\frac{3g\sin\left(\Theta\right)}{R}=0$$

--> /· 3C) Utilizando la relación entre la propiedad de simetría de un sistema y la existencia de una cantidad conservada , interpretar físicamente cada una de las ecuaciones de conservación . ·/ ;

(%i17) kill(L, %Phi) ;
depends(%Phi, t) ;

done

$$[\Phi(t)]$$

(%i20) T1 : 2· m· R ^ 2·(diff(%Theta, t, 1) ^ 2 + sin(%Theta) ^ 2· diff(%Phi, t, 1) ^ 2) / 2 $;
T : T1 + T2 $; L : T − V ;

$$R^2m\left(\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\right)^2+\left(\frac{d}{dt}\,\Phi\right)^2\sin\left(\Theta\right)^2\right)+4R^2m\sin\left(\Theta\right)^2\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\right)^2+6Rgm\cos\left(\Theta\right)$$

(%i23) /· conservación del momentoPhi ·/
momentoPhi : diff(L, diff(%Phi, t, 1), 1) ;
ec_movPhi : diff(momentoPhi, t, 1) = diff(L, %Phi, 1) $;
dpPhi_dt : rhs(ec_movPhi) ;

$$2R^2m\left(\frac{d}{dt}\ \Phi\ \right)\sin\left(\ \Theta\ \right)^2$$

$$0$$

(%i28) %Phi : %omega· t $;
T1 : 2· m· R ^ 2·(diff(%Theta, t, 1) ^ 2 + sin(%Theta) ^ 2· diff(%Phi, t, 1) ^ 2) / 2 $;
T : T1 + T2 $; L : T − V ;
momentoPhi : 2· m· R ^ 2· diff(%Phi, t, 1)· sin(%Theta) ^ 2 ;

$$R^2m\left(\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\ \right)^2+\ \omega^2\ \sin\left(\ \Theta\ \right)^2\right)+4R^2m\sin\left(\ \Theta\ \right)^2\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\ \right)^2+6Rgm\cos\left(\ \Theta\ \right)$$

$$2\ \omega\ R^2m\sin\left(\ \Theta\ \right)^2$$

(%i31) /· conservación del hamiltoniano ·/
h : diff(%Theta, t, 1)· momentoT − L $; h : expand(h) ;
E : expand(T + V) ;

$$4R^2m\sin\left(\ \Theta\ \right)^2\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\ \right)^2+R^2m\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\ \right)^2-\omega^2\ R^2m\sin\left(\ \Theta\ \right)^2-6Rgm\cos\left(\ \Theta\ \right)$$

$$4R^2m\sin\left(\ \Theta\ \right)^2\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\ \right)^2+R^2m\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\ \right)^2+\ \omega^2\ R^2m\sin\left(\ \Theta\ \right)^2-6Rgm\cos\left(\ \Theta\ \right)$$

(%i32) expand(h − E) ;

$$-2\ \omega^2\ R^2m\sin\left(\ \Theta\ \right)^2$$

--> /· 3D) Reducir el problema del movimiento a la resolución de una única cuadratura , utilizando las cantidades conservadas . ·/ ;

(%i34) declare(h0, constant) $;
ec : h = h0 ;

$$4R^2m\sin\left(\ \Theta\ \right)^2\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\ \right)^2+R^2m\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\ \right)^2-\omega^2\ R^2m\sin\left(\ \Theta\ \right)^2-6Rgm\cos\left(\ \Theta\ \right)=\mathrm{h0}$$

(%i35) a : solve([ec], [diff(%Theta, t, 1)]) ;

$$\left[\frac{d}{dt}\ \Theta=-\frac{\sqrt{\omega^2\ R^2\sin\left(\Theta\right)^2+6Rg\cos\left(\Theta\right)+\frac{\mathrm{h0}}{m}}}{R\sqrt{4\sin\left(\Theta\right)^2+1}},\frac{d}{dt}\ \Theta=\frac{\sqrt{\omega^2\ R^2\sin\left(\Theta\right)^2+6Rg\cos\left(\Theta\right)+\frac{\mathrm{h0}}{m}}}{R\sqrt{4\sin\left(\Theta\right)^2+1}}\right]$$

(%i36) ode2(a[1], %Theta, t) ;

$$-R\int\frac{\sqrt{4\sin\left(\Theta\right)^2+1}}{\sqrt{\frac{\omega^2\ R^2m\sin\left(\Theta\right)^2+6Rgm\cos\left(\Theta\right)+\mathrm{h0}}{m}}}\,d\,\Theta=t+\%\mathrm{c}$$

(%i37) ode2(a[2], %Theta, t) ;

$$R\int\frac{\sqrt{4\sin\left(\Theta\right)^2+1}}{\sqrt{\frac{\omega^2\ R^2m\sin\left(\Theta\right)^2+6Rgm\cos\left(\Theta\right)+\mathrm{h0}}{m}}}\,d\,\Theta=t+\%\mathrm{c}$$

--> /· Fin del problema ·/ ;

Created with wxMaxima.

Ejercicio 2.4.3

```
(%i1) kill( all) ;
      load( vect) ;
```

done

/usr/share/maxima/5.43.2/share/vector/vect.mac

```
--> /· 4A ) Obtener el lagrangiano y la ecuación de movimiento , describiendo el
    significado de sus distintos términos . Dada la configuración geométrica
    del sistema , es conveniente trabajar en coordenadas esféricas . ·/ ;
```

```
(%i4) declare([ a, g, m, %omega], constant) ; asume( a> 0, g> 0, m> 0, %omega> 0) ;
      depends([ %Theta, %Phi], t) ;
```

done

$$\text{asume}\,(a>0, g>0, m>0,\ \omega\ >0)$$

$$[\Theta(t), \Phi(t)]$$

```
(%i5) /· determinación de la velocidad y energía cinética ·/
      depends([ uT, uP],[ %Theta, %Phi]) ;
```

$$[\text{uT}\,(\,\Theta\,,\ \Phi\,), \text{uP}\,(\,\Theta\,,\ \Phi\,)]$$

```
(%i6) uT :[ sin( %Theta)· cos( %Phi), sin( %Theta)· sin( %Phi), − cos( %Theta)] ;
```

$$[\cos(\,\Phi\,)\sin(\,\Theta\,), \sin(\,\Phi\,)\sin(\,\Theta\,), -\cos(\,\Theta\,)]$$

```
(%i7) uP :[ − sin( %Phi), cos( %Phi), 0] ;
```

$$[-\sin(\,\Phi\,), \cos(\,\Phi\,), 0]$$

```
(%i9) vT : a· diff( %Theta, t, 1)· uT ; vP : a· sin( %Theta)· diff( %Phi, t, 1)· uP ;
```

$$[a\cos(\,\Phi\,)\sin(\,\Theta\,)\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\,\right), a\sin(\,\Phi\,)\sin(\,\Theta\,)\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\,\right), -a\cos(\,\Theta\,)\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\,\right)]$$

$$[-a\sin(\,\Phi\,)\left(\frac{d}{dt}\ \Phi\,\right)\sin(\,\Theta\,), a\cos(\,\Phi\,)\left(\frac{d}{dt}\ \Phi\,\right)\sin(\,\Theta\,), 0]$$

```
(%i11) /· Condición de velocidad angular constante ·/
       v : vT + vP ; v : subst( %omega, diff( %Phi, t, 1), v) ;
```

$$[a\cos(\,\Phi\,)\sin(\,\Theta\,)\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\,\right) - a\sin(\,\Phi\,)\left(\frac{d}{dt}\ \Phi\,\right)\sin(\,\Theta\,), a\sin(\,\Phi\,)\sin(\,\Theta\,)\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\,\right) + a\cos(\,\Phi\,)\left(\frac{d}{dt}\ \Phi\,\right)\sin(\,\Theta\,), -a\cos(\,\Theta\,)\left(\frac{d}{dt}\right.$$

$$[a\cos(\,\Phi\,)\sin(\,\Theta\,)\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\,\right) - \omega\ a\sin(\,\Phi\,)\sin(\,\Theta\,), a\sin(\,\Phi\,)\sin(\,\Theta\,)\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\,\right) + \omega\ a\cos(\,\Phi\,)\sin(\,\Theta\,), -a\cos(\,\Theta\,)\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\,\right)]$$

```
(%i13) v2 : trigsimp( expand( v. v)) ;
       T : m· v2 / 2 ;
```

$$a^2\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\,\right)^2 + \omega^2\ a^2\sin(\,\Theta\,)^2$$

$$\frac{m\left(a^2\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\right)^2 + \omega^2\ a^2\sin(\,\Theta\,)^2\right)}{2}$$

```
(%i16) /· Energía potencial y lagrangiano ·/
       depends( h, %Theta) ;
       h : a − a· cos( %Theta) ; V : m· g· h ;
```

$$[h(\,\Theta\,)]$$

$$a - a\cos(\,\Theta\,)$$

$$gm(a - a\cos(\,\Theta\,))$$

```
(%i17) L : T − V ;
```

$$\frac{m\left(a^2\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\right)^2 + \omega^2\ a^2\sin(\,\Theta\,)^2\right)}{2} - gm(a - a\cos(\,\Theta\,))$$

(%i20) /· ecuación del movimiento ·/
momentoT : diff(L, diff(%Theta, t, 1)) ;
eulerLagrange : diff(momentoT, t, 1) − diff(L, %Theta, 1) $;
ec_mov : eulerLagrange = 0 ;

$$a^2 m\left(\frac{d}{dt}\ \Theta\ \right)$$

$$a^2 m\left(\frac{d^2}{dt^2}\ \Theta\ \right)-\omega^2\ a^2 m\cos\left(\ \Theta\ \right)\sin\left(\ \Theta\ \right)+agm\sin\left(\ \Theta\ \right)=0$$

(%i21) /· 4B) Demostrar que cuando ω es mayor que un valor crítico ωc , la cuenta tiene una posición de equilibrio dinámico estable en la posición dada por el ángulo polar θ0 . Determinar ωc y θ0 en función de los datos del problema . Confirmar la estabilidad de esta posición de equilibrio analizando el efecto de pequeñas variaciones de posición . ·/

equilibrio : subst(0, diff(%Theta, t, 2), ec_mov) ;

$$agm\sin\left(\ \Theta\ \right)-\omega^2\ a^2 m\cos\left(\ \Theta\ \right)\sin\left(\ \Theta\ \right)=0$$

(%i25) declare(%omegac, constant) $;
%omegac : sqrt(g / a) $;
ec_mov : subst(a· %omega[c] ^ 2, g, ec_mov) ;
equilibrio : subst(a· %omega[c] ^ 2, g, equilibrio) ;

$$a^2 m\sin\left(\ \Theta\ \right)\ \omega_c^2\ +a^2 m\left(\frac{d^2}{dt^2}\ \Theta\ \right)-\omega^2\ a^2 m\cos\left(\ \Theta\ \right)\sin\left(\ \Theta\ \right)=0$$

$$a^2 m\sin\left(\ \Theta\ \right)\ \omega_c^2-\omega^2\ a^2 m\cos\left(\ \Theta\ \right)\sin\left(\ \Theta\ \right)=0$$

(%i26) solucionEq : solve(equilibrio, %Theta) ;

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

$$\left[\ \Theta\ =\operatorname{acos}\left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right),\ \Theta\ =0\right]$$

--> /· 4C) Demostrar que la ecuación de movimiento para pequeños desplazamientos desde el punto de equilibrio estable se reduce a un movimiento armónico simple . ¿ Cuál es el valor de la frecuencia de oscilación ? ·/ ;

(%i28) declare(%Thetac, constant) $;
%Thetac : rhs(solucionEq[1]) ;

$$\operatorname{acos}\left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)$$

(%i31) /· nueva variable ·/
depends([%theta, %epsilon], t) ;
%theta : %Thetac + %epsilon ;
d2 : diff(%theta, t, 2) ;

$$[\theta(t),\varepsilon(t)]$$

$$\operatorname{acos}\left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)+\ \varepsilon$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\ \varepsilon$$

(%i33) /· ecuacion de movimiento para epsilon ·/
ec_mov : subst(d2, diff(%Theta, t, 2), ec_mov) $;
ec_mov : subst(%theta, %Theta, ec_mov) ;

$$-\omega^2\ a^2 m\cos\left(\operatorname{acos}\left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)+\ \varepsilon\ \right)\sin\left(\operatorname{acos}\left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)+\ \varepsilon\ \right)+a^2 m\ \omega_c^2\sin\left(\operatorname{acos}\left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)+\ \varepsilon\ \right)+a^2 m\left(\frac{d^2}{dt^2}\ \varepsilon\ \right)=0$$

(%i34) /· Aproximación en primer orden ·/
ec_mov : taytorat(expand(taylor(ec_mov, %epsilon, 0, 1))) ;

$$-\frac{\left(\omega_c^4-\omega^4\right)ma^2\varepsilon-\omega^2 m\left(\frac{d^2}{dt^2}\varepsilon\right)a^2}{\omega^2}=0$$

(%i37) solucion : solve(ec_mov, diff(%epsilon, t, 2)) $;
%Omega2 : ratsimp(− rhs(solucion[1]) / %epsilon) $;
%Omega2 : subst(sqrt(g / a), %omega[c], %Omega2) ;

$$-\frac{\frac{g^2}{a^2}-\omega^4}{\omega^2}$$

(%i38) %Omega = sqrt(%Omega2) ;

$$\Omega=\frac{\sqrt{\omega^4-\frac{g^2}{a^2}}}{|\ \omega\ |}$$

--> /· Fin del problema ·/ ;

Created with wxMaxima.

Ejercicio 2.6.3

```
(%i1) kill( all) ;
      load( noninteractive) ;
```

done

/usr/share/maxima/5.43.2/share/contrib/noninteractive/noninteractive.mac

```
(%i3) declare([ L, M], constant) ; asume( m> 0, L> 0) ;
```

done

$$\text{asume}\,(m > 0, L > 0)$$

--> /· 5A) Determinar el lagrangiano del sistema , en función de la coordenada generalizada del sistema . ; ; ; ; ; ;

```
(%i5) depends([ x, y], %theta) ;
      depends( %theta, t) ;
```

$$[x(\ \theta\ ), y(\ \theta\ )]$$

$$[\theta(t)]$$

```
(%i7) x : L· sin( %theta) ; y : L· cos( %theta) ;
```

$$L\sin(\ \theta\ )$$

$$L\cos(\ \theta\ )$$

```
(%i9) T : M·( diff( x, t, 1) ^ 2 + diff( y, t, 1) ^ 2) / 2 $ ; T : trigsimp( expand( T)) ;
```

$$\frac{L^2 M\left(\frac{d}{dt}\ \theta\right)^2}{2}$$

```
(%i11) V : 0 ; Lagrangiano : T − V ;
```

$$0$$

$$\frac{L^2 M\left(\frac{d}{dt}\ \theta\right)^2}{2}$$

--> /· 5B) Obtener la ecuación de movimiento , y demostrar que la energía es un cantidad conservada del sistema . ; ; ; ; ; ;

```
(%i15) momentoT : diff( Lagrangiano, diff( %theta, t, 1)) $ ;
       eulerLagrange : diff( momentoT, t, 1) − diff( Lagrangiano, %theta, 1) $ ;
       ec_mov : eulerLagrange = 0 $ ;
       ec_mov : ratsimp( ec_mov /( M· L ^ 2)) ;
```

$$\frac{d^2}{dt^2}\ \theta = 0$$

```
(%i16) solucion : ode2( ec_mov, %theta, t) ;
```

$$\theta = \%k2\, t + \%k1$$

```
(%i20) /· conservación de la energía ·/
       E : T $ ;
       h : momentoT· diff( %theta, t, 1) − Lagrangiano $ ; h − E ;
       E ;
```

$$0$$

$$\frac{L^2 M\left(\frac{d}{dt}\ \theta\right)^2}{2}$$

```
(%i23) dE_dt : diff( E, t) ;
       dE_dt - m* L^2* diff( %theta, t)* lhs( ec_mov) $ ;
       dE_dt : m* L^2* diff( %theta, t)* rhs( ec_mov) ;
```

$$L^2 M\left(\frac{d}{dt}\ \theta\ \right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\ \theta\ \right)$$

$$0$$

```
(%i24) E : subst( diff( rhs( solucion), t, 1), diff( %theta, t, 1), E) ;
```

$$\frac{L^2 M\,\%k2^2}{2}$$

--> /* 5D) Demostrar que el movimiento se reduce a un movimiento armónico simple en cada eje . Recordar que según el método lagrangiano , para analizar el movimiento en las coordenadas no generalizadas debe incorporarse la ecuación de ligadura al lagrangiano . ; ; ; ; ; ;

```
(%i26) kill( x, y, E) ;
       depends([ x, y], t) ;
```

$$\text{done}$$

$$[x(t), y(t)]$$

```
(%i27) Lagrangiano : M*( diff( x, t, 1) ^ 2 + diff( y, t, 1) ^ 2) / 2 + %lambda*( sqrt( x ^ 2 + y ^ 2) - L)
       ;
```

$$\frac{M\left(\left(\frac{d}{dt}\,y\right)^2+\left(\frac{d}{dt}\,x\right)^2\right)}{2}+\lambda\left(\sqrt{y^2+x^2}-L\right)$$

```
(%i30) momentoX : diff( Lagrangiano, diff( x, t, 1)) $ ;
       eulerLagrangeX : diff( momentoX, t, 1) - diff( Lagrangiano, x, 1) $ ;
       ec_movX : eulerLagrangeX = 0 ;
```

$$M\left(\frac{d^2}{dt^2}\,x\right)-\frac{\lambda\,x}{\sqrt{y^2+x^2}}=0$$

```
(%i33) momentoY : diff( Lagrangiano, diff( y, t, 1)) $ ;
       eulerLagrangeY : diff( momentoY, t, 1) - diff( Lagrangiano, y, 1) $ ;
       ec_movY : eulerLagrangeY = 0 ;
```

$$M\left(\frac{d^2}{dt^2}\,y\right)-\frac{\lambda\,y}{\sqrt{y^2+x^2}}=0$$

```
(%i36) /* conservacion de la energia */
       declare([ E0, v], constant) $ ;
       E0 : M* v ^ 2 / 2 ;
       E : M*( diff( x, t, 1) ^ 2 + diff( y, t, 1) ^ 2) / 2 ;
```

$$\frac{M v^2}{2}$$

$$\frac{M\left(\left(\frac{d}{dt}\,y\right)^2+\left(\frac{d}{dt}\,x\right)^2\right)}{2}$$

```
(%i39) depends( ligadura,[ x, y]) ;

       ligadura : diff( Lagrangiano, %lambda, 1) ;
       dligagura_dt : diff( ligadura, t, 1) ;
```

$$[\text{ligadura}\,(x, y)]$$

$$\sqrt{y^2+x^2}-L$$

$$\frac{2y\left(\frac{d}{dt}\,y\right)+2x\left(\frac{d}{dt}\,x\right)}{2\sqrt{y^2+x^2}}$$

(%i41)
```
dy_dt : rhs( solve( dligagura_dt = 0, diff( y, t, 1))[ 1]) ;
E : factor( expand( subst( dy_dt, diff( y, t, 1), E))) ;
```

$$-\frac{x\left(\frac{d}{dt}x\right)}{y}$$

$$\frac{M\left(\frac{d}{dt}x\right)^2\left(y^2+x^2\right)}{2y^2}$$

(%i42)
```
y2 : rhs( solve( ligadura = 0, y ^ 2)[ 1]) ;
```

$$\text{if}L<0\text{then}L\text{elseifequal}\left(L,0\right)\text{then}L^2-x^2\text{elseif}L>0\text{then}L^2-x^2$$

(%i44)
```
E : subst( y2, y ^ 2, E) $ ;
ecuacion : E = E0 ;
```

$$\frac{L^2M\left(\frac{d}{dt}x\right)^2}{2\left(L^2-x^2\right)}=\frac{Mv^2}{2}$$

(%i45)
```
dxdt_2 : expand( rhs( solve( ecuacion, diff( x, t) ^ 2)[ 1])) ;
```

$$v^2-\frac{v^2x^2}{L^2}$$

(%i46)
```
dxdt_arm : %omega ^ 2· A ^ 2 − %omega ^ 2· x ^ 2 ;
```

$$\omega^2\,A^2-\omega^2\,x^2$$

(%i47)
```
solve([ v ^ 2 = %omega ^ 2· A ^ 2, −( v ^ 2· x ^ 2) / L ^ 2 = − %omega ^ 2· x ^ 2],[
%omega, A])[ 4] ;
```

$$\left[\,\omega=\frac{v}{L},A=L\right]$$

```
--> /· Fin del problema ·/ ;
```

Created with wxMaxima.

Ejercicio 2.6.4

```
(%i1) kill( all) ;
      load( noninteractive) ;
```

done

/usr/share/maxima/5.43.2/share/contrib/noninteractive/noninteractive.mac

```
--> /· 6A ) Escribir la ecuación de movimiento , y determinar a qué sistema
    corresponde . ; ; ; ;
```

```
(%i2) depends([ L, q], t) ;
```

$$[L(t), q(t)]$$

```
(%i4) declare([ M, %omega, %Omega, k], constant) ; asume( M> 0, %omega> 0, %Omega> 0, k> 0) ;
```

done

$$\text{asume}\,(M > 0,\ \omega\ > 0,\ \Omega\ > 0, k > 0)$$

```
(%i6) L : %e ^( %gamma· t)·( M· diff( q, t, 1) ^ 2 − k· q ^ 2) / 2 $ ;
      L : subst( M· %omega ^ 2, k, L) ;
```

$$\frac{\left(M\left(\frac{d}{dt}\,q\right)^2 - \omega^2\, Mq^2\right)\%\mathrm{e}^{\gamma\, t}}{2}$$

```
(%i9) momento : diff( L, diff( q, t, 1)) ;
      eulerLagrange : diff( momento, t, 1) − diff( L, q, 1) $
      ec_mov : eulerLagrange = 0 ;
```

$$M\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\%\mathrm{e}^{\gamma\, t}$$

$$M\left(\frac{d^2}{dt^2}\,q\right)\%\mathrm{e}^{\gamma\, t} + \gamma\, M\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\%\mathrm{e}^{\gamma\, t} + \omega^2\, Mq\%\mathrm{e}^{\gamma\, t} = 0$$

```
(%i11) /· oscilador armónico amortiguado ·/
       depends( qsol, t) $
       qsol : rhs( ode2( ec_mov, q, t)) ;
```

$$\text{if}(2\,\omega - \gamma\,)(2\,\omega\ +\ \gamma\,) < 0\text{thenqsol: rhs}\,(\text{ode2}\,(\text{ec_mov}, q, t))\text{elseifequal}\,((2\,\omega - \gamma\,)(2\,\omega\ +\ \gamma\,), 0)\text{thenqsol: rhs}\,(\text{ode2}\,(\text{ec_mov}$$

```
(%i13) %Omega : sqrt( %omega ^ 2 − %gamma ^ 2 / 4) ;
       qsol : A· %e ^( −( %gamma· t) / 2)· sin( %Omega· t + %phi) ;
```

$$\sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$A\,\%\mathrm{e}^{-\frac{\gamma\, t}{2}}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\,t + \varphi\right)$$

```
(%i16) /· 6B ) Analizar si existe alguna constante del movimiento . ·/

       E :( M· diff( qsol, t, 1) ^ 2 + k· qsol ^ 2) / 2 $
       E : subst( M· omega ^ 2, k, E) $ ;
       dE_dt : trigsimp( ratsimp( diff( E, t, 1))) ;
```

$$\%\mathrm{e}^{-\gamma\, t}\left(\left(\left(6\gamma\,\omega^2 - 2\,\gamma^3\right)MA^2 - 2\gamma\, MA^2\,\omega^2\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4\,\omega^2 - \gamma^2}\,t + 2\,\varphi}{2}\right)^2 + \sqrt{4\,\omega^2 - \gamma^2}\left(2MA^2\,\omega^2 + \left(2\,\gamma^2 - 2\,\omega^2\right)MA^2\right)\cos\left(\frac{\sqrt{4\,\omega^2 - \gamma^2}\,t + 2\,\varphi}{2}\right)\right)$$
$$\over 4$$

```
(%i19) /· de otra forma ·/
       E :( M· diff( q, t, 1) ^ 2 + k· q ^ 2) / 2 $ ;
       E : subst( M· omega ^ 2, k, E) $ ;
       dE_dt : diff( E, t, 1) ;
```

$$\frac{2M\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,q\right) + 2M\,\omega^2\, q\left(\frac{d}{dt}\,q\right)}{2}$$

```
(%i22) d2qdt2 : rhs( solve( ec_mov, diff( q, t, 2))[ 1]) $ ;
       dE_dt : factor( subst( d2qdt2, diff( q, t, 2), dE_dt)) ;
       solve( dE_dt = 0, t)[ 1] ;
```

$$-M\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\left(\gamma\,\left(\frac{d}{dt}\,q\right)-\omega^2\,q+\ \omega^2\,q\right)$$

$$\frac{d}{dt}\,q=-\frac{\omega^2\,q-\omega^2\,q}{\gamma}$$

```
(%i27) /· hamiltoniano ·/
       h : factor( expand( momento· diff( q, t, 1) − L)) $ ;
       kill( E) ;
       h : %e ^( %gamma· t)· E( t) ;
       dh_dt : diff( h, t) $ ;
       dh_dt : factor( subst( dE_dt, diff( E( t), t), dh_dt)) ;
```

done

$$\%e^{\gamma\,t}\,E(t)$$

$$\%e^{\gamma\,t}\left(\gamma\,E(t)-\gamma\,M\left(\frac{d}{dt}\,q\right)^2+M\,\omega^2\,q\left(\frac{d}{dt}\,q\right)-\omega^2\,Mq\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\right)$$

```
(%i32) solucion : solve( dh_dt = 0, t)[ 1] ;
       kill( E) ;
       depends( E, t) ;
       dE_dt : subst( E / M, rhs( solucion) / M, dE_dt) ;
       ode2( diff( E, t) = dE_dt, E, t) ;
```

$$E(t)=\frac{\gamma\,M\left(\frac{d}{dt}\,q\right)^2+\left(\omega^2\,Mq-M\,\omega^2\,q\right)\left(\frac{d}{dt}\,q\right)}{\gamma}$$

done

$$[E(t)]$$

$$-M\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\left(\gamma\,\left(\frac{d}{dt}\,q\right)-\omega^2\,q+\ \omega^2\,q\right)$$

$$E=\int\left(M\,\omega^2-\omega^2\,M\right)q\left(\frac{d}{dt}\,q\right)-\gamma\,M\left(\frac{d}{dt}\,q\right)^2dt+\%c$$

--> /· 6D) Se define una nueva coordenada para el sistema mediante la
transformación de coordenadas Q = e γt / 2 • q
Obtener el nuevo lagrangiano , y la ecuación de movimiento para la
coordenada Q . Analizar el significado físico de dicha transformación . ·/ ;

```
(%i34) depends( Q, t) ;
       Q : %e ^( %gamma· t / 2)· q ;
```

$$[Q(t)]$$

$$q\,\%e^{\frac{\gamma\,t}{2}}$$

```
(%i35) dQ_dt : factor( diff( Q, t)) ;
```

$$\frac{\left(2\left(\frac{d}{dt}\,q\right)+\gamma\,q\right)\%e^{\frac{\gamma\,t}{2}}}{2}$$

```
(%i40) kill( Q) $ ; depends( Q, t) $ ;
       dq_dt : expand( rhs( solve( dQ_dt = diff( Q, t), diff( q, t))[ 1])) $ ;
       solucionq : rhs( solve([ Q = q· %e ^( %gamma· t / 2)],[ q])[ 1]) ;
       dq_dt : factor( subst( solucionq, q, dq_dt)) ;
```

$$Q\,\%e^{-\frac{\gamma\,t}{2}}$$

$$\frac{\left(2\left(\frac{d}{dt}\,Q\right)-\gamma\,Q\right)\%e^{-\frac{\gamma\,t}{2}}}{2}$$

```
(%i42) /· nuevo lagrangiano ·/
       L : subst( dq_dt, diff( q, t), L) $ ;
       L : expand( subst( solucionq, q, L)) ;
```

$$\frac{M\left(\frac{d}{dt}\,Q\right)^2}{2}-\frac{\gamma\,MQ\left(\frac{d}{dt}\,Q\right)}{2}-\frac{\omega^2\,MQ^2}{2}+\frac{\gamma^2\,MQ^2}{8}$$

(%i45)
```
/· ecuación de movimiento ·/
momentoQ : diff( L, diff( Q, t, 1)) ;
eulerLagrangeQ : diff( momentoQ, t, 1) − diff( L, Q, 1) $
ec_movQ : eulerLagrangeQ = 0 ;
```

$$M\left(\frac{d}{dt}Q\right)-\frac{\gamma\, MQ}{2}$$

$$M\left(\frac{d^2}{dt^2}Q\right)+\omega^2\, MQ-\frac{\gamma^2\, MQ}{4}=0$$

(%i47)
```
/· determinación de omega ·/
Omega2 : expand( − rhs( solve( ec_movQ, diff( Q, t, 2))[ 1]) / Q) $ ;
%Omega : sqrt( Omega2) ;
```

$$\sqrt{\omega^2-\frac{\gamma^2}{4}}$$

(%i51)
```
/· 6E ) ¿ Existe ahora alguna constante del movimiento ? ·/
h : expand( diff( Q, t)· diff( L, diff( Q, t)) − L) ;
dh_dt : factor( diff( h, t)) $ ; expand( dh_dt − diff( Q, t)· lhs( ec_movQ)) $ ;
dh_dt : diff( Q, t)· rhs( ec_movQ) ;
```

$$\frac{M\left(\frac{d}{dt}Q\right)^2}{2}+\frac{\omega^2\, MQ^2}{2}-\frac{\gamma^2\, MQ^2}{8}$$

$$0$$

(%i54)
```
E : M· diff( Q, t, 1) ^ 2 / 2 − %gamma ^ 2· M· Q ^ 2 / 8 +( k· Q ^ 2) / 2 $ ;
E : subst( M· %omega ^ 2, k, E) ;
E − h ;
```

$$\frac{M\left(\frac{d}{dt}Q\right)^2}{2}+\frac{\omega^2\, MQ^2}{2}-\frac{\gamma^2\, MQ^2}{8}$$

$$0$$

```
--> /· Fin del problema ·/ ;
```

Created with wxMaxima.

Ejercicio 2.6.5

(%i1) kill(all) ;

done

(%i1) load(vect) ;

/usr/share/maxima/5.43.2/share/vector/vect.mac

--> /· 8A) Evaluar cuál es la relación de los potenciales de (φ , A) con los campos eléctrico y magnético (E , B) para que la ecuación de movimiento resultante por el método lagrangiano sea la conocida ecuación newtoniana en presencia de una fuerza de Lorentz sobre la partícula cargada . ·/ ;

(%i2) depends([A, %Phi],[r, t]) ;

$$[A(r,t),\Phi(r,t)]$$

(%i3) depends([r, v], t) ;

$$[r(t),v(t)]$$

(%i4) /· lagrangiano ·/
L : m· v. v / 2 − e· %Phi + e· A. v / c ;

$$\frac{m(v.v)}{2}+\frac{(A.v)e}{c}-\Phi\, e$$

(%i10) /· ecuacion de movimiento ·/
momento : diff(L, v, 1) ;
dp_dt : diff(momento, t, 1) $;
dp_dt : subst(v. grad(A),(' diff(r, t, 1))·(' diff(A, r, 1)), dp_dt) ;
dL_dr : diff(L, r, 1) $;
dL_dr : subst(grad(A. v), ' diff(A, r, 1) . v, dL_dr) $;
dL_dr : subst(grad(%Phi), ' diff(%Phi, r, 1), dL_dr) ;

$$mv+\frac{Ae}{c}$$

$$m\left(\frac{d}{dt}v\right)+\frac{e\left(v.\mathrm{grad}\,(A)+\frac{d}{dt}A\right)}{c}$$

$$\frac{\mathrm{grad}\,(A.v)e}{c}-\mathrm{grad}\,(\ \Phi\ )e$$

(%i14) kill(F) ;
ec_mov : dp_dt − dL_dr = 0 ;
ec_mov : subst(F, m· diff(v, t), ec_mov) $;
/· Fuerza de Lorentz ·/
F : expand(rhs(solve(ec_mov, F)[1])) ;

done

$$m\left(\frac{d}{dt}v\right)+\frac{e\left(v.\mathrm{grad}\,(A)+\frac{d}{dt}A\right)}{c}-\frac{\mathrm{grad}\,(A.v)e}{c}+\mathrm{grad}\,(\ \Phi\ )e=0$$

$$-\frac{e(v.\mathrm{grad}\,(A))}{c}+\frac{\mathrm{grad}\,(A.v)e}{c}-\frac{\left(\frac{d}{dt}A\right)e}{c}-\mathrm{grad}\,(\ \Phi\ )e$$

(%i16) F : subst(v~ curl(A) +(v . grad(A)), grad(A . v), F) ;
F : expand(F) ;

$$\frac{e(v.\mathrm{grad}\,(A)-\mathrm{curl}\,(A)\sim v)}{c}-\frac{e(v.\mathrm{grad}\,(A))}{c}-\frac{\left(\frac{d}{dt}A\right)e}{c}-\mathrm{grad}\,(\ \Phi\ )e$$

$$-\frac{\mathrm{curl}\,(A)\sim ve}{c}-\frac{\left(\frac{d}{dt}A\right)e}{c}-\mathrm{grad}\,(\ \Phi\ )e$$

(%i17) Florentz : e· vectorE + e· v~ vectorB / c ;

$$e\,\mathrm{vectorE}+\frac{ev\sim\mathrm{vectorB}}{c}$$

```
(%i24) ec : Florentz = F $ ;
       ec1 : subst( 0, v, ec) $ ;
       solve( ec1, vectorE)[ 1] $ ;
       solE : expand( %) ;
       ec2 : expand( subst( rhs( sol), vectorE, ec)) $ ;
       solve( ec2, vectorB)[ 1] $ ;
       solB : solve( subst( w, v, %), vectorB)[ 1] ;
```

$$\text{vectorE}=-\frac{\frac{d}{dt}A}{c}-\text{grad}\left(\ \Phi\ \right)$$

$$\text{vectorB}\sim w=\text{grad}\left(\ \Phi\ \right)c+\text{curl}\left(A\right)\sim w+\frac{d}{dt}A$$

```
--> /· 8B ) Demostrar que los campos eléctrico y magnético no varían ( y por
    tanto , no varía la ecuación de movimiento ) bajo la siguiente
    transformación gauge de los potenciales : A = A + grad ( psi ), phi = phi − ( 1 / c ) parcial psi /
    parcial t ·/ ;
(%i25) depends( %psi,[ r, t]) ;
```

$$[\psi(r,t)]$$

```
(%i31) subst( A + grad( %psi), A, solE) ;
       subst( %Phi −( 1 / c)· subst( 0, diff( %psi, r), diff( %psi, t)), %Phi, %) $ ;
       subst( ' diff( A, t, 1) + ' diff( grad( %psi), t, 1), ' diff(( A + grad( %psi)), t, 1), %) $ ;
       subst( grad( %Phi) − grad( ' diff( %psi, t, 1)) / c, grad( %Phi − ' diff( %psi, t, 1) / c), %) $ ;
       subst( grad( ' diff( %psi, t, 1)), ' diff( grad( %psi), t, 1), %) $ ;
       expand( %) ;
```

$$\text{vectorE}=-\frac{\frac{d}{dt}\left(A+\text{grad}\left(\psi\right)\right)}{c}-\text{grad}\left(\ \Phi\ \right)$$

$$\text{vectorE}=-\frac{\frac{d}{dt}A}{c}-\text{grad}\left(\ \Phi\ \right)$$

```
(%i33) subst( A + grad( %psi), A, solB) ;
       subst( curl( A) + curl( grad( %psi)), curl( A + grad( %psi)), %) ;
```

$$\text{vectorB}\sim w=\text{grad}\left(\ \Phi\ \right)c+\text{curl}\left(A+\text{grad}\left(\ \psi\ \right)\right)\sim w+\frac{d}{dt}\left(A+\text{grad}\left(\ \psi\ \right)\right)$$

$$\text{vectorB}\sim w=\text{grad}\left(\ \Phi\ \right)c+\text{curl}\left(A\right)\sim w+\frac{d}{dt}\left(A+\text{grad}\left(\ \psi\ \right)\right)$$

Created with wxMaxima.

Ejercicios 2.6.6, 2.6.7

```
(%i1) kill( all) ;
```

done

```
(%i1) depends( q1, t) ;
```

$$[\mathrm{q1}\,(t)]$$

```
(%i2) T : m· diff( q1, t) ^ 2 / 2 ;
```

$$\frac{m\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}\right)^2}{2}$$

```
(%i3) depends( V, q1) ;
```

$$[V(\mathrm{q1})]$$

```
(%i4) L : T − V( q1) ;
```

$$\frac{m\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}\right)^2}{2}-V(\mathrm{q1})$$

```
(%i5) declare([ %alpha, %beta, m], constant) ;
```

done

```
(%i6) qp : %alpha· q1 ;
```

$$\alpha\,\mathrm{q1}$$

```
(%i7) q1p : diff( %alpha· q1) / diff( %beta· t) ;
```

$$\frac{\alpha\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}\right)}{\beta}$$

```
(%i8) Tp : m· q1p ^ 2 / 2 ;
```

$$\frac{\alpha^2\,m\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}\right)^2}{2\,\beta^2}$$

```
(%i9) Tp : subst( diff( q1, t)· del( t), del( q1), Tp) ;
```

$$\frac{\alpha^2\,m\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}\right)^2}{2\,\beta^2}$$

```
(%i10) Tp / T ;
```

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

```
(%i11) Lp : Tp − Vp( q1) ;
```

$$\frac{\alpha^2\,m\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}\right)^2}{2\,\beta^2}-\mathrm{Vp}\,(\mathrm{q1})$$

```
(%i12) Lp : subst( %alpha ^ m· V( q1), Vp( q1), Lp) ;
```

$$\frac{\alpha^2\,m\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}\right)^2}{2\,\beta^2}-\alpha^m\,V(\mathrm{q1})$$

```
(%i13) Lp : subst( %alpha ^( 2 − m), %beta ^ 2, Lp) ;
```

$$\frac{\alpha^m\,m\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}\right)^2}{2}-\alpha^m\,V(\mathrm{q1})$$

```
(%i14) ratsimp( Lp / L) ;
```

$$\alpha^m$$

(%i15) /· apartado b) ·/

```
%beta : rhs( solve( %alpha ^( 2 − m) = %beta ^ 2, %beta)[ 2]) ;
```

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^{m-2}}}$$

(%i16) `%Gamma : radcan(( diff( %alpha· q1) / diff( %beta· t)) /( del( q1) / del( t))) ;`

$$\frac{\alpha^{\frac{m}{2}} \left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}\right)\mathrm{del}\,(t)}{\mathrm{del}\,(\mathrm{q1})}$$

(%i17) `%delta : %alpha ^ m ;`

$$\alpha^{m}$$

(%i18) `momentoAngular : m· diff( q1, t)· q1 ;`

$$m\,\mathrm{q1}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}\right)$$

(%i19) `momentoAngularp : m· diff( qp) / diff( %beta· t)· qp ;`

$$\alpha^{2}\,m\sqrt{\alpha^{m-2}}\,\mathrm{q1}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}\right)$$

(%i20) `momentoAngularp : subst( diff( q1, t)· del( t), del( q1), momentoAngularp) ;`

$$\alpha^{2}\,m\sqrt{\alpha^{m-2}}\,\mathrm{q1}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}\right)$$

(%i21) `%epsilon : ratsimp( momentoAngularp / momentoAngular) ;`

$$\alpha^{2}\,\sqrt{\alpha^{m-2}}$$

(%i22) `escalas :[ %alpha, %beta, %Gamma, %delta, %epsilon] ;`

$$\left[\,\alpha\,,\frac{1}{\sqrt{\alpha^{m-2}}},\frac{\alpha^{\frac{m}{2}} \left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}\right)\mathrm{del}\,(t)}{\mathrm{del}\,(\mathrm{q1})},\ \alpha^{m}\,,\ \alpha^{2}\,\sqrt{\alpha^{m-2}}\right]$$

(%i24) /· casos particulares ·/

```
m = − 1 ;
```

```
ev( escalas, m = − 1) ;
```

$$m{=}{-}1$$

$$\left[\,\alpha\,,\ \alpha^{\frac{3}{2}}\,,\frac{\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}\right)\mathrm{del}\,(t)}{\sqrt{\alpha}\,\mathrm{del}\,(\mathrm{q1})},\frac{1}{\alpha},\sqrt{\alpha}\right]$$

(%i26) `m = 1 ;`

```
ev( escalas, m = 1) ;
```

$$m{=}1$$

$$\left[\,\alpha\,,\sqrt{\alpha},\frac{\sqrt{\alpha}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}\right)\mathrm{del}\,(t)}{\mathrm{del}\,(\mathrm{q1})},\ \alpha\,,\ \alpha^{\frac{3}{2}}\,\right]$$

(%i28) `m = 2 ;`

```
ev( escalas, m = 2) ;
```

$$m{=}2$$

$$\left[\,\alpha\,,1,\frac{\alpha\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{q1}\right)\mathrm{del}\,(t)}{\mathrm{del}\,(\mathrm{q1})},\ \alpha^{2}\,,\ \alpha^{2}\,\right]$$

Created with wxMaxima.

Ejercicio 2.6.8

(%i1) kill(all) ;

done

(%i1) depends([r, v], t) ;

$$[r(t), v(t)]$$

(%i2) declare(V, constant) ;

done

(%i5) tp : t ;
vp : v + V0 ;
rp : r + V0· t ;

$$t$$

$$v + \mathrm{V0}$$

$$\mathrm{V0}\, t + r$$

(%i6) depends(L,[r, v, t]) ;

$$[L(r, v, t)]$$

(%i8) momento : diff(L, v) ;
eulerLagrange : ' diff(momento, t) − diff(L, r) ;

$$\frac{d}{dv} L$$

$$\frac{d^2}{dt\,dv} L - \frac{d}{dr} L$$

(%i9) dvp : diff(vp) ;

$$\mathrm{del}\,(\mathrm{V0}) + \left(\frac{d}{dt} v\right)\mathrm{del}\,(t)$$

(%i10) drp : subst(0, del(t), diff(rp)) ;

$$t\,\mathrm{del}\,(\mathrm{V0})$$

(%i11) dtp : diff(tp) ;

$$\mathrm{del}\,(t)$$

(%i13) dLp : subst(0, del(t), diff(L)) ; dLp : subst(0, del(r), dLp) ;

$$\left(\frac{d}{dv} L\right)\mathrm{del}\,(v) + \left(\frac{d}{dr} L\right)\mathrm{del}\,(r)$$

$$\left(\frac{d}{dv} L\right)\mathrm{del}\,(v)$$

(%i14) momentop : dLp / dvp ;

$$\frac{\left(\frac{d}{dv} L\right)\mathrm{del}\,(v)}{\mathrm{del}\,(\mathrm{V0}) + \left(\frac{d}{dt} v\right)\mathrm{del}\,(t)}$$

(%i15) eulerLagrangep : ' diff(momentop, t) − diff(L, r) ;

$$\frac{d}{dt}\frac{\left(\frac{d}{dv} L\right)\mathrm{del}\,(v)}{\mathrm{del}\,(\mathrm{V0}) + \left(\frac{d}{dt} v\right)\mathrm{del}\,(t)} - \frac{d}{dr} L$$

(%i18) /· apartado b) ·/

```
load( vect) ;
kill( L) ;
depends( L, mod_v) ;
```

/usr/share/maxima/5.43.2/share/vector/vect.mac

done

$$[L(\mathrm{mod}_v)]$$

(%i20)
```
mod_vp : taylor( sqrt( vp. vp), V0, 0, 1) ;
mod_vp : subst( mod_v, sqrt( v. v), mod_vp) ;
```

$$\sqrt{v.v}+\frac{\sqrt{v.v}v\,\mathrm{V0}}{v.v}+\ ...$$

$$\frac{\mathrm{V0}\,v}{\mathrm{mod}_v}+\mathrm{mod}_v$$

(%i21)
```
serieL : taylor( L( mod_vp), V0, 0, 1) ;
```

$$L(\mathrm{mod}_v)+\left(\frac{d}{d\,\mathrm{V0}}\,L\left(\frac{\mathrm{V0}\,v+{\mathrm{mod}_v}^2}{\mathrm{mod}_v}\right)_{\mathrm{V0}=0}\right)\mathrm{V0}+\ ...$$

(%i22)
```
df_dt : serieL − L( mod_v) ;
```

$$\left(\frac{d}{d\,\mathrm{V0}}\,L\left(\frac{\mathrm{V0}\,v+{\mathrm{mod}_v}^2}{\mathrm{mod}_v}\right)_{\mathrm{V0}=0}\right)\mathrm{V0}+\ ...$$

(%i23)
```
df_dt : at( ' diff( L( mod_v), mod_v), V0 = 0)· v. V0 / mod_v ;
```

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,\mathrm{mod}_v}\,L(\mathrm{mod}_v)\right)(v.\,\mathrm{V0})}{\mathrm{mod}_v}$$

(%i24)
```
df_dt : subst( diff( r, t), v, df_dt) ;
```

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,\mathrm{mod}_v}\,L(\mathrm{mod}_v)\right)\left(\frac{d}{dt}\,r.\,\mathrm{V0}\right)}{\mathrm{mod}_v}$$

(%i25)
```
depends( f, r) ;
```

$$[f(r)]$$

(%i26)
```
f : A. r ;
```

$$A.r$$

(%i27)
```
eq_L : diff( f, t) = df_dt ;
```

$$A.\frac{d}{dt}\,r=\frac{\left(\frac{d}{d\,\mathrm{mod}_v}\,L(\mathrm{mod}_v)\right)\left(\frac{d}{dt}\,r.\,\mathrm{V0}\right)}{\mathrm{mod}_v}$$

(%i28)
```
eq_L : A = ' diff( L( mod_v), mod_v)· V0 / mod_v ;
```

$$A=\frac{\mathrm{V0}\left(\frac{d}{d\,\mathrm{mod}_v}\,L(\mathrm{mod}_v)\right)}{\mathrm{mod}_v}$$

(%i29)
```
eq_L : %cte = ' diff( L( mod_v), mod_v) / mod_v ;
```

$$\%\mathrm{cte}=\frac{\frac{d}{d\,\mathrm{mod}_v}\,L(\mathrm{mod}_v)}{\mathrm{mod}_v}$$

(%i30)
```
ode2( eq_L, L( mod_v), mod_v) ;
```

$$L(\mathrm{mod}_v)=\frac{\%\mathrm{cte}\,{\mathrm{mod}_v}^2}{2}+\%\mathrm{c}$$

Created with wxMaxima.

Capítulo 23

Formulación Hamiltoniana

Ejercicio 3.6.1

(%i1) kill(all) ;

done

(%i1) declare([M, a, m, L, g], constant) ;

done

(%i2) depends([%Theta, %Phi], t) ;

$$[\Theta(t), \Phi(t)]$$

(%i3) depends([pT, pP], t) ;

$$[\mathrm{pT}\,(t), \mathrm{pP}\,(t)]$$

(%i4) Tv : M· a ^ 2· diff(%Theta, t) ^ 2 / 2 ;

$$\frac{Ma^2\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\right)^2}{2}$$

(%i5) depends([xM, yM],[%Theta, %Phi]) ;

$$[\mathrm{xM}\,(\,\Theta\,,\,\Phi\,), \mathrm{yM}\,(\,\Theta\,,\,\Phi\,)]$$

(%i7) xM : 2· a· cos(%Theta) + L· sin(%Phi) ;
yM : − L· cos(%Phi) ;

$$2a\cos\,(\,\Theta\,) + L\sin\,(\,\Phi\,)$$

$$-L\cos\,(\,\Phi\,)$$

(%i10) Tm : m·(diff(xM, t) ^ 2 + diff(yM, t) ^ 2) / 2 ;
Tm : expand(trigsimp(Tm)) ;
T : Tv + Tm ;

$$\frac{m\left(\left(L\cos\,(\,\Phi\,)\left(\frac{d}{dt}\,\Phi\right)-2a\sin\,(\,\Theta\,)\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\right)\right)^2+L^2\sin\,(\,\Phi\,)^2\left(\frac{d}{dt}\,\Phi\right)^2\right)}{2}$$

$$2a^2m\sin\,(\,\Theta\,)^2\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\,\right)^2-2La\cos\,(\,\Phi\,)\left(\frac{d}{dt}\,\Phi\,\right)\sin\,(\,\Theta\,)\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\,\right)+\frac{L^2m\left(\frac{d}{dt}\,\Phi\right)^2}{2}$$

$$2a^2m\sin\,(\,\Theta\,)^2\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\,\right)^2+\frac{Ma^2\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\right)^2}{2}-2La\cos\,(\,\Phi\,)\left(\frac{d}{dt}\,\Phi\,\right)\sin\,(\,\Theta\,)\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\,\right)+\frac{L^2m\left(\frac{d}{dt}\,\Phi\right)^2}{2}$$

(%i11) V : m· g· yM ;

$$-Lgm\cos\,(\,\Phi\,)$$

(%i12) Lagrangiano : T − V ;

$$2a^2m\sin\,(\,\Theta\,)^2\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\,\right)^2+\frac{Ma^2\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\right)^2}{2}-2La\cos\,(\,\Phi\,)\left(\frac{d}{dt}\,\Phi\,\right)\sin\,(\,\Theta\,)\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\,\right)+\frac{L^2m\left(\frac{d}{dt}\,\Phi\right)^2}{2}+Lgm\cos\,(\,\Phi\,)$$

(%i14) momentoT : diff(Lagrangiano, diff(%Theta, t)) ;

momentoP : diff(Lagrangiano, diff(%Phi, t)) ;

$$4a^2m\sin\,(\,\Theta\,)^2\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\,\right)+Ma^2\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\,\right)-2La\cos\,(\,\Phi\,)\left(\frac{d}{dt}\,\Phi\,\right)\sin\,(\,\Theta\,)$$

$$L^2m\left(\frac{d}{dt}\,\Phi\,\right)-2La\cos\,(\,\Phi\,)\sin\,(\,\Theta\,)\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\,\right)$$

(%i15) /· Segunda Parte ·/

/· construccion de la matriz A y su inversa . Definicion de momento y velocidad ·/

load(vect) ;

/usr/share/maxima/5.43.2/share/vector/vect.mac

(%i16) aTT : expand(ev(momentoT, diff(%Phi, t) = 0) / diff(%Theta, t)) ;

$$4a^2 m \sin(\Theta)^2 + Ma^2$$

(%i17) aTP : expand(ev(momentoT, diff(%Theta, t) = 0) / diff(%Phi, t)) ;

$$-2Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)$$

(%i18) aPT : expand(ev(momentoP, diff(%Phi, t) = 0) / diff(%Theta, t)) ;

$$-2Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)$$

(%i19) aPP : expand(ev(momentoP, diff(%Theta, t) = 0) / diff(%Phi, t)) ;

$$L^2 m$$

(%i20) matrizA : matrix([aTT, aTP],[aPT, aPP]) ;

$$\begin{pmatrix} 4a^2 m \sin(\Theta)^2 + Ma^2 & -2Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta) \\ -2Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta) & L^2 m \end{pmatrix}$$

(%i21) detA : trigsimp(determinant(matrizA)) ;

$$4L^2 a^2 m^2 \sin(\Phi)^2 \sin(\Theta)^2 + L^2 M a^2 m$$

(%i22) inversa_A : ratsimp(matrix([aPP, − aPT],[− aTP, aTT]) / detA) ;

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4a^2 m \sin(\Phi)^2 \sin(\Theta)^2 + Ma^2} & \frac{2\cos(\Phi)\sin(\Theta)}{4Lam\sin(\Phi)^2 \sin(\Theta)^2 + LMa} \\ \frac{2\cos(\Phi)\sin(\Theta)}{4Lam\sin(\Phi)^2 \sin(\Theta)^2 + LMa} & \frac{4m\sin(\Theta)^2 + M}{4L^2 m^2 \sin(\Phi)^2 \sin(\Theta)^2 + L^2 Mm} \end{pmatrix}$$

(%i24) velocidad : matrix([diff(%Theta, t)],[diff(%Phi, t)]) ;

momento : matrix([pT],[pP]) ;

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\,\Theta \\ \frac{d}{dt}\,\Phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{pT} \\ \mathrm{pP} \end{pmatrix}$$

(%i25) def_momento : momento = matrizA. velocidad ;

$$\begin{pmatrix} \mathrm{pT} \\ \mathrm{pP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(4a^2 m \sin(\Theta)^2 + Ma^2\right)\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\right) - 2Lam\cos(\Phi)\left(\frac{d}{dt}\,\Phi\right)\sin(\Theta) \\ L^2 m\left(\frac{d}{dt}\,\Phi\right) - 2Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)\left(\frac{d}{dt}\,\Theta\right) \end{pmatrix}$$

(%i27) /· Vel = inversa_A . momento ; ·/

Vel : matrix([(aPP· pT − aPT· pP) / detA],[(− aTP· pT + aTT· pP) / detA]) ;

/· velocidad ·/

def_velocidad : velocidad = Vel ;

$$\begin{pmatrix} \frac{L^2 m\,\mathrm{pT} + 2Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)\,\mathrm{pP}}{4L^2 a^2 m^2 \sin(\Phi)^2 \sin(\Theta)^2 + L^2 Ma^2 m} \\ \frac{2Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)\,\mathrm{pT} + \left(4a^2 m \sin(\Theta)^2 + Ma^2\right)\mathrm{pP}}{4L^2 a^2 m^2 \sin(\Phi)^2 \sin(\Theta)^2 + L^2 Ma^2 m} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\,\Theta \\ \frac{d}{dt}\,\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L^2 m\,\mathrm{pT} + 2Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)\,\mathrm{pP}}{4L^2 a^2 m^2 \sin(\Phi)^2 \sin(\Theta)^2 + L^2 Ma^2 m} \\ \frac{2Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)\,\mathrm{pT} + \left(4a^2 m \sin(\Theta)^2 + Ma^2\right)\mathrm{pP}}{4L^2 a^2 m^2 \sin(\Phi)^2 \sin(\Theta)^2 + L^2 Ma^2 m} \end{pmatrix}$$

(%i28) /· Tercera parte ·/
depends(Hamiltoniano,[%Theta, %Phi, pT, pP]) ;

$$[\text{Hamiltoniano}(\Theta, \Phi, pT, pP)]$$

(%i29) Hamiltoniano : ratsimp(factor(momento. Vel) / 2) + V ;

$$\frac{L^2 m\, pT^2 + 4Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)\, pP\, pT + \left(4a^2 m\sin(\Theta)^2 + Ma^2\right) pP^2}{8L^2a^2m^2\sin(\Phi)^2\sin(\Theta)^2 + 2L^2Ma^2m} - Lgm\cos(\Phi)$$

--> /· Ecuaciones de Hamilton ·/

dmomentoT_dt : − diff(Hamiltoniano, %Theta) ;
dmomentoP_dt : − diff(Hamiltoniano, %Phi) ;

$$\frac{16L^2a^2m^2\sin(\Phi)^2\cos(\Theta)\sin(\Theta)\left(L^2 m\, pT^2 + 4Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)\, pP\, pT + \left(4a^2 m\sin(\Theta)^2 + Ma^2\right) pP^2\right)}{\left(8L^2a^2m^2\sin(\Phi)^2\sin(\Theta)^2 + 2L^2Ma^2m\right)^2} - \frac{4Lam\cos(\Phi)\cos(\Theta)\, pP\, pT + 8a^2 m\cos(\Theta)s}{8L^2a^2m^2\sin(\Phi)^2\sin(\Theta)^2 + 2L^2M}$$

$$\frac{16L^2a^2m^2\cos(\Phi)\sin(\Phi)\sin(\Theta)^2\left(L^2 m\, pT^2 + 4Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)\, pP\, pT + \left(4a^2 m\sin(\Theta)^2 + Ma^2\right) pP^2\right)}{\left(8L^2a^2m^2\sin(\Phi)^2\sin(\Theta)^2 + 2L^2Ma^2m\right)^2} + \frac{4Lam\sin(\Phi)\sin(\Theta)\, pP\, pT}{8L^2a^2m^2\sin(\Phi)^2\sin(\Theta)^2 + 2L^2Ma^2m} -$$

(%i33) dTheta_dt : diff(Hamiltoniano, pT) ;

dPhi_dt : diff(Hamiltoniano, pP) ;

$$\frac{2L^2 m\, pT + 4Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)\, pP}{8L^2a^2m^2\sin(\Phi)^2\sin(\Theta)^2 + 2L^2Ma^2m}$$

$$\frac{4Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)\, pT + 2\left(4a^2 m\sin(\Theta)^2 + Ma^2\right) pP}{8L^2a^2m^2\sin(\Phi)^2\sin(\Theta)^2 + 2L^2Ma^2m}$$

(%i34) /· Comprobación H = E ·/

E : T + V ;

$$2a^2 m\sin(\Theta)^2\left(\frac{d}{dt}\Theta\right)^2 + \frac{Ma^2\left(\frac{d}{dt}\Theta\right)^2}{2} - 2Lam\cos(\Phi)\left(\frac{d}{dt}\Phi\right)\sin(\Theta)\left(\frac{d}{dt}\Theta\right) + \frac{L^2 m\left(\frac{d}{dt}\Phi\right)^2}{2} - Lgm\cos(\Phi)$$

(%i36) E : subst(Vel[1, 1], diff(%Theta, t), E) ;

E : subst(Vel[2, 1], diff(%Phi, t), E) ;

$$\frac{2a^2 m\sin(\Theta)^2\left(L^2 m\, pT + 2Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)\, pP\right)^2}{\left(4L^2a^2m^2\sin(\Phi)^2\sin(\Theta)^2 + L^2Ma^2m\right)^2} + \frac{Ma^2\left(L^2 m\, pT + 2Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)\, pP\right)^2}{2\left(4L^2a^2m^2\sin(\Phi)^2\sin(\Theta)^2 + L^2Ma^2m\right)^2} - \frac{2Lam\cos(\Phi)\left(\frac{d}{dt}\Phi\right)\sin(\Theta)\left(L^2 m\, pT + 2Lam\cos\right.}{4L^2a^2m^2\sin(\Phi)^2\sin(\Theta)^2 + L^2Ma}$$

$$\frac{L^2 m\left(2Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)\, pT + \left(4a^2 m\sin(\Theta)^2 + Ma^2\right) pP\right)^2}{2\left(4L^2a^2m^2\sin(\Phi)^2\sin(\Theta)^2 + L^2Ma^2m\right)^2} + \frac{2a^2 m\sin(\Theta)^2\left(L^2 m\, pT + 2Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)\, pP\right)^2}{\left(4L^2a^2m^2\sin(\Phi)^2\sin(\Theta)^2 + L^2Ma^2m\right)^2} + \frac{Ma^2\left(L^2 m\, pT + 2Lam\cos(\Phi)s\right.}{2\left(4L^2a^2m^2\sin(\Phi)^2\sin(\Theta)^2 +\right.}$$

(%i37) trigsimp(Hamiltoniano − E) ;

$$0$$

(%i38) /· Comprobación H = cte ·/

dH_dt : diff(Hamiltoniano, t) ;

$$\frac{2L^2 m\, pT\left(\frac{d}{dt}pT\right) + 4Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)\, pP\left(\frac{d}{dt}pT\right) + 4Lam\cos(\Phi)\sin(\Theta)\left(\frac{d}{dt}pP\right) pT + 4Lam\cos(\Phi)\cos(\Theta)\left(\frac{d}{dt}\Theta\right) pP\, pT - 4Lam\sin(\Phi)\left(\frac{d}{dt}\Phi\right)\sin(\Theta)\, p}{8L^2a^2m^2\sin(\Phi)^2\sin(\Theta)^2 + 2L^2Ma^2m}$$

--> dH_dt : subst(dTheta_dt, diff(%Theta, t), dH_dt) $
dH_dt : subst(dPhi_dt, diff(%Phi, t), dH_dt) $
dH_dt : subst(dmomentoT_dt, diff(pT, t), dH_dt) $
dH_dt : expand(subst(dmomentoP_dt, diff(pP, t), dH_dt)) ;

$$0$$

Created with wxMaxima.

Ejercicio 3.6.2

(%i1) kill(all) ;

done

(%i1) declare([A, B, C], constant) ;

done

(%i2) depends([p, q], t) ;

$$[p(t), q(t)]$$

(%i3) depends(H,[p, q, t]) ;

$$[H(p, q, t)]$$

(%i4) H : p ^ 2 /(2· A) − B· q· p· %e ^(− A· t) + q ^ 2 / 2·(C + A· B· %e ^(− A· t)·(A + B· %e ^(− A· t))) ;

$$\frac{q^2\left(AB\,\%e^{-At}\left(B\,\%e^{-At}+A\right)+C\right)}{2}-Bpq\,\%e^{-At}+\frac{p^2}{2A}$$

(%i5) dq_dt : diff(H, p) ;

$$\frac{p}{A}-Bq\,\%e^{-At}$$

(%i6) momento : rhs(solve(dq_dt = diff(q, t), p)[1]) ;

$$\%e^{-At}\left(A\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\%e^{At}+ABq\right)$$

(%i7) L : diff(q, t)· momento − H ;

$$\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\%e^{-At}\left(A\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\%e^{At}+ABq\right)-\frac{q^2\left(AB\,\%e^{-At}\left(B\,\%e^{-At}+A\right)+C\right)}{2}+Bpq\,\%e^{-At}-\frac{p^2}{2A}$$

(%i8) L : expand(subst(momento, p, L)) ;

$$ABq\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\%e^{-At}-\frac{A^2Bq^2\,\%e^{-At}}{2}+\frac{A\left(\frac{d}{dt}\,q\right)^2}{2}-\frac{Cq^2}{2}$$

(%i10) /· nuevo lagrangiano ·/

depends(f,[q, t]) ;

Lp : L + ' diff(f, t) ;

$$[f(q, t)]$$

$$ABq\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\%e^{-At}-\frac{A^2Bq^2\,\%e^{-At}}{2}+\frac{A\left(\frac{d}{dt}\,q\right)^2}{2}-\frac{Cq^2}{2}+\frac{d}{dt}\,f$$

(%i11) df_dt : − A· B· q· diff(q, t)· %e ^(− A· t) + A ^ 2· B· q ^ 2· %e ^(− A· t) / 2 ;

$$\frac{A^2Bq^2\,\%e^{-At}}{2}-ABq\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\%e^{-At}$$

(%i12) u : q ^ 2· %e ^(− A· t) ;

$$q^2\,\%e^{-At}$$

(%i13) diff(u, t) ;

$$2q\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\%e^{-At}-Aq^2\,\%e^{-At}$$

(%i14) dq_dt : rhs(solve(du_dt = 2· q·(diff(q, t, 1))· %e ^(− A· t) − A· q ^ 2· %e ^(− A· t), diff(q, t))[1]) ;

$$\frac{du_dt\,\%e^{At}+Aq^2}{2q}$$

(%i15) expand(subst(dq_dt, diff(q, t), df_dt)) ;

$$-\frac{AB\,\mathrm{du_dt}}{2}$$

(%i16) f : − A· B· u / 2 ;

$$-\frac{ABq^2\,\%\mathrm{e}^{-At}}{2}$$

(%i17) Lp : L + diff(f, t) ;

$$\frac{A\left(\frac{d}{dt}q\right)^2}{2}-\frac{Cq^2}{2}$$

(%i18) /· nuevo hamiltoniano ·/

momento : diff(Lp, diff(q, t)) ;

$$A\left(\frac{d}{dt}q\right)$$

(%i19) dq_dt : rhs(solve(momento = p, diff(q, t))[1]) ;

$$\frac{p}{A}$$

(%i20) Hp : p· dq_dt − Lp ;

$$-\frac{A\left(\frac{d}{dt}q\right)^2}{2}+\frac{Cq^2}{2}+\frac{p^2}{A}$$

(%i21) Hp : subst(dq_dt, diff(q, t), Hp) ;

$$\frac{Cq^2}{2}+\frac{p^2}{2A}$$

(%i22) Hp − expand(H) ;

$$-\frac{A^2Bq^2\,\%\mathrm{e}^{-At}}{2}+Bpq\,\%\mathrm{e}^{-At}-\frac{AB^2q^2\,\%\mathrm{e}^{-2At}}{2}$$

Created with wxMaxima.

Ejercicio 3.6.3

(%i1) kill(all) ;

done

(%i1) depends([r, %theta], t) ;

$$[r(t), \theta(t)]$$

(%i2) declare([m1, m2, l, g], constant) ;

done

(%i4) T1 : m1·(diff(r, t) ^ 2 + r ^ 2· diff(%theta, t) ^ 2) / 2 ;

V1 : 0 ;

$$\frac{\mathrm{m1}\left(\left(\frac{d}{dt}\,r\right)^2+\left(\frac{d}{dt}\,\theta\right)^2 r^2\right)}{2}$$

$$0$$

(%i5) T2 : m2· diff(r, t) ^ 2 / 2 ;

$$\frac{\mathrm{m2}\left(\frac{d}{dt}\,r\right)^2}{2}$$

(%i6) depends(z2, r) ;

$$[\mathrm{z2}\,(r)]$$

(%i8) z2 : l − r ;

V2 : − m2· g· z2 ;

$$l-r$$

$$-g\,\mathrm{m2}\,(l-r)$$

(%i9) L : expand(T1 + T2 − V1 − V2) ;

$$\frac{\mathrm{m2}\left(\frac{d}{dt}\,r\right)^2}{2}+\frac{\mathrm{m1}\left(\frac{d}{dt}\,r\right)^2}{2}+\frac{\mathrm{m1}\left(\frac{d}{dt}\,\theta\right)^2 r^2}{2}-g\,\mathrm{m2}\,r+gl\,\mathrm{m2}$$

(%i12) /· Hamiltoniano ·/

depends([pR, pT], t) ;

momentoR : diff(L, diff(r, t)) ;

momentoT : diff(L, diff(%theta, t)) ;

$$[\mathrm{pR}\,(t), \mathrm{pT}\,(t)]$$

$$\mathrm{m2}\left(\frac{d}{dt}\,r\right)+\mathrm{m1}\left(\frac{d}{dt}\,r\right)$$

$$\mathrm{m1}\left(\frac{d}{dt}\;\theta\;\right)r^2$$

(%i14) dr_dt : rhs(solve(momentoR = pR, diff(r, t))[1]) ;

dtheta_dt : rhs(solve(momentoT = pT, diff(%theta, t))[1]) ;

$$\frac{\mathrm{pR}}{\mathrm{m2}+\mathrm{m1}}$$

$$\frac{\mathrm{pT}}{\mathrm{m1}\,r^2}$$

(%i15) H : pR· dr_dt + pT· dtheta_dt − L ;

$$-\frac{\mathrm{m2}\left(\frac{d}{dt}\,r\right)^2}{2}-\frac{\mathrm{m1}\left(\frac{d}{dt}\,r\right)^2}{2}-\frac{\mathrm{m1}\left(\frac{d}{dt}\,\theta\right)^2 r^2}{2}+g\,\mathrm{m2}\,r+\frac{\mathrm{pT}^2}{\mathrm{m1}\,r^2}+\frac{\mathrm{pR}^2}{\mathrm{m2}+\mathrm{m1}}-gl\,\mathrm{m2}$$

(%i17) H : subst(dr_dt, diff(r, t), H) $

H : subst(dtheta_dt, diff(%theta, t), H) $

(%i18) H ;

$$g\,\mathrm{m2}\,r+\frac{\mathrm{pT}^2}{2\,\mathrm{m1}\,r^2}+\frac{\mathrm{pR}^2}{\mathrm{m2}+\mathrm{m1}}-\frac{\mathrm{m2}\,\mathrm{pR}^2}{2(\mathrm{m2}+\mathrm{m1})^2}-\frac{\mathrm{m1}\,\mathrm{pR}^2}{2(\mathrm{m2}+\mathrm{m1})^2}-gl\,\mathrm{m2}$$

(%i19) factor(pR ^ 2 /(m2 + m1) −(m2· pR ^ 2) /(2·(m2 + m1) ^ 2) −(m1· pR ^ 2) /(2·(m2 + m1) ^ 2)) ;

$$\frac{\mathrm{pR}^2}{2(\mathrm{m2}+\mathrm{m1})}$$

(%i23) /· Ecuaciones de Hamilton ·/

dpR_dt : − diff(H, r) ;

dr_dt : factor(diff(H, pR)) ;

dpT_dt : − diff(H, %theta) ;

dtheta_dt : diff(H, pT) ;

$$\frac{\mathrm{pT}^2}{\mathrm{m1}\,r^3}-g\,\mathrm{m2}$$

$$\frac{\mathrm{pR}}{\mathrm{m2}+\mathrm{m1}}$$

$$0$$

$$\frac{\mathrm{pT}}{\mathrm{m1}\,r^2}$$

(%i29) /· commprobación H = cte ·/

dH_dt : diff(H, t) ;

dH_dt : subst(dpR_dt, diff(pR, t), dH_dt) $

dH_dt : subst(dpT_dt, diff(pT, t), dH_dt) $

dH_dt : subst(dr_dt, diff(r, t), dH_dt) $

dH_dt : subst(dtheta_dt, diff(%theta, t), dH_dt) $

ratsimp(dH_dt) ;

$$-\frac{\mathrm{pT}^2\left(\frac{d}{dt}\,r\right)}{\mathrm{m1}\,r^3}+g\,\mathrm{m2}\left(\frac{d}{dt}\,r\right)+\frac{\mathrm{pT}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{pT}\right)}{\mathrm{m1}\,r^2}+\frac{2\,\mathrm{pR}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{pR}\right)}{\mathrm{m2}+\mathrm{m1}}-\frac{\mathrm{m2}\,\mathrm{pR}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{pR}\right)}{(\mathrm{m2}+\mathrm{m1})^2}-\frac{\mathrm{m1}\,\mathrm{pR}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{pR}\right)}{(\mathrm{m2}+\mathrm{m1})^2}$$

$$0$$

(%i30) /· Lz = cte ·/

eq_pT : ode2(dpT_dt = diff(pT, t), pT, t) ;

$$\mathrm{pT}=\%\mathrm{c}$$

(%i31) ev(eq_pT, %c = pT0) ;

$$\mathrm{pT}=\mathrm{pT0}$$

(%i32) /· solucion por cuadraturas ·/

E : expand(T1 + T2 + V1 + V2) ;

$$\frac{\mathrm{m2}\left(\frac{d}{dt}\,r\right)^2}{2}+\frac{\mathrm{m1}\left(\frac{d}{dt}\,r\right)^2}{2}+\frac{\mathrm{m1}\left(\frac{d}{dt}\,\theta\right)^2 r^2}{2}+g\,\mathrm{m2}\,r-gl\,\mathrm{m2}$$

(%i33)
```
E : subst( pT /( m1· r ^ 2), diff( %theta, t, 1), E) ;
```

$$\frac{\mathrm{m2}\left(\frac{d}{dt}\,r\right)^2}{2}+\frac{\mathrm{m1}\left(\frac{d}{dt}\,r\right)^2}{2}+g\,\mathrm{m2}\,r+\frac{\mathrm{pT}^2}{2\,\mathrm{m1}\,r^2}-gl\,\mathrm{m2}$$

(%i34)
```
E : ev( E, pT = pT0) ;
```

$$\frac{\mathrm{m2}\left(\frac{d}{dt}\,r\right)^2}{2}+\frac{\mathrm{m1}\left(\frac{d}{dt}\,r\right)^2}{2}+g\,\mathrm{m2}\,r+\frac{\mathrm{pT0}^2}{2\,\mathrm{m1}\,r^2}-gl\,\mathrm{m2}$$

(%i35)
```
/· solucion r ( t ) ·/ ;

declare( E0, constant) ;
```

done

(%i36)
```
eq_mov_r : solve( E = E0, diff( r, t)) ;
```

$$\left[\frac{d}{dt}\,r=-\frac{\sqrt{-\frac{2g\,\mathrm{m1}\,\mathrm{m2}\,r^3}{\mathrm{m1}\,\mathrm{m2}+\mathrm{m1}^2}+\frac{2gl\,\mathrm{m1}\,\mathrm{m2}\,r^2}{\mathrm{m1}\,\mathrm{m2}+\mathrm{m1}^2}+\frac{2\,\mathrm{E0}\,\mathrm{m1}\,r^2}{\mathrm{m1}\,\mathrm{m2}+\mathrm{m1}^2}-\frac{\mathrm{pT0}^2}{\mathrm{m1}\,\mathrm{m2}+\mathrm{m1}^2}}}{r},\ \frac{d}{dt}\,r=\frac{\sqrt{-\frac{2g\,\mathrm{m1}\,\mathrm{m2}\,r^3}{\mathrm{m1}\,\mathrm{m2}+\mathrm{m1}^2}+\frac{2gl\,\mathrm{m1}\,\mathrm{m2}\,r^2}{\mathrm{m1}\,\mathrm{m2}+\mathrm{m1}^2}+\frac{2\,\mathrm{E0}\,\mathrm{m1}\,r^2}{\mathrm{m1}\,\mathrm{m2}+\mathrm{m1}^2}-\frac{\mathrm{pT0}^2}{\mathrm{m1}\,\mathrm{m2}+\mathrm{m1}}}}{r}\right]$$

(%i37)
```
ode2( eq_mov_r[ 1], r, t) ;
```

$$-\int\frac{r}{\sqrt{-\frac{2g\,\mathrm{m1}\,\mathrm{m2}\,r^3+(-2gl\,\mathrm{m1}\,\mathrm{m2}-2\,\mathrm{E0}\,\mathrm{m1})r^2+\mathrm{pT0}^2}{\mathrm{m1}\,\mathrm{m2}+\mathrm{m1}^2}}}\,dr=t+\%\mathrm{c}$$

(%i38)
```
/· solucion %theta ( t ) ·/

eq_mov_t : diff( %theta, t) = pT0 /( m1· r( t) ^ 2) ;
```

$$\frac{d}{dt}\ \theta=\frac{\mathrm{pT0}}{\mathrm{m1}\,r(t)^2}$$

(%i39)
```
ode2( eq_mov_t, %theta, t) ;
```

$$\theta=\frac{\mathrm{pT0}\int\frac{1}{r(t)^2}\,dt}{\mathrm{m1}}+\%\mathrm{c}$$

Created with wxMaxima.

Ejercicio 3.6.4

(%i1) kill(all) ;

done

(%i1) depends([q, qd, p, pd], t) ;

$$[q(t), \mathrm{qd}\,(t), p(t), \mathrm{pd}\,(t)]$$

(%i2) depends(L,[q, qd, t]) ;

$$[L(q, \mathrm{qd}, t)]$$

(%i3) depends(G,[qd, pd, t]) ;

$$[G(\mathrm{qd}, \mathrm{pd}, t)]$$

(%i6) G : q· pd − L(q, qd, t) ;
subst(diff(p, t), pd, %) ;
subst(diff(q, t), qd, %) ;

$$\mathrm{pd}\,q - L(q, \mathrm{qd}, t)$$

$$(\tfrac{d}{dt}\,p)q - L(q, \mathrm{qd}, t)$$

$$(\tfrac{d}{dt}\,p)q - L(q, \tfrac{d}{dt}\,q, t)$$

(%i53) dL : subst(0, del(t), diff(L)) $

dL : ' diff(L, t)· del(t) + dL $;
dL : subst(p, diff(L, qd), dL) $;
dL : subst(diff(q, t), qd, dL) ;

$$(\tfrac{d}{dt}\,L)\mathrm{del}\,(t) + p\mathrm{del}\,(\tfrac{d}{dt}\,q) + \left(\tfrac{d}{dq}\,L\right)\mathrm{del}\,(q)$$

(%i58) dG : q· del(pd) + pd· del(q) − dL $;
dG : subst(diff(p, t), pd, dG) ;

$$-(\tfrac{d}{dt}\,L)\mathrm{del}\,(t) - p\mathrm{del}\,(\tfrac{d}{dt}\,q) + (\tfrac{d}{dt}\,p)\mathrm{del}\,(q) - \left(\tfrac{d}{dq}\,L\right)\mathrm{del}\,(q) + q\mathrm{del}\,(\tfrac{d}{dt}\,p)$$

(%i59)
dG : subst(diff(p, t), diff(L, q), dG) ;

$$-(\tfrac{d}{dt}\,L)\mathrm{del}\,(t) - p\mathrm{del}\,(\tfrac{d}{dt}\,q) + q\mathrm{del}\,(\tfrac{d}{dt}\,p)$$

(%i62) /· Ecuaciones de Hamilton ·/

dG_dpdot : ev(dG,[del(t) = 0, del(diff(q, t)) = 0]) / del(diff(p, t)) ;

dG_dqdot : ev(dG,[del(t) = 0, del(diff(p, t)) = 0]) / del(diff(q, t)) ;

dG_dt : ev(dG,[del(diff(p, t)) = 0, del(diff(q, t)) = 0]) / del(t) ;

$$q$$

$$-p$$

$$-\tfrac{d}{dt}\,L$$

Created with wxMaxima.

Ejercicio 3.6.5

```
(%i1) kill( all) ;
```

done

```
(%i1) declare([ m, g], constant) ;
```

done

```
(%i2) depends([ p1, q1, p2, q2], t) ;
```

$$[\mathrm{p1}\,(t), \mathrm{q1}\,(t), \mathrm{p2}\,(t), \mathrm{q2}\,(t)]$$

```
(%i3) depends( H,[ p1, p2, q1, q2]) ;
```

$$[H(\mathrm{p1}, \mathrm{p2}, \mathrm{q1}, \mathrm{q2})]$$

```
(%i4) H : p1 ^ 2 /( 2· m) + p2 ^ 2 /( 2· m) + m· g· q2 ;
```

$$gm\,\mathrm{q2} + \frac{\mathrm{p2}^2}{2m} + \frac{\mathrm{p1}^2}{2m}$$

```
(%i8) /· Ecuaciones de Hamilton ·/

      dq1_dt : diff( H, p1) ;

      dq2_qt : diff( H, p2) ;

      dp1_dt : − diff( H, q1) ;

      dp2_dt : − diff( H, q2) ;
```

$$\frac{\mathrm{p1}}{m}$$

$$\frac{\mathrm{p2}}{m}$$

$$0$$

$$-gm$$

```
(%i9) depends( f,[ p1, p2, q1, q2, t]) ;
```

$$[f(\mathrm{p1}, \mathrm{p2}, \mathrm{q1}, \mathrm{q2}, t)]$$

```
(%i11) df : subst( 0, del( t), diff( f)) $

       df : df + ' diff( f, t)· del( t) ;
```

$$\left(\frac{d}{dt}\,f\right)\mathrm{del}\,(t) + \left(\frac{d}{d\,\mathrm{q2}}\,f\right)\mathrm{del}\,(\mathrm{q2}) + \left(\frac{d}{d\,\mathrm{q1}}\,f\right)\mathrm{del}\,(\mathrm{q1}) + \left(\frac{d}{d\,\mathrm{p2}}\,f\right)\mathrm{del}\,(\mathrm{p2}) + \left(\frac{d}{d\,\mathrm{p1}}\,f\right)\mathrm{del}\,(\mathrm{p1})$$

```
(%i16) df_dt : expand( df / del( t)) $

       df_dt : subst( dq1_dt· del( t), del( q1), df_dt) $

       df_dt : subst( dq2_qt· del( t), del( q2), df_dt) $

       df_dt : subst( dp1_dt· del( t), del( p1), df_dt) $

       df_dt : subst( dp2_dt· del( t), del( p2), df_dt) ;
```

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,\mathrm{q2}}\,f\right)\mathrm{p2}}{m} + \frac{\left(\frac{d}{d\,\mathrm{q1}}\,f\right)\mathrm{p1}}{m} + \frac{d}{dt}\,f - gm\left(\frac{d}{d\,\mathrm{p2}}\,f\right)$$

```
(%i17) /· determinación de constantes de movimiento ·/

       /· funcion de p1 ·/

       depends( h, p1) $
(%i18) dh_dt : ev( diff( h, q2)· p2 / m + diff( h, q1)· p1 / m + ' diff( h, t) − g· m· diff( h, p2), ' diff( h, t)
       = 0) ;
                                                0
(%i19) declare( %c1, constant) ;
                                              done
(%i21) /· función de q1 , p1 , t , sabiendo que p1 = cte ·/

       kill( h) ;

       depends( h,[ q1, p1, t]) ;
                                              done
                                          [h(q1, p1, t)]
(%i22) dh_dt : ev( diff( h, q2)· p2 / m + diff( h, q1)· p1 / m + ' diff( h, t) − g· m· diff( h, p2), p1 = %c1)
       ;
                                        d/dt h + %c1 (d/d q1 h) / m
(%i24) dh_dt : ev( diff( h, q2)· p2 / m + diff( h, q1)· p1 / m + diff( h, t) − g· m· diff( h, p2),[ h = q1 −
       %c1· t / m, p1 = %c1]) $

       dh_dt : ev( dh_dt, diff( q1, t) = 0) ;
                                                0
(%i26) /· funcion de p2 , t ·/

       kill( h) ;

       depends( h,[ p2, t]) ;
                                              done
                                          [h(p2, t)]
(%i27) dh_dt : ev( diff( h, q2)· p2 / m + diff( h, q1)· p1 / m + ' diff( h, t) − g· m· diff( h, p2), p1 = %c1)
       ;
                                          d/dt h − gm (d/d p2 h)
(%i29) dh_dt : ev( diff( h, q2)· p2 / m + diff( h, q1)· p1 / m + diff( h, t) − g· m· diff( h, p2),[ h = p2 +
       m· g· t, p1 = %c1]) $

       dh_dt : ev( dh_dt, diff( p2, t) = 0) ;
                                                0
(%i32) /· función de q2 , p2 , t ·/

       kill( h, F) ;

       depends( h,[ q2, p2, t]) ;

       depends( F,[ p2, t]) ;
                                              done
                                      [h(q2, p2, t)]
                                          [F(p2, t)]
```

(%i33) dh_dt : ev(diff(h, q2)· p2 / m + diff(h, q1)· p1 / m + ' diff(h, t) − g· m· diff(h, p2), p1 = %c1) ;

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,q2}\,h\right)\mathrm{p2}}{m}+\frac{d}{dt}\,h-gm\left(\frac{d}{d\,\mathrm{p2}}\,h\right)$$

(%i35) dh_dt : ev(diff(h, q2)· p2 / m + diff(h, q1)· p1 / m + diff(h, t) − g· m· diff(h, p2),[h = q2 + F, p1 = %c1]) $

dh_dt : ev(dh_dt,[diff(q2, t) = 0, diff(p2, t) = 0]) ;

$$\frac{\mathrm{p2}}{m}+\frac{d}{dt}\,F-gm\left(\frac{d}{d\,\mathrm{p2}}\,F\right)$$

(%i36) depends([A, B], t) ;

$$[A(t),B(t)]$$

(%i39) dh_dt : ev(dh_dt, F = A· p2 + B) $

dh_dt : ev(dh_dt, diff) $

dh_dt : ev(dh_dt, diff(p2, t) = 0) ;

$$\left(\frac{d}{dt}\,A\right)\mathrm{p2}+\frac{\mathrm{p2}}{m}+\frac{d}{dt}\,B-gmA$$

(%i41) dh_dt : ev(dh_dt,[A = − t / m, B = − g· t ^ 2 / 2]) $

dh_dt : ev(dh_dt, diff) ;

$$0$$

(%i43) /· solucion a la ecuacion de movimiento ·/

declare([%c1, %c2, %c3, %c4], constant) ;

eqs_mov :[%c1 = p1, %c2 = q1 − %c1· t / m, %c3 = p2 + m· g· t, %c4 = q2 − p2· t / m − g· t ^ 2 / 2] ;

done

$$[\%c1=\mathrm{p1},\%c2=\mathrm{q1}-\frac{\%c1\,t}{m},\%c3=gmt+\mathrm{p2},\%c4=-\frac{g{t}^{2}}{2}-\frac{\mathrm{p2}\,t}{m}+\mathrm{q2}]$$

(%i44) linsolve([eqs_mov[1], eqs_mov[2], eqs_mov[3], eqs_mov[4]], [q1, p1, q2, p2]) ;

$$[\mathrm{q1}=\frac{\%c1\,t+\%c2\,m}{m},\mathrm{p1}=\%c1,\mathrm{q2}=-\frac{gm{t}^{2}-2\,\%c3\,t-2\,\%c4\,m}{2m},\mathrm{p2}=\%c3-gmt]$$

(%i45) expand(%) ;

$$[\mathrm{q1}=\frac{\%c1\,t}{m}+\%c2,\mathrm{p1}=\%c1,\mathrm{q2}=-\frac{g{t}^{2}}{2}+\frac{\%c3\,t}{m}+\%c4,\mathrm{p2}=\%c3-gmt]$$

Created with wxMaxima.

Ejercicio 3.6.6

```
(%i1) kill( all) ;
```

done

```
(%i1) depends( x, t) ;
```

$$[x(t)]$$

```
(%i2) eq_mov : m· cosh( x) ^ 2· diff( x, t, 2) + m· diff( x, t, 1) ^ 2· sinh( x)· cosh( x) + m· g· senh( x) =
      0 ;
```

$$m\cosh(x)^2\left(\frac{d^2}{dt^2}x\right)+m\cosh(x)\sinh(x)\left(\frac{d}{dt}x\right)^2+gm\operatorname{senh}(x)=0$$

```
(%i4) depends( p, t) ;

      dx_dt : p / m ;
```

$$[p(t)]$$

$$\frac{p}{m}$$

```
(%i6) /· Ecuaciones de Hamilton ·/

      dx_dt : p / m $

      dH_dp : dx_dt ;
```

$$\frac{p}{m}$$

```
(%i9) eq : subst( dx_dt, diff( x, t), eq_mov) $

      dp_dt : rhs( solve( eq, diff( x, t, 2))[ 1]) $

      dH_dx : − dp_dt ;
```

$$\frac{p^2\cosh(x)\sinh(x)+gm^2\operatorname{senh}(x)}{m^2\cosh(x)^2}$$

```
(%i10) /· Resolucion de las ecuaciones de Hamilton ·/

       depends( H,[ x, p]) ;
```

$$[H(x,p)]$$

```
(%i11) ode2( diff( H, p) = dH_dp, H, p) ;
```

$$H=\frac{p^2}{2m}+\%c$$

```
(%i12) H : p ^ 2 /( 2· m) + g( x) ;
```

$$g(x)+\frac{p^2}{2m}$$

```
(%i13) ode2( diff( H, x) = dH_dx, g, x) ;
```

$$\frac{d}{dx}g(x)=\frac{p^2\cosh(x)\sinh(x)+gm^2\operatorname{senh}(x)}{m^2\cosh(x)^2}$$

not a proper differential equation

false

```
--> ;
(%i15) eq : diff( H, x) + diff( p, t) = 0 $

       eq : ev( eq, diff( H, p) = 0) ;
```

$$\frac{d}{dx}g(x)+\frac{d}{dt}p=0$$

(%i16) eq_mov ;

$$m\cosh(x)^2\left(\frac{d^2}{dt^2}x\right)+m\cosh(x)\sinh(x)\left(\frac{d}{dt}x\right)^2+gm\operatorname{senh}(x)=0$$

(%i17) /· Resolucion ·/

ode2(diff(p, diff(x, t)) = m· cosh(x) ^ 2, p, diff(x, t)) ;

$$0=m\cosh(x)^2$$

not a proper differential equation

false

(%i19) dx_dt : rhs(solve(p = m· cosh(x) ^ 2· diff(x, t, 1), diff(x, t, 1))[1]) $

dH_dp : dx_dt ;

$$\frac{p}{m\cosh(x)^2}$$

(%i20) ode2(diff(H, p) = dH_dp, H, p) ;

$$\frac{p}{m}=\frac{p}{m\cosh(x)^2}$$

not a proper differential equation

false

(%i21) depends(f, x) ;

$$[f(x)]$$

(%i22) H : p ^ 2 /(2· m· cosh(x) ^ 2) + f(x) ;

$$\frac{p^2}{2m\cosh(x)^2}+f(x)$$

(%i23) d2x_dt2 : rhs(solve(eq_mov, diff(x, t, 2))[1]) ;

$$-\frac{\cosh(x)\sinh(x)\left(\frac{d}{dt}x\right)^2+g\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)^2}$$

(%i24) dp_dt : ev(dp_dt, p = m· cosh(x) ^ 2· diff(x, t)) ;

$$-\frac{m^2\cosh(x)^5\sinh(x)\left(\frac{d}{dt}x\right)^2+gm^2\operatorname{senh}(x)}{m^2\cosh(x)^2}$$

(%i26) dp_dt : diff(m· cosh(x) ^ 2·(diff(x, t, 1)), t) $

expand(ev(dp_dt, diff(x, t, 2) = d2x_dt2)) ;

$$m\cosh(x)\sinh(x)\left(\frac{d}{dt}x\right)^2-gm\operatorname{senh}(x)$$

--> dp_dt : − diff(H, x) $
dp_dt : ev(dp_dt, diff(p, x) = 0) $
dp_dt : ev(dp_dt, p = m· cosh(x) ^ 2·(diff(x, t, 1))) ;

$$m\cosh(x)\sinh(x)\left(\frac{d}{dt}x\right)^2-\frac{d}{dx}f(x)$$

(%i30) /· Solucion para f (x) ·/

df_dx : m· g· sinh(x) ;

$$gm\sinh(x)$$

(%i31) ode2(diff(f, x) = df_dx, f, x) ;

$$f=gm\cosh(x)+\%c$$

(%i32) H : p ^ 2 /(2· m· cosh(x) ^ 2) + g· m· cosh(x) ;

$$gm\cosh(x)+\frac{p^2}{2m\cosh(x)^2}$$

Created with wxMaxima.

Ejercicio 3.8.1

(%i1) kill(all) ;

done

(%i1) depends(q, t) ;

$$[q(t)]$$

(%i2) declare(%omega, constant) ;

done

(%i3) L : m / 2·((diff(q, t)· sin(%omega· t) + %omega· q· cos(%omega· t)) ^ 2 +(%omega· q· sin(%omega· t)) ^ 2) ;

$$\frac{m\left(\left(\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\sin\left(\omega\,t\right)+\omega\,q\cos\left(\omega\,t\right)\right)^{2}+\omega^{2}\,q^{2}\sin\left(\omega\,t\right)^{2}\right)}{2}$$

(%i4) momento : diff(L, diff(q, t)) ;

$$m\sin\left(\omega\,t\right)\left(\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\sin\left(\omega\,t\right)+\omega\,q\cos\left(\omega\,t\right)\right)$$

(%i5) depends(p, t) ;

$$[p(t)]$$

(%i6) vel : rhs(solve(momento = p, diff(q, t))[1]) ;

$$-\frac{\omega\,m q\cos\left(\omega\,t\right)\sin\left(\omega\,t\right)-p}{m\sin\left(\omega\,t\right)^{2}}$$

(%i8) H : p· vel − L ;

H : expand(subst(vel, diff(q, t), H)) ;

$$-\frac{m\left(\left(\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\sin\left(\omega\,t\right)+\omega\,q\cos\left(\omega\,t\right)\right)^{2}+\omega^{2}\,q^{2}\sin\left(\omega\,t\right)^{2}\right)}{2}-\frac{p\left(\omega\,m q\cos\left(\omega\,t\right)\sin\left(\omega\,t\right)-p\right)}{m\sin\left(\omega\,t\right)^{2}}$$

$$-\frac{\omega^{2}\,m q^{2}\sin\left(\omega\,t\right)^{2}}{2}-\frac{\omega\,p q\cos\left(\omega\,t\right)}{\sin\left(\omega\,t\right)}+\frac{p^{2}}{2m\sin\left(\omega\,t\right)^{2}}$$

(%i10) /· Ecuaciones de Hamilton ·/

dp_dt : − diff(H, q) ;

dq_dt : diff(H, p) ;

$$\omega^{2}\,m q\sin\left(\omega\,t\right)^{2}+\frac{\omega\,p\cos\left(\omega\,t\right)}{\sin\left(\omega\,t\right)}$$

$$\frac{p}{m\sin\left(\omega\,t\right)^{2}}-\frac{\omega\,q\cos\left(\omega\,t\right)}{\sin\left(\omega\,t\right)}$$

(%i11) /· comprobación H no cte ·/

dH_dt : diff(H, t) ;

$$-\omega^{2}\,m q\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\sin\left(\omega\,t\right)^{2}-\omega^{3}\,m q^{2}\cos\left(\omega\,t\right)\sin\left(\omega\,t\right)-\frac{\omega\,p\left(\frac{d}{dt}\,q\right)\cos\left(\omega\,t\right)}{\sin\left(\omega\,t\right)}-\frac{\omega\left(\frac{d}{dt}\,p\right)q\cos\left(\omega\,t\right)}{\sin\left(\omega\,t\right)}+\frac{\omega^{2}\,p q\cos\left(\omega\,t\right)^{2}}{\sin\left(\omega\,t\right)^{2}}+\frac{p\left(\frac{d}{dt}\,p\right)}{m\sin\left(\omega\,t\right)^{2}}-\frac{\omega\,p^{2}\cos\left(\omega\,t\right.}{m\sin\left(\omega\,t\right.}$$

(%i14) dH_dt : subst(dq_dt, diff(q, t), dH_dt) $

dH_dt : subst(dp_dt, diff(p, t), dH_dt) $

factor(dH_dt) ;

$$-\frac{\omega\left(\omega\,m q\cos\left(\omega\,t\right)\sin\left(\omega\,t\right)-p\right)\left(\omega\,m q\sin\left(\omega\,t\right)^{3}-p\cos\left(\omega\,t\right)\right)}{m\sin\left(\omega\,t\right)^{3}}$$

(%i15) depends(Q, t) ;

$$[Q(t)]$$

(%i16) q : Q / sin(%omega· t) ;

$$\frac{Q}{\sin(\omega\, t)}$$

(%i17) diff(q, t) ;

$$\frac{\frac{d}{dt}\,Q}{\sin(\omega\, t)}-\frac{\omega\, Q\cos(\omega\, t)}{\sin(\omega\, t)^2}$$

(%i18) L : m / 2·((diff(q, t)· sin(%omega· t) + %omega· q· cos(%omega· t)) ^ 2 +(%omega· q· sin(%omega· t)) ^ 2) ;

$$\frac{m\left(\left(\left(\frac{d}{dt}\,Q\right)\sin(\omega\, t)+\frac{\omega\, Q\cos(\omega\, t)}{\sin(\omega\, t)}\right)^2+\omega^2\, Q^2\right)}{2}$$

(%i19) L : expand(L) ;

$$\frac{\left(\frac{d}{dt}\,Q\right)^2 m}{2}+\frac{\omega^2\, Q^2 m}{2}$$

(%i20) momentoQ : diff(L, diff(Q, t)) ;

$$\left(\frac{d}{dt}\,Q\right)m$$

(%i21) depends(P, t) ;

$$[P(t)]$$

(%i22) velQ : rhs(solve(momentoQ = P, diff(Q, t))[1]) ;

$$\frac{P}{m}$$

(%i24) HQ : velQ· P − L ;

HQ : expand(subst(velQ, diff(Q, t), HQ)) ;

$$-\frac{\left(\frac{d}{dt}\,Q\right)^2 m}{2}-\frac{\omega^2\, Q^2 m}{2}+\frac{P^2}{m}$$

$$\frac{P^2}{2m}-\frac{\omega^2\, Q^2 m}{2}$$

(%i26) /· Ecuaciones de Hamilton ·/

dP_dt : − diff(HQ, Q) ;

dQ_dt : diff(HQ, P) ;

$$\omega^2\, Q m$$

$$\frac{P}{m}$$

(%i27) /· comprobacion HQ = cte ·/

dHQ_dt : diff(HQ, t) ;

$$\frac{P\left(\frac{d}{dt}\,P\right)}{m}-\omega^2\, Q\left(\frac{d}{dt}\,Q\right)m$$

(%i30) dHQ_dt : subst(dQ_dt, diff(Q, t), dHQ_dt) $

dHQ_dt : subst(dP_dt, diff(P, t), dHQ_dt) $

factor(dHQ_dt) ;

$$0$$

Created with wxMaxima.

Capítulo 24

Transformaciones canónicas

Pendiente de desarrollo.

Capítulo 25

Corchetes de Poisson

Ejercicio 4.7.1

(%i1) kill(all) ;

done

(%i1) /· Función generadora de tipo 1 ·/

depends([p, P],[q, Q]) ;

$$[p(q,Q),P(q,Q)]$$

(%i3) dp : diff(p) ;

dP : diff(P) ;

$$\left(\frac{d}{dq}p\right)\mathrm{del}\,(q)+\left(\frac{d}{dQ}p\right)\mathrm{del}\,(Q)$$

$$\left(\frac{d}{dq}P\right)\mathrm{del}\,(q)+\left(\frac{d}{dQ}P\right)\mathrm{del}\,(Q)$$

(%i4) kill(p, P) ;

done

(%i5) depends([Q, P],[q, p]) ;

$$[Q(q,p),P(q,p)]$$

(%i6) corchetePQ : dQ_dq· dP_dp − dQ_dp· dP_dq ;

$$\mathrm{dP_dp}\,\mathrm{dQ_dq}-\mathrm{dP_dq}\,\mathrm{dQ_dp}$$

(%i8) sol : solve(dp = 0, del(Q)) $

dQ_dq : rhs(sol[1]) / del(q) ;

$$-\frac{\frac{d}{dq}p}{\frac{d}{dQ}p}$$

(%i9) dP_dp : ev(dP, del(q) = 0) / ev(dp, del(q) = 0) ;

$$\frac{\frac{d}{dQ}P}{\frac{d}{dQ}p}$$

(%i11) dp_dQ : ev(dp, del(q) = 0) / del(Q) ;

dQ_dp : 1 / dp_dQ ;

$$\frac{d}{dQ}p$$

$$\frac{1}{\frac{d}{dQ}p}$$

(%i14) sol : solve(dp = 0, del(q)) $

dP_dq : ev(dP, del(q) = rhs(sol[1])) / del(q) $

dP_dq : ev(expand(dP_dq), del(Q) = dQ_dq· del(q)) ;

$$\frac{d}{dq}P-\frac{\left(\frac{d}{dQ}P\right)\left(\frac{d}{dq}p\right)}{\frac{d}{dQ}p}$$

(%i15) corchetePQ : expand(ev(corchetePQ)) ;

$$-\frac{\frac{d}{dq}P}{\frac{d}{dQ}p}$$

(%i17) /· Función generadora de tipo 1 ·/

kill(Q) ;

```
depends( F1,[ q, Q]) ;
```

$$\text{done}$$

$$[\mathrm{F1}\,(q, Q)]$$

```
(%i19) p : diff( F1, q) ;
```

```
P : - diff( F1, Q) ;
```

$$\frac{d}{dq}\,\mathrm{F1}$$

$$-\frac{d}{dQ}\,\mathrm{F1}$$

```
(%i20) corchetePQ : ev( corchetePQ) ;
```

$$-\frac{\frac{d}{dq}\left(-\frac{d}{dQ}\,\mathrm{F1}\right)}{\frac{d^2}{dQ\,dq}\,\mathrm{F1}}$$

```
(%i21) ev( corchetePQ, diff) ;
```

$$1$$

Created with wxMaxima.

Ejercicio 4.7.2

```
(%i1) kill( all) ;
```

done

```
(%i1) declare([ a, b], constant) ;
```

done

```
(%i2) depends( H,[ q1, q2, p1, p2]) ;
```

$$[H(\mathrm{q1},\mathrm{q2},\mathrm{p1},\mathrm{p2})]$$

```
(%i3) H : q1· p1 − q2· p2 − a· q1 ^ 2 + b· q2 ^ 2 ;
```

$$b\,\mathrm{q2}^2-\mathrm{p2}\,\mathrm{q2}-a\,\mathrm{q1}^2+\mathrm{p1}\,\mathrm{q1}$$

```
(%i4) depends( f,[ q1, q2, p1, q2, t]) ;
```

$$[f(\mathrm{q1},\mathrm{q2},\mathrm{p1},t)]$$

```
(%i8) /· Apartado a . Ecuaciones de Hamilton ·/
      dq1_dt : diff( H, p1) ; dq2_dt : diff( H, p2) ;
      dp1_dt : − diff( H, q1) ; dp2_dt : − diff( H, q2) ;
```

$$\mathrm{q1}$$

$$-\mathrm{q2}$$

$$2a\,\mathrm{q1}-\mathrm{p1}$$

$$\mathrm{p2}-2b\,\mathrm{q2}$$

```
(%i13) df_dt : expand( diff( f) / diff( t)) $ ;
       df_dt : subst( dq1_dt· del( t), del( q1), df_dt) $ ; df_dt : subst( dq2_dt· del( t), del( q2), df_dt) $ ;
       df_dt : subst( dp1_dt· del( t), del( p1), df_dt) $ ; df_dt : subst( dp2_dt· del( t), del( p2), df_dt) ;
```

$$-\left(\tfrac{d}{d\,\mathrm{q2}}f\right)\mathrm{q2}+\left(\tfrac{d}{d\,\mathrm{p1}}f\right)(2a\,\mathrm{q1}-\mathrm{p1})+\left(\tfrac{d}{d\,\mathrm{q1}}f\right)\mathrm{q1}+\tfrac{d}{dt}f$$

```
(%i19) f1 : p2 − b· q2 / q1 $
       df1_dt : expand( diff( f1) / diff( t)) $ ;
       df1_dt : subst( dq1_dt· del( t), del( q1), df1_dt) $ ; df1_dt : subst( dq2_dt· del( t), del( q2),
       df1_dt) $ ;
       df1_dt : subst( dp1_dt· del( t), del( p1), df1_dt) $ ; df1_dt : subst( dp2_dt· del( t), del( p2),
       df1_dt) ;
```

$$\tfrac{2b\,\mathrm{q2}}{\mathrm{q1}}-2b\,\mathrm{q2}+\mathrm{p2}$$

```
(%i25) f2 : q2· %e ^ t $
       df2_dt : expand( diff( f2) / diff( t)) $ ;
       df2_dt : subst( dq1_dt· del( t), del( q1), df2_dt) $ ; df2_dt : subst( dq2_dt· del( t), del( q2),
       df2_dt) $ ;
       df2_dt : subst( dp1_dt· del( t), del( p1), df2_dt) $ ; df2_dt : subst( dp2_dt· del( t), del( p2),
       df2_dt) ;
```

$$0$$

```
(%i37) f3 : q1· %e ^( − t) $
       df3_dt : expand( diff( f2) / diff( t)) $ ;
       df3_dt : subst( dq1_dt· del( t), del( q1), df3_dt) $ ; df3_dt : subst( dq2_dt· del( t), del( q2),
       df3_dt) $ ;
       df3_dt : subst( dp1_dt· del( t), del( p1), df3_dt) $ ; df3_dt : subst( dp2_dt· del( t), del( p2),
       df3_dt) ;
```

$$0$$

```
(%i43) /· la última constante es el propio hamiltoniano ·/
       dH_dt : expand( diff( H) / diff( t)) $ ;
       dH_dt : subst( dq1_dt· del( t), del( q1), dH_dt) $ ; dH_dt : subst( dq2_dt· del( t), del( q2),
```

```
dH_dt) $ ;
dH_dt : subst( dp1_dt· del( t), del( p1), dH_dt) $ ; dH_dt : subst( dp2_dt· del( t), del( p2),
dH_dt) $ ;
expand( %) ;
```

$$0$$

```
--> /· Apartado b . Corchetes de Poisson ·/ ;
```

```
(%i44) corcheteH( f) : = diff( f, q1)· diff( H, p1) + diff( f, q2)· diff( H, p2) − diff( f, p1)· diff( H, q1) −
       diff( f, p2)· diff( H, q2) ;
```

$$\text{corcheteH}\,(f) := \left(\frac{d}{d\,\text{q1}}\,f\right)\left(\frac{d}{d\,\text{p1}}\,H\right) + \left(\frac{d}{d\,\text{q2}}\,f\right)\left(\frac{d}{d\,\text{p2}}\,H\right) + \left(-\frac{d}{d\,\text{p1}}\,f\right)\left(\frac{d}{d\,\text{q1}}\,H\right) + \left(-\frac{d}{d\,\text{p2}}\,f\right)\left(\frac{d}{d\,\text{q2}}\,H\right)$$

```
(%i45) df_dt( f) : = diff( f, t) + corcheteH( f) ;
```

$$\text{df_dt}\,(f) := \frac{d}{dt}\,f + \text{corcheteH}\,(f)$$

```
(%i47) f1 : p2 − b· q2 / q1 $

       df_dt( f1) ;
```

$$\frac{2\,b\,\text{q2}}{\text{q1}} - 2\,b\,\text{q2} + \text{p2}$$

```
(%i49) f2 : q2· %e ^ t $

       df_dt( f2) ;
```

$$0$$

```
(%i51) f3 : q1· %e ^( − t) $

       df_dt( f3) ;
```

$$0$$

```
(%i52) /· la última constante es el propio hamiltoniano ·/

       df_dt( H) ;
```

$$0$$

```
--> /· Apartado c . Constantes del movimiento ·/ ;
```

```
(%i56) depends( K1,[ q1, q2]) ; depends( K2,[ q1, q2]) ; depends( K,[ q1, q2]) ;
       varphi : K1· p1 + K2· p2 + K ;
```

$$[\text{K1}\,(\text{q1}, \text{q2})]$$

$$[\text{K2}\,(\text{q1}, \text{q2})]$$

$$[K(\text{q1}, \text{q2})]$$

$$\text{K2}\,\text{p2} + \text{K1}\,\text{p1} + K$$

```
(%i58) corcheteH( varphi) $ ;
       ec0 : expand( %) ;
```

$$-\left(\frac{d}{d\,\text{q2}}\,\text{K2}\right)\text{p2}\,\text{q2} - \left(\frac{d}{d\,\text{q2}}\,\text{K1}\right)\text{p1}\,\text{q2} - 2\,b\,\text{K2}\,\text{q2} - \left(\frac{d}{d\,\text{q2}}\,K\right)\text{q2} + \left(\frac{d}{d\,\text{q1}}\,\text{K2}\right)\text{p2}\,\text{q1} + \left(\frac{d}{d\,\text{q1}}\,\text{K1}\right)\text{p1}\,\text{q1} + 2\,a\,\text{K1}\,\text{q1} + \left(\frac{d}{d\,\text{q1}}\,K\right)\text{q1} + \text{K}$$

```
(%i60) subst( 0, p1, ec0) $ ; ec1 : subst( 0, p2, %) ;
```

$$-2\,b\,\text{K2}\,\text{q2} - \left(\frac{d}{d\,\text{q2}}\,K\right)\text{q2} + 2\,a\,\text{K1}\,\text{q1} + \left(\frac{d}{d\,\text{q1}}\,K\right)\text{q1}$$

```
--> ec2 : expand( subst( 0, p1, ec − ec1) / p2) ;
```

$$-\left(\frac{d}{d\,\text{q2}}\,\text{K2}\right)\text{q2} + \left(\frac{d}{d\,\text{q1}}\,\text{K2}\right)\text{q1} + \text{K2}$$

```
--> ec3 : expand(( ec − ec1 − ec2· p2) / p1) ;
```

$$-\left(\frac{d}{d\,\text{q2}}\,\text{K1}\right)\text{q2} + \left(\frac{d}{d\,\text{q1}}\,\text{K1}\right)\text{q1} - \text{K1}$$

```
--> /· Constante G ·/
(%i61) G : q1· p1 − q2· p2 − a· q1 ^ 2 + b· q2 ^ 2 + q1· q2 ;
```

$$b\,\mathrm{q2}^2+\mathrm{q1}\,\mathrm{q2}-\mathrm{p2}\,\mathrm{q2}-a\,\mathrm{q1}^2+\mathrm{p1}\,\mathrm{q1}$$

```
(%i63) expand( corcheteH( G)) ;
```

$$0$$

```
(%i70) G : p1 / q2 + p2 / q1 − a· q1 / q2 − b· q2 / q1 ;
```

$$-\frac{b\,\mathrm{q2}}{\mathrm{q1}}-\frac{a\,\mathrm{q1}}{\mathrm{q2}}+\frac{\mathrm{p1}}{\mathrm{q2}}+\frac{\mathrm{p2}}{\mathrm{q1}}$$

```
(%i71) expand( corcheteH( G)) ;
```

$$0$$

```
(%i77) G : p1· q1 + p2· q2 − a· q1 ^ 2 − b· q2 ^ 2 ;
```

$$-b\,\mathrm{q2}^2+\mathrm{p2}\,\mathrm{q2}-a\,\mathrm{q1}^2+\mathrm{p1}\,\mathrm{q1}$$

```
(%i78) expand( corcheteH( G)) ;
```

$$0$$

Created with wxMaxima.

Ejercicio 4.7.3

```
(%i1) kill( all) ;
```

done

```
(%i1) depends([ Q, P],[ q, p]) ;
```

$$[Q(q,p),P(q,p)]$$

```
(%i3) Q : log( sin( p) / q) ;
      P : q· cot( p) ;
```

$$\log\left(\frac{\sin(p)}{q}\right)$$

$$\cot(p)q$$

```
(%i5) corchetePQ : diff( Q, q)· diff( P, p) − diff( Q, p)· diff( P, q) $
      trigsimp( corchetePQ) ;
```

1

```
(%i8) kill( q, p, Q, P) ;
      eq1 : Q = log( sin( p) / q) ;
      eq2 : P = q· cot( p) ;
```

done

$$Q=\log\left(\frac{\sin(p)}{q}\right)$$

$$P=\cot(p)q$$

```
(%i12) /· Función generadora de tipo 3 ·/
       depends([ q, P],[ p, Q]) ;
       q : rhs( solve( eq1, q)[ 1]) ;
       eq : trigsimp( ev( eq2)) ;
       P : rhs( solve( eq, P)[ 1]) ;
```

$$[q(p,Q),P(p,Q)]$$

$$\%e^{-Q}\sin(p)$$

$$P=\%e^{-Q}\cos(p)$$

$$\%e^{-Q}\cos(p)$$

```
(%i13) dF3 : − q· del( p) − P· del( Q) ;
```

$$-\%e^{-Q}\sin(p)\mathrm{del}(p)-\%e^{-Q}\cos(p)\mathrm{del}(Q)$$

```
(%i14) depends( F3,[ p, Q]) ;
```

$$[\mathrm{F3}(p,Q)]$$

```
(%i15) F3 : cos( p)· %e ^( − Q) ;
```

$$\%e^{-Q}\cos(p)$$

```
(%i16) trigsimp( dF3 − diff( F3)) ;
```

0

```
(%i18) /· Tipo 1 ·/
       kill( q) ;
       depends( F1,[ q, Q]) ;
```

done

$$[\mathrm{F1}\,(q, Q)]$$

```
(%i19) p : rhs( solve( eq1, p)[ 1]) ;
```

solve: using arc-trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.

$$\mathrm{asin}\left(\%\mathrm{e}^{Q}\,q\right)$$

```
(%i21) F1 : F3 + p· q $
       F1 : ev( F1) ;
```

$$q\mathrm{asin}\left(\%\mathrm{e}^{Q}\,q\right)+\%\mathrm{e}^{-Q}\,\sqrt{1-\%\mathrm{e}^{2Q}\,q^2}$$

```
(%i23) /· Tipo 2 ·/
       kill( p, P) ;
       depends( F2,[ q, P]) ;
```

done

$$[\mathrm{F2}\,(q, P)]$$

```
(%i24) p : rhs( solve( eq1, p)[ 1]) ;
```

solve: using arc-trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.

$$\mathrm{asin}\left(\%\mathrm{e}^{Q}\,q\right)$$

```
(%i25) eq : expand( ev( eq2 ^ 2)) ;
```

$$P^2=\%\mathrm{e}^{-2Q}-q^2$$

```
(%i27) sol : solve( eq, Q) ;
       Q : rhs( sol[ 2]) ;
```

$$[Q=\log\left(-\frac{1}{\sqrt{q^2+P^2}}\right),Q=-\frac{\log\left(q^2+P^2\right)}{2}]$$

$$-\frac{\log\left(q^2+P^2\right)}{2}$$

```
(%i28) F1 : ev( F1) ;
```

$$q\mathrm{asin}\left(q\,\%\mathrm{e}^{-\frac{\log\left(q^2+P^2\right)}{2}}\right)+\sqrt{1-\frac{q^2}{q^2+P^2}}\,\%\mathrm{e}^{\frac{\log\left(q^2+P^2\right)}{2}}$$

```
(%i29) F1 : radcan( F1) ;
```

$$q\mathrm{asin}\left(\frac{q}{\sqrt{q^2+P^2}}\right)+\ \mid P\mid$$

```
(%i30) F2 : F1 + P· Q ;
```

$$q\operatorname{asin}\left(\frac{q}{\sqrt{q^2+P^2}}\right)-\frac{P\log\left(q^2+P^2\right)}{2}+\ \mid P \mid$$

(%i32) /· Tipo 4 ·/

```
kill( Q, p) ;
depends( F4,[ p, P]) ;
```

done

$$[\mathrm{F4}\,(p,P)]$$

(%i33) q : rhs(solve(eq2, q)[1]) ;

$$\frac{P}{\cot(p)}$$

(%i34) Q : rhs(solve(ev(eq1), Q)[1]) ;

$$\log\left(\frac{\cot(p)\sin(p)}{P}\right)$$

(%i35) F4 : ev(F3) + P· Q ;

$$P\log\left(\frac{\cot(p)\sin(p)}{P}\right)+\frac{P\cos(p)}{\cot(p)\sin(p)}$$

(%i36) F4 : trigsimp(F4) ;

$$P\log\left(\frac{\cos(p)}{P}\right)+P$$

(%i38) /· Apartado c) ·/

```
kill( q, Q) ;
depends( H,[ q, p]) ;
```

done

$$[H(q,p)]$$

(%i39) H : q ^ 2·(1 / sin(p) ^ 2 − 1) ;

$$\left(\frac{1}{\sin(p)^2}-1\right)q^2$$

(%i40) q : rhs(solve(eq2, q)[1]) ;

$$\frac{P}{\cot(p)}$$

(%i41) p : rhs(solve(trigsimp(ev(eq1)), p)[1]) ;

solve: using arc-trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.

$$\operatorname{acos}\left(P\,\%\mathrm{e}^{Q}\right)$$

(%i42) q : ev(q) ;

$$\%\mathrm{e}^{-Q}\sqrt{1-P^2\%\mathrm{e}^{2Q}}$$

(%i43) K : H + diff(F3, t) ;

$$\left(\frac{1}{\sin(p)^2}-1\right)q^2$$

(%i44) K : ratsimp(ev(K)) ;

$$P^2$$

(%i48) /· Constantes del movimiento ·/

```
kill( q, p) ;
depends([ Q, P], t) ;
dQ_dt : diff( K, P) ;
```

```
dP_dt : - diff( K, Q) ;
```

done

$$[Q(t), P(t)]$$

$$2P$$

$$0$$

```
(%i50) sol : ode2( dP_dt = diff( P, t), P, t) $
       P : ev( rhs( sol), %c = P0) ;
```

$$P0$$

```
(%i51) dQ_dt : ev( dQ_dt) ;
```

$$2\,P0$$

```
(%i53) sol : ode2( dQ_dt = diff( Q, t), Q, t) $
       Q : ev( rhs( sol), %c = Q0) ;
```

$$2\,P0\,t + Q0$$

```
(%i54) Q ;
```

$$2\,P0\,t + Q0$$

```
(%i55) P ;
```

$$P0$$

```
(%i56) /· ley de movimiento en sistema ( q , p ) ·/
       ev( eq1) ;
```

$$2\,P0\,t + Q0 = \log\left(\frac{\sin(p)}{q}\right)$$

```
(%i57) ev( eq2) ;
```

$$P0 = \cot(p) q$$

Created with wxMaxima.

Ejercicio 4.7.4

(%i1) kill(all) ;

done

(%i1) depends([H, f, g],[q, p, t]) ;

$$[H(q,p,t), f(q,p,t), g(q,p,t)]$$

(%i2) corchete(f, g) : = diff(f, q)· diff(g, p) − diff(f, p)· diff(g, q) ;

$$\text{corchete}\,(f,g) := \left(\frac{d}{dq}f\right)\left(\frac{d}{dp}g\right)-\left(\frac{d}{dp}f\right)\left(\frac{d}{dq}g\right)$$

(%i3) D_Dt(f) : = diff(f, t) + corchete(f, H) ;

$$D_{\text{Dt}}(f) := \frac{d}{dt}f + \text{corchete}\,(f,H)$$

(%i4) expresion : D_Dt(corchete(f, g)) ;

$$\left(\frac{d}{dp}H\right)\left(-\left(\frac{d}{dp}f\right)\left(\frac{d^2}{dq^2}g\right)-\left(\frac{d^2}{dpdq}f\right)\left(\frac{d}{dq}g\right)+\left(\frac{d}{dq}f\right)\left(\frac{d^2}{dpdq}g\right)+\left(\frac{d^2}{dq^2}f\right)\left(\frac{d}{dp}g\right)\right)-\left(\frac{d}{dp}f\right)\left(\frac{d^2}{dqdt}g\right)-\left(\frac{d}{dq}H\right)\left(-\left(\frac{d^2}{dp^2}f\right)\left(\frac{d}{dq}g\right)+\left(\frac{d}{d}\right.\right.$$

(%i8) /· f y g son constantes del movimiento ·/

expresion : ev(expresion, diff(f, q, 1, t, 1) = − diff(corchete(f, H), q)) $

expresion : ev(expresion, diff(f, p, 1, t, 1) = − diff(corchete(f, H), p)) $

expresion : ev(expresion, diff(g, q, 1, t, 1) = − diff(corchete(g, H), q)) $

expresion : ev(expresion, diff(g, p, 1, t, 1) = − diff(corchete(g, H), p)) ;

$$\left(\frac{d}{dp}H\right)\left(-\left(\frac{d}{dp}f\right)\left(\frac{d^2}{dq^2}g\right)-\left(\frac{d^2}{dpdq}f\right)\left(\frac{d}{dq}g\right)+\left(\frac{d}{dq}f\right)\left(\frac{d^2}{dpdq}g\right)+\left(\frac{d^2}{dq^2}f\right)\left(\frac{d}{dp}g\right)\right)-\left(\frac{d}{dp}f\right)\left(-\left(\frac{d}{dp}H\right)\left(\frac{d^2}{dq^2}g\right)-\left(\frac{d^2}{dpdq}H\right)\left(\frac{d}{dq}g\right)+\left(\right.\right.$$

(%i9) expand(expresion) ;

0

Created with wxMaxima.

Ejercicio 4.7.5

(%i1) kill(all) ;

done

(%i1) depends([H, f, g],[q, p, t]) ;

$$[H(q,p,t), f(q,p,t), g(q,p,t)]$$

(%i2) corchete(f, g) : = diff(f, q)· diff(g, p) − diff(f, p)· diff(g, q) ;

$$\text{corchete}\,(f,g) := \left(\frac{d}{dq}f\right)\left(\frac{d}{dp}g\right)-\left(\frac{d}{dp}f\right)\left(\frac{d}{dq}g\right)$$

(%i3) D_Dt(f) : = diff(f, t) + corchete(f, H) ;

$$D_{\text{Dt}}(f) := \frac{d}{dt}f + \text{corchete}\,(f,H)$$

(%i4) expresion : D_Dt(corchete(f, g)) ;

$$\left(\frac{d}{dp}H\right)\left(-\left(\frac{d}{dp}f\right)\left(\frac{d^2}{dq^2}g\right)-\left(\frac{d^2}{dpdq}f\right)\left(\frac{d}{dq}g\right)+\left(\frac{d}{dq}f\right)\left(\frac{d^2}{dpdq}g\right)+\left(\frac{d^2}{dq^2}f\right)\left(\frac{d}{dp}g\right)\right)-\left(\frac{d}{dp}f\right)\left(\frac{d^2}{dqdt}g\right)-\left(\frac{d}{dq}H\right)\left(-\left(\frac{d^2}{dp^2}f\right)\left(\frac{d}{dq}g\right)+\left(\frac{d}{d}\right.\right.$$

(%i8) /· f y g son constantes del movimiento ·/

expresion : ev(expresion, diff(f, q, 1, t, 1) = − diff(corchete(f, H), q)) $

expresion : ev(expresion, diff(f, p, 1, t, 1) = − diff(corchete(f, H), p)) $

expresion : ev(expresion, diff(g, q, 1, t, 1) = − diff(corchete(g, H), q)) $

expresion : ev(expresion, diff(g, p, 1, t, 1) = − diff(corchete(g, H), p)) ;

$$\left(\frac{d}{dp}H\right)\left(-\left(\frac{d}{dp}f\right)\left(\frac{d^2}{dq^2}g\right)-\left(\frac{d^2}{dpdq}f\right)\left(\frac{d}{dq}g\right)+\left(\frac{d}{dq}f\right)\left(\frac{d^2}{dpdq}g\right)+\left(\frac{d^2}{dq^2}f\right)\left(\frac{d}{dp}g\right)\right)-\left(\frac{d}{dp}f\right)\left(-\left(\frac{d}{dp}H\right)\left(\frac{d^2}{dq^2}g\right)-\left(\frac{d^2}{dpdq}H\right)\left(\frac{d}{dq}g\right)+\left(\right.\right.$$

(%i9) expand(expresion) ;

0

Created with wxMaxima.